Université paris dauphine - psl

Thomas JACQUOT

Problèmes d'appariement avec et sans transfert d'utilité

Mémoire d'initiation à la recherche

Responsable de stage : **M. Miquel Oliu Barton**

cycle pluridisclinaire d'études supérieures
Troisième année

Table des matières

Introduction

Les problèmes d'appariement ou d'affectation (« matching problems » en anglais) ont intéressé certains théoricien des jeux. En effet, ce type de problèmes, qui consiste à assortir par paires des agents ou des biens, est récurrent dans certaines relations économiques ou sociales. Comment, par exemple, mettre en relation des élèves et des écoles, des médecins et des patients, des employeurs et des employés, etc... Nous remarquerons que la plupart du temps, nous sommes dans une situation à deux côtés (« two-sidded markets ») qui se complètent. Le but est alors de les associer de « la meilleure manière possible » dans un sens à définir.

Dans ce travail, nous distinguerons deux cas différents. D'abord le cas des problèmes d'appariement sans transfert d'utilité sur la base de l'article de Gale-Shapley [1] et ensuite celui des problèmes d'appariement à utilité transférable à partir de la publication de Shapley-Shubik [2].

Dans la première partie, nous nous intéresserons principalement au problème des mariages stables dont l'objectif est de former des couples hommes-femmes à partir des préférences de chacun d'entre eux. Le but étant de créer des associations « stables » de sorte que personne n'a intérêt à dévier. Gale et Shapley dévoilent dans leur article un algorithme constructif connu sous le nom d'acceptation différée résolvant ce problème. Au-delà de la métaphore des mariages, cette problématique s'étend à d'autres domaines. En effet, la plateforme Admission Post Bac (APB) chargée d'affecter chaque bachelier à une formation supérieure entre 2009 et 2017, a eu recours à la procédure décrite par Gale et Shapley.

Dans la seconde partie, les problèmes d'appariement étudiés seront comme évoqué ci-dessus avec transfert d'utilité. L'exemple le plus parlant est celui du marché de l'immobilier où acheteurs et vendeurs se font face. Les deux côtés s'échangent alors mutuellement une utilité monétaire. Ce sera aussi l'occasion de s'intéresser aux jeux coalitionnels dont quelques notions nous seront nécessaires.

1 Problèmes d'appariement sans transfert d'utilité

1.1 Modélisation

On considère une société $\mathcal{S}$ constituée de deux côtés F et H tels que :

$$F = \{f_1, ..., f_i, ...f_n\}$$

$$H = \{h_1, ...h_i, ...h_m\}$$

F et H sont des ensembles d'agents (que l'on appellera aussi joueurs) et qui peuvent représenter respectivement des femmes et des hommes, des étudiants et des universités, des producteurs et des consommateurs, des médecins et des hôpitaux, etc... On suppose que tout joueur de F dispose d'une relation de préférence stricte $\succ$ qui lui permet d'ordonner chacun des joueurs de H et vice versa. Il n'y a donc aucune indifférence possible.

Définition 1.1

On appelle affectation, couple ou mariage tout duplet de la forme (f_i, h_j) avec $f_i \in F$ et $h_j \in H$. De plus, un ensemble de mariages $\mathcal{M}$ est une collection de couples tous différents. Il s'agit donc d'un sous-ensemble fini de $(F \times H)^{\mathbb{N}}$.

$\mathcal{M}$ peut prendre différentes formes remarquables :

— Modèle "1 to 1" : Si f_i apparait dans un couple de $\mathcal{M}$ alors il n'apparait que dans un unique couple de $\mathcal{M}$. De manière symétrique, on a la même propriété pour h_k. Ce qui s'écrit : $\forall f_i \in F,\ \forall f_j \in F,\ \forall h_k \in H,\ \forall h_l \in H, tels\ que\ f_j \neq f_i\ et\ h_l \neq h_k,$

$$si\ (f_i, h_k) \in \mathcal{M}\ alors\ \begin{cases} (f_i, h_l) \notin \mathcal{M} \\ (f_j, h_k) \notin \mathcal{M} \end{cases}$$

Cette situation reflète par exemple une société $\mathcal{S}$ monogame où F représente l'ensemble des femmes et H l'ensemble des hommes.

— Modèle "1 to many" : Ici aussi on a la propriété : si f_i apparait dans un couple de $\mathcal{M}$ alors il n'apparait que dans un unique couple de $\mathcal{M}$. Cependant, un même h_j peut apparaitre dans plusieurs couples de $\mathcal{M}$. On a donc uniquement la restriction suivante : $\forall f_i \in F,\ \forall h_k \in H,\ \forall h_l \in H, tels\ que\ h_l \neq h_k,$

$$si\ (f_i, h_k) \in \mathcal{M}\ alors\ (f_i, h_l) \notin \mathcal{M}$$

Dans ce cas, on peut considérer, par exemple que F désigne un ensemble d'étudiants et H un ensemble de facultés de telle sorte que chaque étudiant ne peut être pris que dans une seule faculté.

— Modèle "many to many" :. Ici un f_i et un h_j peuvent apparaitre chacun dans plusieurs couples de $\mathcal{M}$. Ceci peut décrire une situation dans laquelle F est un ensemble d'étudiants et H un ensemble d'associations. Un étudiant peut être membre de plusieurs associations et chaque association peut recruter plusieurs membres.

1.2 Le problème des mariages stables

Afin d'illustrer le modèle "1 to 1", nous étudions ici le problème dit des "mariages stables". Comme évoqué plus haut, $\mathcal{S}$ est donc une société monogame où F représente l'ensemble des femmes et H l'ensemble des hommes.

Définition 1.2

Dans ce cas, un ensemble $\mathcal{M}$ de mariages est dit instable s'il existe un homme et une femme qui ne sont pas mariés l'un avec l'autre mais qui se préfèrent à leur partenaire respectif. Mathématiquement, cela revient à :

$$\exists (f_i, h_j) \in \mathcal{M},\ \exists (f_k, h_l) \in F \times H, tels\ que$$

$$(h_j \underset{f_i}{\prec} h_l\ et\ f_k \underset{h_l}{\prec} f_i)\ ou\ (h_l \underset{f_k}{\prec} h_j\ et\ f_i \underset{h_j}{\prec} f_k)$$

$\mathcal{M}$ est dit stable s'il ne comporte aucun mariage instable.

Théoreme 1.1

Il existe toujours un ensemble de mariages stables

Démonstration. La preuve fait appel à la procédure de Gale-Shapley, détaillée ci dessous :

Procédure de Gale-Shapley (ou "d'acceptation différée") :
On imagine que ce sont les hommes qui proposent les mariages et que les femmes acceptent ou refusent les avances qui leur sont faites.
Chaque homme commence par demander en mariage sa femme préférée. Chaque femme accepte alors temporairement la proposition de l'homme qu'elle préfère parmi ceux qui se sont sollicités auprès d'elle. Une femme n'ayant reçu aucune demande en mariage reste alors temporairement seule.
Les hommes rejetés par leur premier voeu vont maintenant demander la main de leur second choix. Chaque femme selectionne alors l'homme qu'elle préfère entre les nouveaux courtisans et celui qu'elle avait temporairement gardé à l'étape précédente. On itère ainsi la procédure.
Si $n = m$, l'algorithme s'arrête lorsque chaque femme a reçu une proposition.

Si $n < m$, l'algorithme s'arrête lorsque chaque homme a été sélectionné temporairement par une femme ou a été rejeté par toutes les femmes.
Si $n > m$, l'algorithme s'arrête lorsque m femmes ont reçu une invitation.
Evidemment, on peut implémenter la procédure de la même manière si ce sont les femmes qui proposent et les hommes qui acceptent (ou refusent !) les demandes en mariage.

Montrons alors que l'ensemble de mariages constitués ainsi est stable. En raisonnant, par l'absurde, on suppose que :

$$\exists (f_i, h_j) \in \mathcal{M},\ \exists (f_k, h_l) \in F \times H, tels\ que\ h_j \underset{f_i}{\prec} h_l\ et\ f_k \underset{h_l}{\prec} f_i$$

Comme $f_k \underset{h_l}{\prec} f_i$, h_l a demandé la main de f_i à un moment donné de la procédure mais a été rejeté pour quelqu'un que f_i préfère. En conséquence de quoi, $h_l \underset{f_i}{\prec} h_j$. □

Proposition 1.1

L'algorithme de Gale-Shapley est fini. Si C est le nombre d'étapes effectuées alors :

$$C \leqslant \begin{cases} mn - n + 1 & \text{si} \quad n < m \\ n^2 - n + 1 & \text{si} \quad n = m \\ mn - m + 1 & \text{si} \quad n > m \end{cases}$$

Démonstration. On voit facilement que la procédure est finie car F et H sont de cardinal fini. Le nombre d'étapes est donc borné par $max(n, m)^2$. Pour affiner cette borne, on distingue les cas suivants :

— 1er cas : $n < m$: Au total, n hommes seront finalement mariés et $(m-n)$ se retrouveront sans femmes. Au pire des cas, chaque homme qui finit célibataire peut demander en mariage les n femmes. Les autres, toujours au pire des cas, demanderont chacun à $(n-1)$ femmes avant d'être accepté par la $n$ième. On a donc : $C \leqslant (m-n)n + n(n-1) + 1 = mn - n + 1$

— 2ème cas : $n \geqslant m$: Tous les hommes finissent mariés. Donc, au pire des cas chaque homme demandera en mariage $(n-1)$ femmes avant d'être accepté par la $n$ième. D'où : $C \leqslant m(n-1) + 1 = mn - m + 1$. Ce qui nous donne le résultat voulu si $n = m$

□

Exemple 1. *Dans les applications, nous résumons les préférences des joueurs dans une matrice de classement comme ci-joint. Si on considère le duplet de la ligne i et de la colonne j, le premier chiffre représente l'ordre de classement de la la j-ème femme par le i-ème homme et le second chiffre l'ordre de classement du i-ème homme par la j-ème femme.*

	f_1	f_2	f_3
h_1	*(1,1)*	*(2,2)*	*(3,3)*
h_2	*(2,3)*	*(1,1)*	*(3,2)*
h_3	*(3,2)*	*(2,3)*	*(1,1)*

Dans cet exemple, il y a 6 (ie. $min(n,m)!$) ensembles de mariages possibles :

1. $\mathcal{M}_1 : \{(f_1, h_1), (f_2, h_2), (f_3, h_3)\}$
2. $\mathcal{M}_2 : \{(f_1, h_1), (f_2, h_3), (f_3, h_2)\}$
3. $\mathcal{M}_3 : \{(f_1, h_2), (f_2, h_1), (f_3, h_3)\}$
4. $\mathcal{M}_4 : \{(f_1, h_2), (f_2, h_3), (f_3, h_1)\}$
5. $\mathcal{M}_5 : \{(f_1, h_3), (f_2, h_1), (f_3, h_2)\}$
6. $\mathcal{M}_6 : \{(f_1, h_3), (f_2, h_2), (f_3, h_1)\}$

.

On remarque facilement que $\mathcal{M}_1$ est le seul ensemble de mariages stables, tous les autres sont instables.

Exemple 2. *Avec la matrice de classement suivante :*

	f_1	f_2	f_3	f_4
h_1	*(1,4)*	*(2,2)*	*(3,3)*	*(4,1)*
h_2	*(2,2)*	*(1,4)*	*(4,1)*	*(3,3)*
h_3	*(3,3)*	*(4,1)*	*(1,4)*	*(2,2)*
h_4	*(4,1)*	*(3,3)*	*(2,2)*	*(1,4)*

$\mathcal{M}_1 : \{(f_1, h_1), (f_2, h_2), (f_3, h_3), (f_4, h_4)\}$, $\mathcal{M}_2 : \{(f_1, h_2), (f_2, h_1), (f_3, h_4), (f_4, h_3)\}$ *sont tous les deux stables. On note que $\mathcal{M}_1$ est l'ensemble de mariages obtenu grâce à la procédure de Gale-Shapley.*

Remarque 1. *Comme l'illustre l'exemple 1, il se peut qu'il y ait qu'un seul ensemble de mariages stables. Cependant, l'exemple 2 nous prouve qu'il existe des situations où l'on peut construire plusieurs ensembles de mariages stables différents. Ceci nous amène à la notion d'optimalité qui permet de comparer les ensembles de mariages stables.*

Définition 1.3

Un ensemble de mariages stables $\mathcal{M}$ est dit optimal pour les femmes si chaque femme est au moins aussi "bien mariée" que dans tout autre ensemble de mariages stables. De manière symétrique, on définit l'optimalité pour les hommes.

Remarque 2. *Un ensemble de mariages stables optimal pour un coté est unique du fait des préférences strictes.*

Proposition 1.2

La procédure de Gale-Shapley est optimale pour le côté du marché qui propose les mariages.

Démonstration. Montrons que les mariages stables obtenus lorsque les hommes proposent sont optimaux pour les hommes. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble des mariages stables $\mathcal{M}^*$ issue de la procédure de Gale Shapley n'est pas optimal pour les hommes. Il existe donc au moins un homme, marié dans $\mathcal{M}^*$, qui peut être marié à une autre femme qu'il préfère dans un autre ensemble de mariages stables. Cet homme a donc été rejeté par la femme en question lors de la procédure de Gale Shapley. Notons h_1 le premier homme de la sorte et f_1 la première femme qui l'a rejeté mais avec laquelle il peut être marié dans un autre ensemble de mariages stables $\mathcal{M}$. Dans $\mathcal{M}^*$, on note h_2 le mari de f_1. On a donc :

$$h_1 \underset{f_1}{\prec} h_2 \tag{1}$$

Dans $\mathcal{M}$, on pose f_2 la partenaire de h_2. Dans la procédure de Gale Shapley, quand h_1 est rejeté par f_1, h_2 n'a été rejeté par aucune partenaire valide (d'après la définition de h_1). Et donc :

$$f_2 \underset{h_2}{\prec} f_1 \tag{2}$$

Finalement, d'après (1) et (2), on a que (f_1, h_1) et (f_2, h_2) sont instables dans $\mathcal{M}$. Contradiction □

1.3 Le problème d'admission à l'université

Considérons maintenant le modèle "1 to many". Comme décrit au paragraphe 1.1, il illustre le problème d'admission à l'université, qui n'est autre qu'une extension du problème des mariages stables. On ajoute ici la notion de quotas. En effet, le nombre de places étant limité, chaque université décide de quotas que l'on notera q_i ($i \in [\![1; m]\!]$).

Remarque 3. *S'il n'y a pas de quota, chaque étudiant est admis dans l'université qu'il préfère parmi celles qui veulent bien de lui. Le problème n'a alors pas d'intéret.*

Les notions de stabilité et d'optimalité des affectations sont similaires à celles évoquées dans le problème des mariages stables :

Définition 1.4

Une affection est dite instable s'il existe un étudiant et une université tels que cet étudiant ne se trouve pas dans ladite université et la préfère à son université actuelle **et** que l'université préfère cet étudiant à un étudiant qu'elle a admis.

Définition 1.5

Une affectation stable est dite optimale si chaque étudiant est au moins "aussi bien" que dans toute autre affectation stable.

Remarque 4. *Dans la définition de l'optimalité, on ne précise pas "optimale pour l'étudiant" ou "optimale pour l'université" car la seule optimalité envisagée est l'optimalité pour les étudiants. En effet, on considère que les universités sont faites pour les étudiants et non l'inverse. Si toutefois, on veut vraiment définir deux optimalités distinctes, on peux toujours le faire !*

Encore une fois, les candidats ont des préférences strictes qui leur permettent de classer les universités selon un ordre de préférence en éliminant les universités dans lesquelles ils ne souhaitent pas étudier. Les universités font la même chose de leur côté. Toujours en considérant le fait que l'université a été conçue pour les étudiants, on peut appliquer une procédure d'acceptation différée légèrement modifiée comme décrite ci dessous :
Chaque étudiant commence par postuler dans l'université qu'il préfère.
Chaque université retient alors provisoirement sur liste d'attente, les candidats qu'elle préfère parmi tout ceux qui lui ont postulé et selon la limite des places disponible. A cette étape, une université ayant un quota q_i retient donc les q_i meilleurs étudiants si le nombre de candidatures est strictement supérieur à q_i, sinon elle les retient tous.
Les candidats rejetés se dirigent vers leurs seconds choix. Les universités sélectionnent alors entre les nouveaux candidats et ceux sur la liste provisoire. Elles rejettent les autres. On itère ainsi la procédure. L'algorithme s'arrête lorsque chaque candidat est soit sur une liste provisoire soit a été rejeté par toutes les universités. A la fin, chaque université offre une place aux candidats qui figurent sur la dernière liste d'attente provisoire.

Remarque 5. *Si vraiment on veut toujours créer une procédure "optimale pour les universités". La procédure est juste inversée. Chaque université h_i propose alors aux q_i étudiants qu'elle préfère d'intégrer sa formation. Les étudiants acceptent ou refusent les propositions de sorte qu'un étudiant peut accepter au plus une proposition, etc...*

Proposition 1.3

La procédure d'acceptation différée modifiée décrite ci-dessus permet d'obtenir des affectations stables et optimales.

Démonstration. :

— Stabilité : La preuve est similaire à celle faite pour le problème des mariages stables (voir fin Théorème 1.1)
— Optimalité : L'algorithme étant fini puisqu'il y a un nombre fini de candidats et d'universités. On fait donc une preuve par récurrence sur les étapes de l'algorithme. On dira dans la suite qu'une université est "possible" pour un étudiant s'il existe une affectation stable qui envoie cet étudiant dans ladite université.
Supposons que jusqu'à l'étape k, aucun étudiant a été refusé par une

université possible pour lui. Supposons de plus qu'à cette étape, qu'une faculté h de quota q refuse d'accepter le candidat f car elle a reçu les candidatures de q meilleurs étudiants $f_1, ..., f_q$. Reste à montrer que h est impossible pour f.
Tous les f_i ($i \in [\![1; q]\!]$) préfèrent l'université h à toutes les autres (excepté celles pour lesquelles il a été rejeté et qui sont par hypothèse impossibles pour lui). Imaginons qu'il existe une affectation stable qui permet à f d'aller à l'université h. Dans ce cas, au moins un de f_i irait dans une université qu'il préfère moins à h ou n'aurait pas d'université. Cette affectation serait alors instable car l'université h et l'étudiant f_i aimeraient chacun s'associer. Donc h est une université impossible pour f.
La procédure permet donc de rejeter les étudiants des universités pour lesquelles il est impossible qu'il aille. L'affectation finale de tous les candidats est alors optimale.

□

1.4 Le problème d'intégration d'associations

Les problèmes de type "many to many" peuvent décrire le problème d'intégration des étudiants dans des associations. Il s'agit alors d'une généralisation du problème des admissions à l'université évoqué plus haut. Dans ce cas, notre lot de données se constitue des préférences des joueurs de chacun des deux côtes et de leur quota respectif. En effet, chaque association h_i dispose d'un nombre limité de places q_i. De plus, chaque étudiant f_j dispose dans la semaine que d'un temps limité. Il souhaite donc intégrer seulement r_j associations. Tout fonctionne de manière similaire, la procédure d'acceptation différée est légèrement différente :

En supposant que ce sont les étudiants qui proposent. A chaque étape, au lieu de proposer sa candidature à une seule association, l'étudiant f_j la propose à r_j associations. Les associations acceptent provisoirement les meilleures candidatures reçues dans la limite de leur quota et rejettent les autres. Pour chaque candidature refusée, l'étudiant se porte candidat pour les autres associations selon son ordre de préférence. Les associations font alors le tri entre les candidats provisoirement retenus à l'étape précédente et les nouveaux. On itère ainsi la procédure.

L'algorithme se termine lorsque chaque étudiant est exactement dans son quota d'associations. Ou bien lorsque chaque étudiant est admis dans un nombre d'association inférieur à son quota tout en ayant été refusé de toutes les associations qui ne voulaient pas de lui.

2 Problème d'appariement avec transfert d'utilité

Intéressons-nous maintenant aux problèmes d'appariement avec transfert d'utilité. Le cadre considéré est toujours celui d'un marché à deux côtés. Les agents de chaque côté souhaitent alors s'associer afin d'obtenir une utilité (monétaire) maximale. L'illustration type de cette situation est le marché de l'immobilier que nous détaillerons plus tard. Attardons-nous, avant toute chose, sur la notion de jeux coalitionnels qui nous sera utile.

2.1 A propos des jeux coalitionnels

Les jeux coalitionnels ont été introduits par Von Neumann et Morgenstern et concernent des situations où les joueurs peuvent s'unir afin de former des coalitions.

Définition 2.1

Un jeu coalitionnel Γ est la donnée d'un couple (N, v) où :
- N est l'ensemble des joueurs
- $v : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction caractéristique du jeux qui le décrit entièrement. Il s'agit donc d'une fonction qui à chaque coalition $C \subset N$ renvoie un réel.

Remarque 6. *Par convention,* $v(\varnothing) = 0$ *. De plus, on dira que* $v(C)$ *est la valeur ou surplus maximal de la coalition* C*.*

Définition 2.2

Un jeu coalitionnel est dit super-additif si $\forall C, C'$ *tels que* $C \cap C' = \varnothing$,

$$v(C \cup C') \geqslant v(C) + v(C')$$

Définition 2.3

Soit (N, v) un jeu coalitionnel. On appelle allocation réalisable, tout vecteur $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $x(N) \leqslant v(N)$ avec $x(N) = \sum_{i=1}^{N} x^i$.

Définition 2.4

On appelle cœur d'un jeu coalitionnel $\Gamma = (N, v)$, l'ensemble des allocations réalisables $x \in \mathbb{R}^N$ pour lesquelles il n'existe pas de couple (C, y) où $C \subset N$ est une coalition, y une allocation telle que $y(C) \leqslant v(C)$ et $y^i > x^i$ pout tout $i \in C$. On notera $core(\Gamma)$

Remarque 7. *Cela signifie qu'il n'existe pas de déviation unilatérale d'une coalition strictement profitable pour tous les joueurs de la coalition.*

2.2 Description du marché de l'immobilier considéré

On se place sur un marché dans lequel les biens sont indivisibles à savoir celui de l'immobilier (mais on aurait pu se ramener au marché automobile, par exemple). Il est donc constitué de :

— m propriétaires cherchant à vendre leur maison.
L'ensemble des vendeurs est noté M.

— n investissuers cherchent à acheter une maison.
L'ensemble des acheteurs est noté N.

On fait l'hypothèse supplémentaire que chaque acheteur ne peut acheter qu'un bien et chaque vendeur ne peut vendre qu'une maison (la sienne !). De cette manière nous sommes bien dans une forme de modèle '1 to 1'.

On suppose que chaque vendeur évalue sa maison à un prix d'utilité et non à un prix de marché. Ainsi, le i-ième vendeur évalue sa maison à c_i €. De leur côté, les acheteurs évaluent l'utilité des maisons à vendre. Ainsi, le j-ième acheteur évalue la i-ième maison à h_{ij} €.

Exemple 3. *Plaçons-nous dans une situation où il y a* 2 *vendeurs et* 3 *acheteurs. On peut résumer leurs utilités de la manière suivante (l'unité étant la centaine de milliers d'euros) :*

$$c = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 9 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

c est donc un vecteur colonne représentant l'utilité des vendeurs et H la matrice représentant l'utilité des acheteurs.

Si $h_{ij} > c_i$ alors une transaction est possible entre le vendeur i et l'acheteur j. Dans le cas où ces deux agents font affaire ensemble il existe un prix p_i vérifiant $p_i \in]c_i, h_{ij}[$. L'acheteur aurait un gain d'utilité égal à $h_{ij} - p_i$ alors que le gain d'utilité du vendeur serait de $p_i - c_i$. Si $h_{ij} = c_i$, alors une transaction reste possible mais alors $p_i = h_{ij} = c_i$, le gain d'utilité est donc nul pour l'acheteur et le vendeur. Enfin, si $h_{ij} < c_i$, il n'y a pas de transaction possible. Ceci nous amène à définir la matrice dite de surplus A telle que :

$$\forall i \in [\![1; m]\!],\ \forall j \in [\![1; n]\!], \quad a_{ij} = max(0, h_{ij} - c_i,)$$

Comme dans tout autre problème d'appariement, le but est de former des appariements vendeurs-acheteurs optimaux.

Définition 2.5

Un appariement vendeurs-acheteurs est dit optimal lorsque le bénéfice ou surplus total est maximal.

Exemple 4. *Si on considère les données de l'exemple précédent, on a la matrice de surplus suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

De ce cas, le surplus maximal est de 7. Les cercles indiquent l'appariement optimal. Finalement, le vendeur 1 est associé à l'acheteur 2, le vendeur 2 à l'acheteur 3. L'acheteur 1 n'acquiert donc pas de bien.

2.3 Résolution du jeu coalitionnel correspondant

Etant donnée la description du marché faite dans la section précédente. On peut former le jeu coalitionnel $\Gamma = (M \cup N, v)$. On définira la fonction caractéristique de la manière suivante :

$$\forall C \subset M \cup N,\ v(C) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad C \subset M \ ou \ C \subset N \\ a_{ij} & \text{si} \quad C = \{i, j\} \ avec \ i \in M \ et \ j \in N \\ * & \text{sinon} \end{cases}$$

$*$ est le maximum pris sur toutes les combinaisons possibles de 2k joueurs distincts tels que : $i_1, ..., i_k \in C \cap M$ et $j_1, ..., j_k \in C \cap N$ et $k = min(|C \cap M|, |C \cap N|)$
$* = max[a_{i_1 j_1} + a_{i_2 j_2} + ... + a_{i_k j_k}]$

Remarque 8. *Il est clair que cette fonction caractéristique est super-additive grâce au max.*

En plus des appariements optimaux, nous chercherons à caractériser le cœur de ce jeux et à trouver les prix correspondant à chaque vente.

2.3.1 Valeur du jeu et appariements optimaux

Afin de déterminer la valeur du jeu, $v(M \cup N)$, on introduit le programme linéaire relaxé suivant pour ensuite montrer qu'il existe une solution entière, donc une solution au problème initial :

Programme primal (P) :

$$\max[\sum_{\substack{i\in M\\ j\in N}} x_{ij}a_{ij}]$$
$$s.c. \sum_{i\in M} x_{ij} \leqslant 1 \quad \forall j \in N$$
$$\sum_{j\in N} x_{ij} \leqslant 1 \quad \forall i \in M$$
$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall i \in M, \quad \forall j \in N$$

On interprétera x_{ij} comme la fraction de la i-ème maison achetée par le j-ième joueur. Les contraintes assurent que les acheteurs achètent au plus 1 maison et que les vendeurs vendent au plus 1 maison.

D'après la méthode du simplexe introduite par Dantzig [3] (que l'on ne prouvera pas car cela sort du cadre de ce mémoire pour entrer dans celui de la programmation linéaire), ce problème a une solution pour laquelle les x_{ij} valent soit 0 soit 1. Cette solution est alors, par définition, la valeur du jeu.

La résolution de ce problème permet aussi de trouver les appariements optimaux. En effet, si $x \in \mathbb{R}^{MN}$ est une solution de (P) et $x_{ij} = 1$ alors le vendeur i et l'acheteur j font affaire. Autrement, si $x_{ij} = 0$, ils ne font pas affaire.

2.3.2 Cœur du jeu

Le programme linéaire précédent peut se réécrire de la manière suivante :

$$\max_{x\in\mathbb{R}^{MN}}[F(x) = x^T a] \quad s.c. \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0$$

où $x, a \in \mathbb{R}^{MN}$, A une matrice $(M + N) \times MN$ et $b \in \mathbb{R}^{M+N}$. Si on explicite :
$x = (x_{11}, ..., x_{m1}, x_{12}, ..., x_{m2}, ..., x_{1j}, ..., x_{mj}, ..., x_{1n}, ..., x_{mn})^T$,
$a = (a_{11}, ..., a_{m1}, a_{12}, ..., a_{m2}, ..., a_{1j}, ..., a_{mj}, ..., a_{1n}, ..., a_{mn})^T$,
A est constituée de 0 et de 1.
$b = (1, 1, 1, ...1)^T$

Définition 2.6

Soit la matrice A de taille $m \times n$, a un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On considère le programme primal suivant :

$$\max_{x\in\mathbb{R}^{n}}[F(x) = x^T a] \quad s.c. \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0$$

Le programme dual associé est :

$$\min_{y\in\mathbb{R}^{m}}[G(y) = b^T y] \quad s.c. \quad A^T y \geqslant a, \quad y \geqslant 0$$

En utilisant la définition précédente, on définit donc le problème dual suivant :

$$\min_{y\in\mathbb{R}^{M+M}} [G(y) = b^T y] \quad s.c. \quad A^T y \geqslant a, \quad y \geqslant 0$$

où $a \in \mathbb{R}^{MN}$, A une matrice $(M+N) \times MN$ et $y, b \in \mathbb{R}^{M+N}$.

En posant, $y = (u, w)$ avec $u \in \mathbb{R}^M$, $v \in \mathbb{R}^N$, on obtient finalement le problème suivant :

Programme dual (D) :

$$\begin{array}{rll} & min[\sum_{i\in M} u_i + \sum_{j\in N} w_j] & \\ s.c. & u_i + w_j \geqslant a_{ij} & \forall i \in M, \quad \forall j \in N \\ & u_i \geqslant 0 & \forall i \in M \\ & w_j \geqslant 0 & \forall j \in N \end{array}$$

On notera bien que $\forall i \in [\![1; m]\!]$, u_i représente le gain d'utilité du i-ème vendeur et $\forall j \in [\![1; n]\!]$, w_j représente le gain d'utilité du j-ème acheteur.

Théoreme 2.1

Le cœur du jeu est l'ensemble des solutions au problème dual précédent.

Démonstration. :

$\Rightarrow$ Soient $(i_1, ..., i_k) \in M$ et $(j_1, ..., j_k) \in N$ et $k = min(|M|, |N|)$ définissant un appariement optimal. Si $y = (u_1, ..., u_m, w_1, ...w_n) \in \text{core}(\Gamma)$ alors y vérifie conditions suivantes :

$$\begin{array}{lrl} (1) & \sum_{i\in M} u_i + \sum_{j\in N} w_j & = v(M \cup N) \\ (2) & u_i + w_j \geqslant a_{ij}, & \forall i \in M \quad \forall j \in N \\ (3) & u_{i_l} + w_{j_l} = a_{i_l j_l}, & \forall l \in [\![1; k]\!] \\ (4) & u_i \geqslant 0, & \forall i \in M \\ (5) & w_j \geqslant 0, & \forall j \in N \end{array}$$

La première condition provient du théorème de dualité forte énoncé ci-dessous (encore une fois, il s'agit d'un théorème de programmation linéaire que l'on ne prouvera pas). On se rappellera que la solution de (P) était $v(M \cup N)$

Théoreme 2.2

Si le primal et le dual admettent tous les deux une solution admissible (ie. respectant les contraintes), ils ont tous deux une solution optimale finie et la même valeur objectif optimale.

Pour la deuxième condition. Supposons que $\exists (i, j) \in M \times N, u_i + w_j < a_{ij}$. Alors la transaction entre i et j serait strictement profitable pour i et j. Ainsi, la coalition $C = \{i, j\}$ serait une déviation unilatérale contredisant la définition du cœur.

Pour montrer (3), raisonnons par l'absurde et supposons sans perte de généralité que : $u_{i_1} + w_{j_1} > a_{ij}$. Alors,

$$v(M \cup N) = \sum_{l=1}^{k} u_{i_l} + \sum_{l=1}^{k} w_{j_l} > \sum_{l=1}^{k} a_{i_l j_l} = v(M \cup N)$$

Les points (4) et (5) sont évidents car il n'y a pas d'utilité négative dans ce modèle.

Et enfin, si y vérifie les cinq conditions alors y est bien solution de (D).

$\Leftarrow$ Si y est solution de (D) alors les cinq conditions sont vérifiées. Reste à montrer que si (1), (2), (3), (4) et (5) sont vérifiées alors $y \in \text{core}(\Gamma)$. En effet, si on suppose par l'absurde que $y \notin \text{core}(\Gamma)$ il existe un appariement qui ne vérifie pas (1). □

Exemple 5. *Déterminons le cœur dans le cas de l'exemple précédent.*

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + w_1 + w_2 + w_3 = 7 \\ u_1 + w_1 \geqslant 0 \\ u_1 + w_2 = 4 \\ u_1 + w_3 \geqslant 0 \\ u_2 + w_1 \geqslant 1 \\ u_2 + w_2 \geqslant 2 \\ u_2 + w_3 = 3 \\ u_1 \geqslant 0 \\ u_2 \geqslant 0 \\ w_1 \geqslant 0 \\ w_2 \geqslant 0 \\ w_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

La résolution algébrique nous donne la solution suivante :

$$core(\Gamma) = \{(\alpha, \beta, 0, 4 - \alpha, 3 - \beta) \in \mathbb{R}^5 | 0 \leqslant \alpha \leqslant 3, 1 \leqslant \beta \leqslant 3\}$$

2.3.3 Détermination du prix

Pour toute allocation du cœur, on peut désormais calculer le prix de vente de chaque maison. Soient $(i_1, ..., i_k) \in M$ et $(j_1, ..., j_k) \in N$ définissant un appariement optimal. On a : $\forall l = 1, ..., k \quad p_{i_l} = c_{i_l} + u_{i_l} = h_{i l j_l} - w_{j_l}$

Exemple 6. *Prenons l'allocation* $(u_1, u_2, w_1, w_2, w_3) = (2, 1.5, 0, 2, 1.5)$. *Cette allocation est bien dans le cœur. Elle est aussi "équitable", dans la mesure où l'acheteur et le vendeur qui font affaire reçoivent la même utilité. Dans ce cas, le prix de la maison 1 est donc fixé à 1 200 000€et celui de la maison 2 à 850 000€.*

Conclusion

Bien sûr, nous n'avons traité que partiellement ces problèmes dont l'étude peut être élargie. Il est, par exemple, possible de considérer le problème des mariages dans une société ne distinguant pas les deux cotés du marché. Il s'agit du problème dit de collocations ('room mates problem') décrit dans un article d'Irving [4]. Dans les problèmes d'appariement avec transfert d'utilité, on aurait aussi pu s'intéresser à la structure géométrique du cœur. Ainsi, les prolongements de ce mémoire sont multiples.

Néanmoins, on s'accordera à dire que les problèmes comme nous les avons étudiés illustrent des situations relativement concrètes et réalistes. Le cadre qu'offre la théorie des jeux, nous a permis de les modéliser et de les résoudre avec plus ou moins de facilités. D'ailleurs, la première partie, ne fait pas appel à des connaissances mathématiques complexes. Gale et Shapley le soulignent très justement à la fin de leur article. Et à la question de savoir ce que sont réellement les mathématiques, ils répondent alors de la sorte : "any argumemt which is carried out with sufficient precision is mathematical and the reason that your friends and ours cannot understand mathematics is not because they have no head for figures, but because they are unable to achieve the degree of concentration required to follow a moderately involved sequence of inferences." Précision et concentration sont donc, à leurs yeux, les maîtres mots de la pratique des mathématiques.

Références

[1] David GALE and Lloyd SHAPLEY.*College Admissions and the Stability of Marriage.* The American Mathematical Monthly, Vol. 69, No. 1, pp. 9-15 , 1962.

[2] Lloyd SHAPLEY and Martin SHUBIK.*The assignment game I : The core.* International Journal of Game theory, Vol. 1, Issue 1, pp. 111-130, 1971.

[3] George DANTZIG.*Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, Princeton, 1963.

[4] Robert IRVING.*An efficient algorithm for the "stable roommates" problem.*Journal of Algorithms, Vol. 6, Issue 4,pp. 577-595, 1985.