

# Comprendre les équations de diffusion et de réaction/diffusion

Laure Navarro

May 2018

## Introduction

Au cours de cette troisième et dernière année de licence de mathématiques au sein du Cycle Pluridisciplinaire, je présente dans ce mémoire les recherches effectuées dans le cadre du cours d'introduction à la recherche que nous avons reçu. Ce papier synthétise la connaissance acquise par l'entreprise de recherche, à la fois autonome et supervisée par un enseignant chercheur. Le de stage que j'ai choisi fut encadré par Emeric Bouin, chercheur en mathématiques dont le travail se penche sur l'étude d'équations différentielles partielles et leur application à la modélisation en physique et biologie.

La question biologique étudiée porte sur la propagation d'un trait phénotypique que l'on peut quantifier et qui évolue dans le temps et dans l'espace. Nous verrons en effet l'étude d'EDP décrivant une invasion en milieu stable notamment l'équation de la chaleur et l'équation de Fisher KPP.

La première, connue en physique sous le nom d'équation de diffusion, fut introduite par Joseph Fourier pour décrire des phénomènes de propagation de chaleur et d'évolution de la température. Joseph Fourier cherchait alors à déterminer la valeur de la température dans un milieu homogène, à partir d'une distribution initiale donnée sur la température dans le temps et l'espace. Les lois de thermodynamique établies à l'époque l'amènent à postuler l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u = \alpha \Delta u \\ u(0, x, y, z) = u_0(x, y, z) \end{cases} \quad (1)$$

Avec  $\Delta = \partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u + \partial_{zz}^2 u$  opérateur Laplacien,  $u_0$  condition initiale donnée, et  $\alpha$  appelé coefficient de diffusion thermique. A l'aide de sa théorie des séries et transformations, Fourier apporte une solution exacte à ce problème. Par la suite cette équation permettra de modéliser la dispersion d'une certaine quantité de matière de soluté dans une solution.

La deuxième équation est l'équation de Fisher-KPP (pour Kolmogorov-Petrovski-Piskunov). Elle fut introduite en 1937 par le biologiste Fisher pour décrire la propagation de gènes favorables dans une population ([1]). Les mathématiciens Kolmogorov, Petrovski et Piskunov ([2]) s'y intéressèrent aussi la

même année pour étudier la vitesse des flammes dans des problèmes de combustion. Cette équation présente un terme de source/saturation, à la différence de la précédente, où la quantité de matière est constante et se déplace par diffusion. L'équation de Fisher-KPP, elle, se présente comme une extension non-homogène de l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t v = \alpha \Delta v + f(v) \\ v(0, x, y, z) = v_0(x, y, z) \end{cases} \quad (2)$$

où  $f$  est ici une fonction dite de Fisher, constituant le terme non-homogène. Elle possède donc les propriétés mathématiques nécessaires à sa fonction de source/saturation.

L'étude que j'ai menée durant ce stage de recherche a donc porté sur deux équations, proches de l'équation de transport classique et de l'équation d'onde. Chacune de ces équations induit un changement dans le temps et l'espace de notre quantité d'intérêt. Il est ainsi possible de définir un "mouvement", et de là, M. Bouin m'a orienté vers l'étude de la détermination de la vitesse de propagation de solutions progressives de l'équation de Fisher-KPP. Pour soulever cette question il fallut d'abord comprendre les différents termes présents. Ensuite il fallut voir comment obtenir des solutions présentant un front de propagation, solutions pertinentes dans l'étude des systèmes biologiques.

La synthèse apportée par ce mémoire se décomposera en trois parties. Une première partie présentera une méthode de détermination de solutions de l'équation de la chaleur. Par la suite, nous verrons une manière approchée de montrer l'existence de solutions à front de propagation, et nous verrons un moyen de définir la vitesse de propagation limite de ces solutions. Afin de déterminer la vitesse limite des solutions, nous verrons une méthode d'encadrement de la solution par deux solutions dont la vitesse est proche d'une valeur de la vitesse conjecturée.

## 1 Equation de diffusion : méthode de résolution

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles sur une fonction scalaire  $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se présentant sous cette forme :

$$\begin{cases} \partial_t u = \alpha \Delta u \\ u(0, x, y, z) = u_0(x, y, z) \end{cases}$$

Le coefficient  $\alpha$ , nécessaire en physique pour des raisons d'homogénéité, ne sera pas mentionné dans les prochains calculs.  $u_0$  est une condition initiale fonctionnelle sur l'espace, qui nous donne une distribution du scalaire  $u$  au temps 0. Nous verrons que cette condition initiale est très déterminante quant au comportement des solutions.

Grâce à des calculs de transformées de Fourier, nous verrons que l'équation peut se réécrire sous la forme d'une équation différentielle sur le temps, linéaire

du premier ordre à coefficients constants, ce qui simplifie grandement sa résolution. Nous verrons ensuite, après avoir justifié son utilisation, que nous pouvons procéder à la transformée de Fourier inverse de la solution obtenue, pour en déduire une solution de l'équation de la chaleur. Nous justifierons également l'unicité d'une telle solution à la fin de cette partie.

## 1.1 Transformée de Fourier de l'équation

Une telle équation peut se résoudre différemment selon si elle est étudiée en 1D, en régime stationnaire (où l'on cherche une solution de la forme  $u(t, x, y, z) = f(t)g(x, y, z)$ ) ou instationnaire. La méthode que nous nous proposons de donner ici ne fait pas de supposition sur la stationnarité de la solution. En revanche elle nécessite que la fonction recherchée, à temps  $t$  quelconque,  $u(t, \cdot)$ , que l'on notera  $u_t$ , soit dans  $L^1(\mathbb{R})$  ce qui nous assure immédiatement que sa transformée de Fourier existe. Nous supposons également que  $u'_t, u''_t, \partial_t u$ , et  $\widehat{u}_t$ , sa transformée de Fourier, sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ , et faisons l'hypothèse de continuité de  $u_0$ . Pour simplifier les calculs, nous nous placerons en 1D.

Cette partie consistera à montrer que si  $u$  est une solution de l'équation (1), elle vérifie :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\widehat{u}(t, \omega) + |\omega|^2\widehat{u}(t, \omega) = 0 \\ \widehat{u}(0, \omega) = \widehat{u}_0(\omega) \end{cases} \quad (3)$$

Tout d'abord, nous allons montrer un premier résultat :

**Proposition 1 1.1** *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable, deux fois dérivable, et de dérivées premières et secondes dans  $L^1(\mathbb{R})$ . On a l'égalité :*

$$\widehat{f''} = -\omega^2\widehat{f} \quad (4)$$

*Preuve :* Tout d'abord, l'appartenance à  $L^1$  garantit l'existence des transformées de Fourier.

Ensuite, soient  $M_1, M_2$  deux réels. Par intégrations par partie successives :

$$\begin{aligned} \int_{M_1}^{M_2} e^{-ix\omega} f''(x) dx &= [e^{-ix\omega} f'(x)]_{M_1}^{M_2} + i\omega \int_{M_1}^{M_2} e^{-ix\omega} f'(x) dx \\ &= [e^{-ix\omega} f'(x)]_{M_1}^{M_2} + i\omega [e^{-ix\omega} f(x)]_{M_1}^{M_2} + (i\omega)^2 \int_{M_1}^{M_2} e^{-ix\omega} f(x) dx \end{aligned}$$

Les fonctions  $f'$  et  $f$  étant dérivables, sont continues, et sont intégrables. Ainsi, leur limite aux infinis est nulle. Donc par passage à la limite lorsque  $M_1 \rightarrow -\infty, M_2 \rightarrow +\infty$ , et par multiplication par  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  on obtient (3).

En remarquant que pour tout réel  $x, t$ , on a  $\omega, |e^{-ix\omega} \partial_t u(t, x) dx| \leq |\partial_t u(t, x)|$  avec  $u$  partout dérivable en  $t$ , et mesurable en  $x$  car  $L^1$ , voit que (si de plus on a

une domination sur la dérivée en  $t$ ) l'on peut utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale et ainsi,  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\omega} u(t, x) dx$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\omega} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\omega} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) dx \quad (5)$$

autrement dit que la TF de la dérivée par rapport à  $t$  de  $u$  correspond à la dérivée de la TF de  $u$ .

Passons à la transformée de l'équation 1. Par linéarité, on obtient :

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(t, \omega) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x^2}(t, \omega)$$

En utilisant pour le premier membre le résultat (4), et pour le deuxième membre le résultat (3), on obtient bien l'équation (2), dont les conditions initiales se trouvent trivialement.

On se ramène ainsi à une équation différentielle sur le temps, dont la solution est exactement :

$$\widehat{u}(t, \omega) = \widehat{u}_0(\omega) e^{-\omega^2 t}. \quad (6)$$

Comme annoncé dans l'introduction, on voit que la transformée de Fourier de la distribution spatiale initiale  $u_0$  apparaît.

## 1.2 Retour à la variable d'état

Nous avons alors obtenu une solution spectrale de notre inconnue fonctionnelle et désirons à présent en déduire par le calcul le signal exact dont elle provient. Des propriétés de la transformation de Fourier inverse vont nous être utiles dans ce paragraphe. Pour cela nous allons émettre plusieurs hypothèses sur les propriétés d'intégrabilité de la distribution initiale.

Tout d'abord, analysons l'expression (5). Nous voyons que la solution obtenue est le produit d'une transformée de Fourier et d'une exponentielle gaussienne. En nous rappelant que les fonctions gaussiennes restent gaussiennes par transformée de Fourier, nous obtenons donc un produit de transformée de Fourier, qui, selon certaines conditions, se trouve être la transformée d'un produit de convolution.

### Proposition 2 1.1 :

1) Pour  $\alpha$  réel strictement positif, en notant  $G_\alpha$  la gaussienne  $e^{-\alpha x^2}$ , on a :

$$\widehat{G}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} G_{\frac{1}{4\alpha}} \quad (7)$$

2) Si  $f$  est une fonction  $C_1(\mathbb{R})$  et  $L_2(\mathbb{R})$ , alors

$$f * G_\alpha = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{G}_\alpha) \quad pp. \quad (8)$$

où l'opérateur  $*$  :  $L^2 \times L^2 \rightarrow L^\infty$  est le produit de convolution, et  $\mathcal{F}^{-1} : L^2 \rightarrow L^2$  la bijection réciproque de l'automorphisme transformée de Fourier  $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$  définie par le théorème de Parseval-Plancherel.

En revenant à notre solution (5), et en supposant de plus que  $u_0$  est de carré intégrable, on peut alors appliquer la proposition précédente avec  $\alpha = \frac{1}{4t}$  et  $f = \sqrt{2\alpha} u_0$ , ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, u(t, x) &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u_0 \cdot \omega} \mapsto e^{-\omega^2 t})(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{u_0}}{\sqrt{4\pi t}} \widehat{G_{\frac{1}{4t}}}\right)(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} u_0 * G_{\frac{1}{4t}}(x) \end{aligned}$$

### 1.3 Noyau de la chaleur et solutions

Il n'est pas immédiat de voir que cette fonction est bien une solution. Pour le voir il faut organiser autrement les termes en jeu, et raisonner sur les fonctions qui composent cette nouvelle forme. Ainsi, nous pouvons voir que la fonction trouvée et exprimée ci-dessus peut aussi s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(t, x) = u_0 * h_t(x) \quad (9)$$

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, h_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$h_t$  est une fonction importante, car elle constitue le noyau de cette équation, c'est-à-dire que pour une distribution initiale des plus simples, par exemple une indicatrice d'intervalle réel fini, la solution sera en  $h_t$ . Nous ne mentionnerons pas les propriétés nécessaires pour montrer que la fonction précédente est bien solution de l'équation de la chaleur.

Il est cependant important de noter, bien que la preuve n'en sera pas faite, que pour une fonction  $u_0$  donnée, la solution est unique.

Dans ce qui précède nous avons fait des hypothèses sur l'intégrabilité des fonctions en jeu de sorte à pouvoir manipuler leur transformée de Fourier, et autre. Ces hypothèses, n'étant nécessaires que pour la preuve de la forme de la solution, peuvent se contourner. Prenons  $u_0(x) = \mathbb{1}_{x \leq 0}$ , fonction que l'on retrouvera dans le prochain paragraphe. Notons que cette fonction n'est pas  $L^1$ . En revanche,  $u_0 * h_t(t, x)$  est bien défini, car  $u_0$  est dans  $L^\infty$ . Il est possible de montrer que  $u(t, x) = u_0 * h_t(t, x)$  est bien une solution de la chaleur malgré les hypothèses d'intégrabilité manquantes sur  $u_0$ . Ainsi nous aurons que l'unique solution à l'équation de condition initiale  $u_0(x) = \mathbb{1}_{x \leq 0}$  est :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x-y \leq 0} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{4t}} dy \end{aligned}$$

Notons que dès lors que  $t > 0$ , la fonction est non-nulle partout, bien qu'à condition initiale elle soit nulle sur une moitié de l'espace. Ainsi une solution de l'équation de la chaleur implique dès le premier temps à se répandre partout dans l'espace. Cette dernière observation nous sera utile pour la suite.

## 2 La réaction/diffusion : Equation de Fisher-KPP

L'équation de la chaleur ne supposait qu'un terme de diffusion. Dans les modélisations nombreuses qui sont faites pour une condition initiale en dirac, nous observons le fait qu'aucune quantité n'est ajoutée à la quantité initiale, seule la concentration de matière change localement. En revanche, l'équation de Fisher comprend un terme supplémentaire de variation de la quantité de matière. Rappelons de nouveau la forme de l'équation en 1 dimension sur l'espace :

$$\begin{cases} \partial_t v = \partial_{xx}^2 v + f(v) \\ v(0, x) = v_0(x) \\ f \text{ fonction de Fisher - KPP} \end{cases} \quad (10)$$

La fonction  $f$ , dite de Fisher-KPP est une fonction et dérivable sur  $\mathbb{R}$  possédant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0 \\ f'(1) < 0 < f'(0) \\ 0 < f(v) < f'(v)u, 0 < v < 1 \end{cases} \quad (11)$$

Pour plus de simplification nous pouvons supposer que  $f'(1) = -1$ ,  $f'(0) = 1$ .

On voit ainsi que proche des endroits où  $v(t, x)$  est nul, la fonction  $f(v(t, x))$  croît, dépassant strictement 0 et induisant immédiatement une contribution à la croissance de  $v$  dans le temps, donc un apport en quantité de matière. On appelle alors ce phénomène une "source": la matière, provenant d'un point où la dérivée par rapport au temps est plus grande qu'ailleurs, y est créée comme par une source.

Cette matière se propage ensuite de proche en proche par le phénomène de diffusion.

Aux endroits où  $v(t, x)$  se rapprochera de 1 dans le temps et l'espace, l'effet sera inverse par diminution du terme  $f(v)$  au voisinage de 1. La croissance de  $v(t, x)$  ralentira ce qui crée ainsi une saturation : plus la quantité de matière s'agglutine en un  $x$  fixé, se rapprochant quantitativement de 1, moins la source  $y$  transmettra de la matière.

Ainsi nous pouvons d'emblée prévoir qu'aux endroits où matière est absente ( $v = 0$ ) la source contribuera à en apporter, et aux endroits où la matière se concentre de trop ( $v$  proche de 1), elle ne s'y ajoutera pas davantage. Ceci nous garantit pour la suite que  $[0, 1]$  est stable par l'équation : toute fonction dont la condition initiale prend ses valeurs dans  $[0, 1]$  prendra à l'avenir toutes ses valeurs dans cette intervalle. Je n'ai présenté ici qu'une heuristique du phénomène, mais ce résultat est bien connu dans la littérature. Aussi pouvons nous le trouver sous le nom de principe du maximum ([5], [7], [8], [10]).

Nous disposons donc de résultats analytiques quant au comportement de la fonction. Cependant, le terme non-homogène rend plus difficile l'étude de cette équation. Il n'existe donc pas de méthode appropriée pour trouver des solutions générales. En revanche, en équation différentielle, il est possible de postuler l'existence de certaines formes de solutions de sortes à modifier l'équation et retomber sur une équation différentielle ordinaire. Nous verrons ainsi dans cette partie comment montrer l'existence de solutions progressives à front de propagation selon certaines conditions sur la vitesse. Nous verrons alors une approche de la linéarisation en EDP.

Nous nous intéresserons au calcul de la vitesse limite. Pour ce faire nous verrons une méthode d'encadrement intéressante, car pouvant faire écho à des éléments importants vus en cours d'EDO de licence, et pouvant être élargi au domaine des EDP.

## 2.1 Existence de solutions progressives non-oscillantes de type front de propagation

Nous cherchons donc des solutions progressives à front de propagation. Il s'agit de solutions positives décroissantes, donc ne présentant pas d'oscillation, et vérifiant :

$$\begin{cases} v(t, x) = w(x - ct), c > 0, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ w(y) \rightarrow 1, y \rightarrow -\infty \\ w(y) \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty \\ w(y) \in [0, 1], y \in \mathbb{R} \\ w'(y) < 0, y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (12)$$

Nous voyons que l'argument en  $x - ct$  correspond bien à une propagation. En effet, pour une valeur  $w(a)$  prise par  $w$ , nous voyons que sur la droite  $x = a + ct$ ,  $v(t, x) = w(a)$ . Ainsi lorsque le temps croît sur cette droite, la valeur  $w(a)$  se déplace vers les  $x$  croissants, ce qui correspond donc bien à une propagation car valable pour n'importe quelle valeur prise par  $w$ .

Par ailleurs, par les hypothèses, nous cherchons alors des fonctions qui saturent à 1, décroissantes selon  $x$  à  $t$  fixé, croissantes selon  $t$  à  $x$  fixé. Notons que la fonction  $f$  modélise bien le rôle d'une invasion : si  $y = x - ct$ , on a bien qu'au temps long la quantité  $v$  atteint saturation presque partout (voir Fig.1 Annexe)

Afin de trouver une solution progressive, c'est-à-dire ayant pour argument  $y = x - ct$ , procédons au changement de variable en supposant que la solution  $v(t, x)$  de l'équation (10) satisfait  $v(t, x) = w(x - ct)$ . On obtient alors :

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) = -cw'(x - ct) \\ \partial_{xx}^2 v(t, x) = w''(x - ct) \\ w''(x - ct) + cw(x - ct) + f(w(x - ct)) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

On retombe ici sur une équation différentielle ordinaire d'ordre 2, non-linéaire, que nous ne savons pas résoudre immédiatement. Néanmoins, nous connaissons des théorèmes importants quant à l'unicité des solutions d'EDO

d'ordre  $n$ , et les propriétés concernant les équations autonomes. Il est donc possible ici de parler d'équilibre de la même manière que dans l'étude d'une EDO autonome, et ainsi, les points d'annulation du terme non-linéaire que nous avons ici constitue des points d'équilibre, c'est-à-dire des points tels que si l'on y place notre fonction à l'instant initiale, celle-ci y reste aux temps suivants.

Nous savons que le terme non-linéaire s'annule en  $w = 0$  et  $w = 1$ . Notre équation possède donc deux équilibres à ces points-ci. Nous pouvons alors procéder à la linéarisation de l'équation autour de ces points. Par les conditions imposées sur  $f$  en (11), nous avons les développements de Taylor de l'ordre 1 respectivement autour de 0 et 1 :

$$\begin{cases} f(u) = u + o(u) \\ f(u) = -u + o(u) \end{cases}$$

Ainsi l'équation, autour de  $w = 0$  et  $w = 1$ , respectivement s'écrit:

$$\begin{cases} w'' + cw' + w = 0 \\ w'' + cw' - w = 0 \end{cases}$$

Nous cherchons ici des solutions non-oscillantes, réelles, décroissantes, positives, ce qui dans les équations caractéristiques des équations linéarisées correspond à un déterminant positif ou nul. Ces deux équations s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} \lambda^2 + c\lambda + 1 = 0 \\ \lambda^2 + c\lambda - 1 = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation caractéristique possède un déterminant toujours positif, pour  $c$  réel (Voir Fig. 2 et 3 Annexe). Par conséquent celle-ci indiquera toujours des solutions réelles et non-oscillantes à l'équation différentielle dont elle provient. En revanche, dans le cas de la première équation, nous voyons que les solutions n'oscillent pas uniquement dans le cas où  $c^2 - 4 > 0$  autrement dit, si  $c \geq 2$ .

En effet, si  $c < 2$ , les solutions à l'équation caractéristique linéarisée autour de 0 seront complexes conjuguées  $\lambda_{12} = -\frac{c}{2}(1 \pm i\sqrt{1 - (\frac{c}{2})^2}) = \lambda^R \pm i\lambda^I$ . la solution approchée serait de la forme :

$$\tilde{w}(y) = e^{\lambda^R y}(A \cos(\lambda^I y) + C)$$

La solution ne serait donc plus décroissante et ne représenterait plus une fonction à front de propagation telle que nous l'avons définie plus haut, en (12).

Dans le cas où  $c \geq 2$ , l'équation caractéristique au point  $w = 0$  possèdera deux racines réelles  $\lambda_{12}^0 = -\frac{c}{2}(1 \pm \sqrt{(\frac{c}{2})^2 - 1})$ . Au point  $w = 1$  ces deux racines sont  $\lambda_{12}^1 = -\frac{c}{2}(1 \pm \sqrt{(\frac{c}{2})^2 + 1})$ .

Ainsi, en  $w = 0$  les solutions seront de la forme  $A_0 e^{r_1^0 y} + B_0 e^{r_2^0 y}$ , avec  $r_{12}^0$  toutes deux négatives. En choisissant proprement les valeurs de  $A_0$  et  $B_0$  nous



pouvons obtenir des solutions décroissantes comprises entre 0 et 1, et satisfaisant aux conditions limites-. Le procédé est à peu près le même pour  $w = 1$ .

De cette étude nous pouvons conclure qu'une condition nécessaire pour obtenir une solution de la forme souhaitée est que sa vitesse  $c$  soit supérieure à 2.

Pour que cette solution soit infirmée comme suffisante, nous pouvons nous en remettre à l'étude des plans de phase, expliquée dans l'article original de Kolmogorov, Petrovski et Piskunov ([2]). Ceux-ci, après un changement de variable dans l'espace des phases, raisonnent sur la stabilité ou l'instabilité des points d'équilibre, et montrent que la solution précédente est une preuve de l'existence de solution non-oscillante pour une vitesse  $c \geq 2$ . Dans les paragraphes suivants nous construirons la preuve d'un résultat sur la vitesse de la solution de condition initiale  $\mathbb{1}_{x \leq 0}$  par encadrement. Nous aurons besoin, pour simplifier les calculs, d'imposer une forme à  $f$  fonction de Fisher-KPP et lui avons donné sa forme la plus simple :  $f(u) = u(1 - u)$ . Nous pouvons vérifier que  $f$  vérifie bien toutes les propriétés d'une fonction de Fisher-KPP données en (11), et pouvons donc à présent passer à la preuve de la conjecture.

## 2.2 Théorème de comparaison en et équation de Fisher-KPP

Après avoir pu déduire l'existence de solutions d'argument  $x - ct$  à front se propageant à vitesse  $c \geq 2$ , d'argument nous voulons maintenant montrer que la valeur de la vitesse d'une solution, à condition initiale à support compact, est de 2. Ce résultat était au départ une conjecture, puis fut étudiée dans la littérature scientifique et plusieurs fois montrée. Nous en proposons ici une preuve par le principe de comparaison dans le cas d'une EDP, qui nous sera très utile pour montrer la conjecture précédente, ce qui sera fait dans le prochain paragraphe. Nous pouvons retrouver ce théorème [7], [8], et une forme légèrement différente dans l'article de Aronson et Weinberger [3].

### **Théorème 2 2.1 (Principe de comparaison)**

Soit  $f$  de Fisher-KPP.

Soit  $\bar{v}$  et  $\underline{v}$  deux fonctions  $(\mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1], C_2^1(\mathbb{R})^2)$ , c'est à dire  $C^1$  par rapport à la première variable et  $C^2$  par rapport à la deuxième, telle que :

$$\begin{cases} \partial_t \bar{v} > \partial_{xx}^2 \bar{v} + f(\underline{v}) \\ \partial_t \underline{v} < \partial_{xx}^2 \underline{v} + f(\bar{v}) \\ \underline{v}(0, x) \leq \bar{v}(0, x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Alors,  $\forall t > 0$ ,  $\underline{v}(t, x) \leq \bar{v}(t, x)$ . En particulier, si  $v$  est solution du problème (10), et que  $\underline{v}(0, x) \leq v_0(x) \leq \bar{v}(0, x) \forall x \in \mathbb{R}_+$ , alors

$$\underline{v}(t, x) \leq v(t, x) \leq \bar{v}(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

*Preuve* : Nous donnerons ici une preuve très intuitive de ce principe de comparaison.

Supposons par absurde qu'il existe  $t_0 = \inf\{t > 0, \exists x / \underline{v}(t, x) = \bar{v}(t, x)\}$ . Notons  $x_0 = \inf\{x, \underline{v}(t_0, x) = \bar{v}(t_0, x)\}$ .  $(t_0, x_0)$  est donc le premier point non-nul tel que les deux fonctions se touchent. Par le fait que  $\underline{v}$  et  $\bar{v}$  soient  $C^1$  par rapport à  $t$ , comme  $\underline{v}(0, x_0) \leq \bar{v}(0, x_0)$ , il existe un voisinage à droite de  $t_0$  tel que sur ce voisinage,  $(\bar{v} - \underline{v})(\cdot, x_0)$  diminue. Ainsi sur ce voisinage,  $\partial_t(\bar{v} - \underline{v})(\cdot, x_0) < 0$ .

De ceci, et des hypothèses, nous en déduisons :

$$\partial_{xx}^2 \bar{v}(t_0, x_0) + f(\bar{v}(t_0, x_0)) < \partial_{xx}^2 \underline{v}(t_0, x_0) + f(\underline{v}(t_0, x_0))$$

Puis par égalité de  $f(\bar{v}(t_0, x_0))$  et  $f(\underline{v}(t_0, x_0))$  nous obtenons :

$$\partial_{xx}^2 (\bar{v} - \underline{v})(x_0, t_0) < 0$$

Le reste de la preuve consiste à montrer que cette dernière inégalité est absurde, en montrant le fait que  $(\bar{v} - \underline{v})(t_0, \cdot)$  atteint un minimum en  $x = x_0$  :

Avant  $x_0$ , la fonction est nécessairement strictement positive car autrement  $(t_0, x_0)$  ne serait pas le "premier point" de l'espace-temps pour lequel les deux fonctions se touchent.

La fonction est nulle pour  $x = x_0$ .

Maintenant nous pouvons affirmer qu'elle sera de nouveau strictement positive après  $x_0$ , car en effet, si elle ne l'était pas, alors il existerait un  $x_1 > x_0$  tel que  $(\bar{v} - \underline{v})(t_0, x_1) < 0$ . Or comme  $(\bar{v} - \underline{v})(0, x_1) > 0$ , par le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait un  $t_1 < t_0$  tel que  $(\bar{v} - \underline{v})(t_1, x_1) = 0$ , ce qui est absurde par hypothèse. Ainsi après  $x_0$ , la différence des deux fonctions à  $t_0$  fixé est nécessairement positive à nouveau.

On a donc que  $x_0$  est un minimum local de la fonction  $((\bar{v} - \underline{v})(t_0, \cdot))$ , et que par conséquent, nous avons  $\partial_{xx}^2 (\bar{v} - \underline{v})(x_0, t_0) \geq 0$ , ce qui contredit l'inégalité précédente, et contredit enfin l'existence de  $t_0$

### 2.3 Encadrement de la solution et déduction de la vitesse limite égale à 2 pour une expression typique de f Fisher-KPP

Nous souhaitons maintenant encadrer une solution à condition initiale  $\mathbb{1}_{x \leq 0}$  et avec  $f(u) = u(1 - u)$ , à l'aide de ce théorème, pour montrer que la valeur de sa vitesse vaut 2. Tout d'abord, il nous faut donner une définition de vitesse limite d'une fonction:

**Définition (vitesse limite de propagation) 1** *On dit que  $u(t, x)$  se propage faiblement à vitesse  $c^*$  si et seulement si :*

$$\begin{cases} \inf_{x \leq ct} u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1, & c < c^* \\ \sup_{x \geq ct} u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, & c > c^* \end{cases}$$

Nous allons maintenant construire une sous-solution et une sur-solution au problème (10) de condition initiale  $v_0(x) = \mathbb{1}_{x \leq 0}$ , ayant toutes deux une vitesse limite arbitrairement proche de 2. Trivialement, par la définition précédente et l'encadrement de la solution par les deux fonctions précédentes, nous aurons que la vitesse limite de front de la solution au problème (10) ayant pour condition initiale  $v_0(x) = \mathbb{1}_{x \leq 0}$  sera située autour de 2 à  $\varepsilon > 0$  près,  $\varepsilon$  étant arbitrairement petit. Ceci conclura la preuve de notre conjecture ! Pour la suite, notons  $v(t, x)$  solution du problème (10) ayant pour condition initiale  $v_0(x) = \mathbb{1}_{x \leq 0}$

### Construction d'une sur-solution :

Prenons  $u(t, x)$  une solution de l'équation de la chaleur (1), avec pour condition initiale  $u_0(x) = \mathbb{1}_{x \leq 0}$ . Posons  $\bar{v}(t, x) = u(t, x)e^t$ .  $\bar{v}$  possède les mêmes propriétés de régularité que  $u$ , et  $\forall t > 0$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{v}(x, t) - \partial_{xx}^2 \bar{v}(x, t) &= e^t u(t, x) + e^t (\partial_{xx}^2 u(t, x) - \partial_t u(t, x)) \\ &= e^t u(t, x) \\ &= \bar{v}(t, x) \\ &\geq f(\bar{v}(t, x)) \end{aligned}$$

Le passage à la dernière ligne se justifie par les propriétés de  $f$  énoncées en (11). On voit que  $\bar{v}$  est donc sur-solution du problème (10), avec  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{v}(0, x) \geq v_0(x)$ . On peut donc appliquer le théorème de comparaison précédent, et en conclure que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^2, \bar{v}(t, x) \geq v(t, x) \quad (14)$$

Il est possible de montrer que  $\bar{v}(t, x)$  satisfait la définition de vitesse limite de front précédente pour une vitesse  $c^* = 2$ , ce qui ne sera pas fait ici. Une telle démonstration peut se trouver en [7], [8].

### Construction d'une sous-solution :

Soit  $\varepsilon > 0$ . La construction de la sous-solution se fera à l'aide des formes oscillantes déduites en 2.1. En effet, nous allons construire une sous-solution de vitesse limite  $c^* = 2 - \varepsilon$  à l'aide d'une solution au problème (10) avec  $= 2 - \varepsilon$ . Nous savons que pour un tel  $c$ , la solution ne présente pas de front mais présente des solutions oscillantes près du points d'équilibre 0. L'idée est de prendre une telle solution du problème linéarisé autour de 0, de la tronquer à sa première annulation et de la réduire de sorte à ce qu'elle corresponde à une sous-solution. Nous disposerons alors d'une fonction en forme de cloche, se déplaçant à vitesse  $2 - \varepsilon$ , toujours en dessous de notre solution  $v$  (Voir schéma de construction Fig. 4 Annexe).

Notons alors  $c_\varepsilon = 2 - \varepsilon$ . Alors l'équation caractéristique du système linéarisé au point d'équilibre 0 possède des solutions complexes :  $r_{12, \varepsilon} = -\frac{c_\varepsilon}{2} (1 \pm i \sqrt{1 - (\frac{c_\varepsilon}{2})^2}) = -(1 - \frac{\varepsilon}{2}) (1 \pm i \sqrt{1 - (1 - \frac{\varepsilon}{2})^2}) = r^R \pm ir^I$ . Les solutions sont alors oscillantes, et on peut les écrire  $s(y) = Ae^{r^R y + C} \cos(r^I y + C)$ , avec  $y = x - c_\varepsilon t$ . Dans le cas qui nous intéresse, n'ayant pas encore fixé de

condition initiale,  $C = \frac{\pi + r^I}{2}$ . De la sorte, on tronque la fonction à pour obtenir une fonction  $\underline{v}_\varepsilon(t, x) = s(x - c_\varepsilon t)$  telle que à  $t = 0$  :

$$\underline{v}_\varepsilon(0, x) = \begin{cases} s(x) & \forall x \in [-(\frac{1}{2} + \pi), -\frac{1}{2}] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Nous obtenons bien une fonction cloche se déplaçant à vitesse arbitrairement proche de 2. Par ailleurs, en choisissant bien  $A$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $s(y) < 1$ , la fonction précédente vérifie à l'instant initial :

$$\underline{v}_\varepsilon(0, x) < \mathbb{1}_{x \leq 0}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Dans cette partie, il nous reste à montrer que cette fonction satisfait bien l'inégalité propre à une sous-solution du problème (10). Précisément, il faut montrer que  $\partial_{xx}^2 \underline{v}_\varepsilon - \partial_t \underline{v}_\varepsilon - \underline{v}_\varepsilon - \underline{v}_\varepsilon^2 < 0$ . Il est possible d'obtenir ce résultat en écrivant d'abord  $s$  sous la forme  $s(y) = ARe \left[ e^{y(r^R + ir^I) + C} \right]$ . Puis, nous calculons les dérivées partielles successives. Après quelques manipulations de calcul ([7], [8]) nous tombons alors sur une équation du second degré qui nous donne le signe voulu de  $\partial_{xx}^2 \underline{v}_\varepsilon - \partial_t \underline{v}_\varepsilon - \underline{v}_\varepsilon - \underline{v}_\varepsilon^2$ .

Ainsi, nous montrons que  $\underline{v}_\varepsilon$  est une sous-solution de l'équation, et que par conséquent :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^2, \underline{v}_\varepsilon(t, x) \leq v(t, x). \quad (15)$$

Par ailleurs, étant une fonction progressive pouvant se mettre sous la forme  $\underline{v}_\varepsilon(t, x) = \omega_\varepsilon(x - c_\varepsilon t)$ , alors la vitesse limite de front de cette fonction est de  $c_\varepsilon = 2 - \varepsilon$ .

Par les encadrements (14) et (15), nous disposons maintenant d'un encadrement de la vitesse limite de front  $c^*$  de  $v$  telle que :  $2 - \varepsilon \leq c^* \leq 2$  pour  $\varepsilon$  arbitrairement petit. Ceci nous garantit alors que la vitesse asymptotique ou vitesse limite de la solution au problème (10) à condition initiale  $u_0(x) = \mathbb{1}_{x \leq 0}$  est bien de 2.

## Conclusions

A l'issue de cette étude, nous pouvons conclure plusieurs choses. D'une part, que l'étude de l'équation de la chaleur sollicite une analyse par transformation de Fourier, et donc impose des hypothèses sur l'intégrabilité ou non des hypothèses. A la suite du cours de Topologie dispensé en L3 mathématiques, comprenant une étude des espace  $L^p$ , il était donc intéressant de revenir dessus et d'en voir une application directe.

D'autre part, j'ai pu voir que la manipulation d'équations différentielles partielles nécessite plus de "précautions" que pour une équation différentielle ordinaire car nous ne disposons pas de toute l'information sur l'évolution de la fonction (notamment sur les différentielles du second ordre croisées). Pour l'étude d'une EDP il faut donc s'assurer que les théorèmes d'étude classiques s'appliquent. Il était intéressant ici de revenir sur le théorème de comparaison, vu en cours, et de l'appliquer dans le cas de l'EDP de Fisher-KPP.

Considérant la difficulté de compréhension de certains objets, et de certaines preuves, il était intéressant pour un étudiant de L3 de pouvoir néanmoins présenter une méthode de résolution d'un problème, bien que celle-ci ne possède pas la rigueur attendue d'un papier de recherche de qualité sur le sujet. J'ai ainsi pu voir comment résoudre une forme non-homogène de l'équation de diffusion, et observer que des questionnements, apparus en physique au XIX<sup>eme</sup> siècle puis par la suite en chimie, pouvaient tout à fait convenir à une étude biologique sur la sélection.

Il peut être important de mentionner que ce travail aurait pu être complété par une estimation numérique des solutions. Il existe en effet plusieurs manière de modéliser les solutions, notamment par méthodes des différences finies. Ceci aurait pu notamment nous fournir une estimation de la vitesse calculée au deuxième paragraphe.

## Bibliographie et références

### Articles

- [1] R. A. Fisher, *The Wave of Advance of Advantageous Genes*, Annals of Eugenics, v. 7: 355-369, 1937.
- [2] A. Kolmogorov, I. Petrovski, N. Piscounov, *Etudes de l'Equation de Diffusion avec Croissance de la Quantité de Matière*, Bulletin de l'Université d'Etat à Moscou, 1937.
- [3] D.G. Aronson, H.F. Weinberger, *Multidimensional Nonlinear Diffusion Arising in Population Genetics*, Advances in Mathematics, v.30: 33-76, 1978.
- [4] M.G. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions, *User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations*, Bulletin of the American Mathematical Society, v.27 :1-67, 1992.
- [5] A. Sánchez-Valdés, B. Hernández-Bermejo, *New Travelling Waves Solutions for the Fisher-KPP Equation with General Exponents*, Applied Mathematics Letters, vol. 18 : 1281-1285, 2005.

### Thèses et Mémoires

- [7] E. Bouin, *Propagation de Fronts Structurés en Biologie : Modélisation et Analyse Mathématique*, thèse doctorale, Université de Lyon, déc. 2014.
- [8] G. Peltier, *Front d'Invasion dans un Système d'équation réaction/diffusion*, mémoire de Master 1, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2016.

### Livres et cours

- [9] G. Allaire, F. Golse, *Transport et Diffusion*, cours de l'Ecole Polytechnique, ed. n°5, 2012.
- [10] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.