Université Paris-Dauphine

Mémoire d'initiation à la recherche

Systèmes dynamiques : introduction à la théorie ergodique

Auteur :
Gabriel Flath

Superviseur :
Jacques Féjoz

Cycle Pluridisciplinaire d'Etudes Supérieures Troisième année

29 Juin 2018

Table des matières

1 Systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui décrit le comportement de systèmes qui évoluent au cours du temps. Les systèmes dynamiques sont apparus avec la mécanique de Newton. Il s'agissait notamment de résoudre une équation différentielle et d'étudier le mouvement de l'objet en question. Henri Poincaré s'est notamment intéressé au comportement qualitatif des solutions, possédant rarement de solutions explicites. Il a notamment mis en évidence le caractère chaotique du mouvement de 3 planètes.
Plusieurs mathématiciens sont sortis du cadre des équations différentielles afin de généraliser les phénomènes observés. C'est ainsi que de nombreuses branches ont vu le jour : Système dynamique continu, système dynamique discret, système dynamique topologique, théorie ergodique. La théorie ergodique est notamment très efficace pour étudier le comportement asymptotique d'un système.

1.1 Équations de prédation de Lotka-Volterra

On va aborder le modèle le plus simple de "proie-prédateur", il est souvent utilisé pour décrire la dynamique de système biologique dans laquelle un prédateur et sa proie interagissent. Il y a deux espèces en jeu :

— Une espèce herbivore (x(t) individus)
— Une espèce Carnivore (y(t) individus)

On modélise l'évolution de la population de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t x(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ \partial_t y(t) = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

Les paramètres suivants sont caractéristiques des interactions entre les deux espèces :

— α est le taux de reproduction intrinsèque des proies (constant, indépendant du nombre de prédateurs)
— β est le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés
— δ est le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées

— γ est le taux de mortalité intrinsèque des prédateurs (constant, indépendant du nombre de proies)

La théorie des équations différentielles permet de trouver les équilibres de ce système. l'état d'équilibre différent de 0, est un centre, c'est à dire que les populations de proies et prédateurs oscillent autour de cet équilibre.

Une population de proies dense permet aux prédateurs de se développer pleinement, jusqu'à un point de rupture où les prédateurs auront décimé une grande partie de la population des proies. Il manque alors de nourriture et leur population décline à leur tour. Les proies sont alors moins menacées et se renouvellent plus rapidement qu'elles ne sont chassées. Ce cycle se reproduit à l'identique dans une mécanique de déclin et de croissance des proies et des prédateurs.

1.2 Une application sur le Tore

On assimilera la surface d'un tore à $[0;1]^2$. en effet un tore peut s'obtenir à partir du carré en collant deux extrémités opposés pour obtenir un tube. Il reste à fermer le tube sur lui même et on obtient le tore. On a donc $\mathbb{T}^2 = [0;1]^2$ à un homéomorphisme prêt. On définit l'application F : $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, (x, y) \mapsto (x + r, y + r)$ mod 1 où r est un irrationnel.
Cette application en fait un système dynamique. Nous allons l'aborder.
on prend x_0 dans $[0;1]^2$ et on étudie son orbite, c'est à dire $\{T^n(x_0)\}_{n\geq 0}$. Ici, le temps est donc discret.
Cette application est transitive, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{T}^2$ dont l'orbite est dense.
On dit que l'orbite de x est dense si elle rencontre tout ouvert du tore, c'est à dire, si :

$$\forall O \subset \mathbb{T}, \exists n \in \mathbb{N}, T^n(x) \in O$$

On peut montrer que F est transitive.

Remarque 1. *Si la transformation est continue, la densité d'une orbite implique-elle la densité partout ?*

On peut aussi s'intéresser à la répartition statistique de l'orbite de x (ou d'un ensemble). Si une orbite se répartit uniformément à la surface du tore, pour presque tout x, on dit que F est ergodique. C'est à dire s'il existe un ensemble Ω de mesure 1 tel que :

$$\forall x \in \Omega, \forall O \subset \mathbb{T}^2, \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_O(T^n(x)) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda(O)$$

On peut montrer que F est ergodique.

Remarque 2. *Ainsi, du chaos né le hasard si la transformation est ergodique. En effet, si l'orbite se répartit uniformément, cela veut dire, en un certain sens, que l'orbite de x va se répartir "au hasard"*

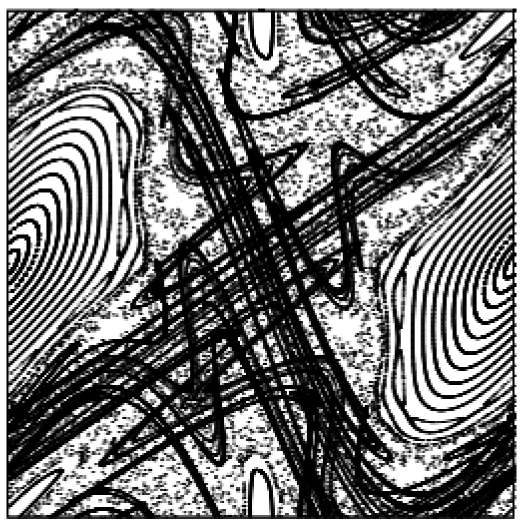


FIGURE 1 – Quelques orbites de l'application $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, (x, y) \mapsto (x + y + \epsilon\sin(2\pi x), y + \epsilon\sin(2\pi x))(\epsilon = 0.1)$

1.3 Diffusion d'un parfum

Lors de l'ouverture d'un flacon, des particules vont s'échapper et se répandre dans la pièce. On peut assimiler cette diffusion à un système dynamique. Dans la modélisation on prend notamment en compte le fait que les particules vont se heurter les unes aux autres, résultant en des trajectoires en forme de lignes brisées. Le temps est ici continu.

On peut ici s'intéresser au temps de diffusion du parfum à une certaine distance (puisqu'aucune direction n'est favorisée -dans notre modélisation-), la diffusion se mesure au rayon. Sous certaines hypothèses on trouve que la le rayon de la diffusion au carré est proportionnel au temps.

Remarque 3. *Ce dynamisme s'appelle le mouvement brownien, une des marches aléatoires classiques.*

2 Systèmes dynamiques mesurables

Dans cette partie, nous introduirons les définitions et propositions essentielles qui nous permettront de donner un cadre à une branche des systèmes dynamiques : les Systèmes dynamiques mesurables. Nous essayerons de restituer l'intuition -manipuler- de certaines propriétés à l'aide de propositions parfois superflues.

Cette Partie est nettement inspirée du Polycopié de théorie de la mesure de Mr Féjoz et du Pollicott

On considérera dans la suite un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$

2.1 Transformation préservant la mesure

Definition 1. *Une application mesurable $T : \Omega \to \Omega$ "préserve la mesure" si $\forall B \in \mathscr{A} : \mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$. On dit aussi que T est μ-invariante.*

Proposition 1. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

— *T préserve la mesure*

— $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \circ T \,\mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$

Démonstration.
$\Rightarrow$ On utilise la Construction de l'intégrale de Lesbesgue
$\Leftarrow$ On pose f= $\mathbb{1}_B$ □

Exemple 1. *Soit $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définit par $T(x) \equiv 2x[1]$. Soit $\mathscr{B}$ la tribu de Borelienne et μ la mesure de Lebesgue. Pour montrer que T est μ-invariante il suffit de montrer que pour chaque intervalle $I = [a; b]$ (Théorème classe monotone), on a $\mu(I) = \mu(T^{-1}(I))$, cela est bien vérifié car :*

$$\mu(T^{-1}(I)) = \left[\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{2}; \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right]$$

Exemple 2. *En partant d'un schéma avec un grand carré et les 4 carrés inscrit à l'intérieur, on definit une app circulaire entre les carrés et on obtient une application préservant la mesure.*
Condition sur un champs de vecteur G pour qu'une application qui a x+g(x) préserve la mesure ? (qu'il soit uniforme ?)

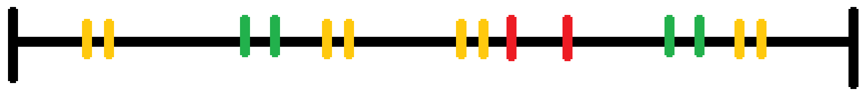


FIGURE 2 – En rouge est l'intervalle A, en vert $T^{-1}(A)$, en orange $T^{-2}(A)$. Il semblerait que $T^{-n}(A)$ parcourra tout le segment...

2.2 Ensemble T-invariant

Definition 2. *Un ensemble $A \in \mathscr{A}$ est dit T-invariant si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}$ presque partout.*

Proposition 2. *L'ensemble $\mathscr{I}$ des ensembles invariants forme une tribu. $\mathscr{I}$ s'appelle la tribu invariante de T.*

Démonstration. Immédiat en utilisant les formules classiques des indicatrices d'ensembles.

□

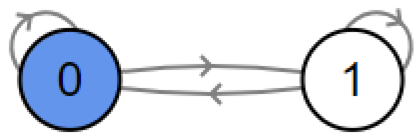
Exemple 3. *Chaîne de Markov avec plusieurs ensembles invariants(matrice par bloc)*

2.3 Hypothèse ergodique

On va à présent présenter une hypothese sur T qui, on le verra, est assez naturelle et sans perte de généralité dans certains cas.

Definition 3. *Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Une transformation $T : \Omega \to \Omega$ est dite ergodique si $\forall A \in \mathscr{A}$ tel que A soit un ensemble T-invariant, $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.*
On dit aussi que μ est T-ergodique.

Remarque 4. *Retour sur le cas des chaines de Markov : les chaines de markov respectant l'hypothèse d'ergodicité sont appelées -à juste titre- les chaînes de Markov ergodiques. Ce sont ces dernières qui sont étudiées car aucune interaction n'est effectuée entre deux "systèmes" isolés.*



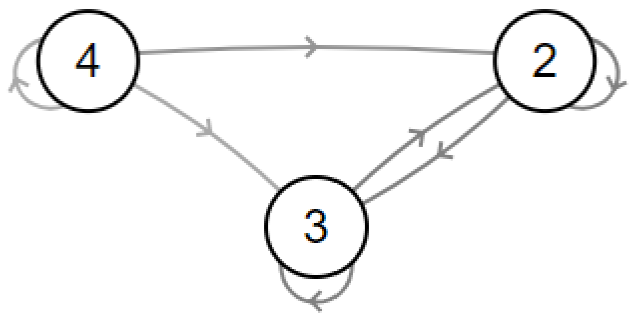


FIGURE 3 – Mais on peut ici étudier les deux systèmes de manière indépendante !

On va à présent voir des équivalences de l'ergodicité, qui je l'espère, donneront une plus fine compréhension de cette hypothèse.

Proposition 3. *T Préserve la mesure. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
- *T est ergodique*
- $\forall A \in \mathscr{A}$ *tel que* $\mu(A) > 0$, *on a :* $\mu(\cup_{n\geq 0} T^{-n}(A)) = 1$

Démonstration.
$\Rightarrow$ On raisonne par l'absurde : On Suppose que $\exists A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $\mu(\cup_{n\geq 0} T^{-n}(A)) < 1$. On montre par convergence monotone $\exists B \in \mathscr{A}$ un ensemble T-invariant tel que $\mu(A) \neq 0$ et $\mu(A) \neq 1$.

$\Leftarrow$ Soit A un ensemble T-invariant.
Si $1 > \mu(A) > 0$, on raisonne par l'absurde : On suppose $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}(x)$ presque partout. En composant par T en entré on a : $\mathbb{1}_{T^{-1}(A)}(x) = \mathbb{1}_{T^{-2}(A)}(x)$ presque partout. Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z} : \mathbb{1}_{T^{-n}(A)}(x) = \mathbb{1}_{T^{-m}(A)}(x)$.

En utilisant $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_{(A)} + \mathbb{1}_{(B)} - \mathbb{1}_{(A\cap B)}$, on obtient : $\mathbb{1}_{(A)} = \mathbb{1}_{\cup_{n\geq 0}T^{-n}(A)}$.
En passant à l'ésperance, on obtient $\mu(\cup_{n\geq 0}T^{-n}(A)) = mu(A) > 0$.
On a donc $\mu(A) > 0$ et $\mu(\cup_{n\geq 0}T^{-n}(A)) < 1$. Absurde. $\square$

Remarque 5. *Voici une autre équivalence à l'ergodicité (Exo) :* $\forall A \in \mathscr{A}, \forall B \in \mathscr{A}$ *tels que* $\mu(A) > 0$ *et* $\mu(B) > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ / $\mu(T^{-n}(A \cap B)) > 0$. *C'est un peu l'intuition que l'on peut avoir d'un mélange.*

Théorème 1. *(Théorème de récurrence de Poincaré) Soit un espace de probabilité* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. *Une transformation* $T : \Omega \to \Omega$ *ergodique. Soit* $A \in \mathscr{A}$ *tel que* $\mu(A) > 0$, *on a pour presque tout* $x \in A$, *l'orbite* $\{T^n(x)\}_{n>0}$ *retourne dans* A *une infinité de fois.*

3 Le théorème ergodique

3.1 Théorème ergodique de Birkhoff

Théorème 2. *Soit $f \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Soit T une transformation préservant la mesure. On a : Pour presque Tout $x \in \Omega$, la moyenne :*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} f \circ T^n(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{p.p} E[f|\mathscr{I}]$$

Remarque 6. *Ce théorème peut par exemple signifier -sous les hypothèses adaptées, de liberté de la particule- la chose suivante : Pour calculer la vitesse moyenne d'une particule, il suffirait de suivre cette particule et faire la moyenne de sa vitesse.*

Remarque 7. *Une conséquence de ce théorème est la loi forte des grands nombres.*

Démonstration. On essayera dans cette démonstration de souligner les points clefs, c'est à dire lorsque les hypothèses interviennent. □

Exemple 4. *Soit $(\Omega, \mathbb{P}, \mu)$ un espace de probabilité et T une transformation μ-invariante. Soit $A \in \mathscr{A}$ et $x \in \Omega$, on peut se demander à quelle fréquence l'orbite de x visite A. C'est à dire $\frac{1}{N} Card(n \in \{0, ..., N-1\} | T^n(x) \in A)$. Réécrit de la façon suivante : $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_A(T^n(x))$. Si T est ergodique, alors le théorème de Birkhoff fournit le résultat :*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_A(T^n(x)) \xrightarrow[N \to +\infty]{p.p} \mathbb{P}(A)$$

En effet, l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire réelle par rapport à une tribu ne contenant que des évènement négligeables ou de mesure pleine est constante. il suffit donc, pour déterminer la valeur de cette constante d'évaluer son intégrale sur Ω, ce qui donne P(A) .
Une application de ce résultat peut être la fréquence de passage d'une marche aléatoire dans une partie du système. Par exemple la fréquence de passage dans un sommet d'une chaîne de Markov.

Remarque 8. *On en déduit -un marteau pour écraser une mouche- le théorème de récurrence de Poincaré.*

4 Deux exemples d'application

4.1 Une application à la théorie des nombres

Proposition 4. *Pour presque tout $x \in [0;1]$, la fréquence d'apparition du chiffre 1 dans l'écriture binaire de x est $\frac{1}{2}$.*

Démonstration. Soit $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définit par $T(x) \equiv 2x[1]$. Soit $\mathscr{B}$ la tribu de Borelienne et μ la mesure de Lebesgue.
On a déjà montré (cf Exemple 1) que T préserve la mesure.
Pour montrer que T est ergodique, on va montrer que $\mathscr{I}$ ne contient pas les intervalles. On ne peut pas conclure directement car les ensembles "variants" ne forment pas une tribu. En revanche on va, à partir des intervalles montrer que dans ce cas précis, on peut obtenir l'invariance de tous les Boreliens de mesure non nulle et différent de Ω.

Soit l'intervalle I=[a ;b], on a :

$$\mu(T^{-1}(I)) = \left[\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{2}; \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right]$$

Comme T préserve la mesure, alors l'intersection des deux segments au dessus est vide et si on veut espérer que I soit invariant, il faut donc que ces deux segments se suivent. donc :

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{2} = \frac{b}{2} \quad Ou \quad \frac{b}{2} + \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$$

C'est à dire :

$$a + 1 = b \quad Ou \quad b + 1 = a$$

Ce qui est possible quand $a = b = 0$.
Remarque : Ω est bien un invariant.
Il faut en déduire que le reste des boréliens de mesure intermédiaire est invariant.
Nous avons donc démontré que T est préserve la mesure et est invariante.
Montrons à présent la proposition à proprement dite :
Soit $x \in [0;1[$, x= $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + ...$ en écriture binaire. On a :

$$T(x) = T(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + ...) = \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + ...$$

En posant f(x)=$\mathbb{1}_{[\frac{1}{2};1[}$, on a :

$$f(T^n(x)) = f(\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n+2}}{2^2} + ...) = \begin{cases} 1 \; si \; a_{n+1} = 1 \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

Ainsi le nombre de "1" parmi les N premiers de l'écriture binaire de x est :

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x))$$

Il nous reste plus qu'à appliquer le théorème de Birkhoff, et donc :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n(x) \underset{N \to +\infty}{\xrightarrow{p.p}} E[f|\mathscr{I}] = \int_\Omega \mathbb{1}_{[\frac{1}{2};1[} \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{2}$$

En effet, l'espérance conditionnelle d'une application par rapport à une tribu ne contenant que des évènement négligeables ou de mesure pleine est constante. il suffit donc, pour déterminer la valeur de cette constante d'évaluer son intégrale sur Ω, ce qui donne le résultat. □

Remarque 9. *On pourra généraliser ce résultat à l'écriture décimale.*

4.2 Premier chiffre des puissances de 2

Considérons la séquence $2, 4, 8, 16, 32, 64...2^n$ et la séquence du premier chiffre $2, 4, 8, 1, 3, 6..., r_n \in \{0, 1, ..., 9\}$.

Proposition 5. *la proportion du chiffre k dans la suite r_n est donnée par $log_{10}(1 + \frac{1}{k})$, C'est à dire :*

$$\frac{1}{N} Card(n \in \{0, ..., N-1 | r_n = k\}) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} log_{10}(1 + \frac{1}{k})$$

Démonstration. Le premier chiffre de 2^n est égal à k ssi $k10^r \leq 2^n \leq (k+1)10^r$ pour un certain r entier positif. De manière équivalente : $nlog_{10}(2) \in [log_{10}(k+1); log_{10}(k)[[1]$.
Or, comme $log_{10}(2)$ est irrationel, la transformation $T(x) = x + log_{10}(2)$ est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue.
D'après le théorème de Birkhoff on en déduit que le temps de passage moyen

de l'orbite $\{T^n(0)\}_{n\geq 0}$ dans l'intervalle $[log_{10}(k+1); log_{10}(k)[$[1] est égal à sa Longueur, c'est à dire :

$$log_{10}(k+1) - log_{10}(k) = log_{10}(1 + \frac{1}{k})$$

$\square$

Remarque 10. *On pourra vérifier que la somme de la proportion de tous les chiffres donne bien 1.*

5 Conclusion

On a donc introduit la théorie des systèmes dynamiques et on a exposé la notion à travers divers exemples. On s'est ensuite concentré sur la théorie ergodique et en particulier, le théorème de Birkhoff. Ce théorème a de nombreuses applications, bien au dessus des quelques applications abordées.
De nombreuses notions mathématiques -par exemple les chaines de Markov- peuvent s'interpréter en tant que système dynamique, ce qui en fait une théorie très puissante.
Afin d'approfondir, on pourra s'intéresser aux applications mélangeantes et aux propriétés statistiques d'un système dynamique.

6 Bibliographie

[1] Mark Pollicott. Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds. Published in Cambridge University Press in 1993, London Mathematical Society Lecture Note Series.

[2]Jacques Féjoz. Polycopié Intégrale de Lebesgue et probabilités. 2014.

[3]Halim Doss. Polycopié Intégrale de Lebesgue. 2006.