
Lorelei LANKESTER

Groupes de Lie et application aux opérateurs symplectiques

Mémoire d'initiation à la recherche

Dirigé par Jacques Féjoz



Cycle Pluridisciplinaire d'Etudes Supérieures

Paris Sciences et Lettres

Table des matières

1	Généralités sur la théorie des groupes de Lie	2
1.1	Groupes de Lie	2
1.2	Algèbres de Lie	3
1.3	Quelques exemples sur les groupes de matrices	8
2	Les opérateurs symplectiques	12
2.1	Problème physique	12
2.2	Une première résolution approchée : le schéma d'Euler	14
2.3	Symétrie hamiltonienne	16
2.4	Lien entre les opérateurs symplectiques et les groupes de Lie . . .	19

Introduction

La notion de symétrie est vaste et l'on peut en donner de nombreuses définitions. Mais toutes les visions que l'on peut avoir d'elle, de la plus élémentaire - vue en petite école - à la plus complexe - sur laquelle de brillants mathématiciens et physiciens se brisent encore les dents - sont d'une grande importance, en physique et en mathématiques.

La découverte des solides platoniciens, qui correspondent aux sous-groupes finis du groupe des rotations dans l'espace et qui sont décrits dans la dernière section des *Éléments* d'Euclide, marque probablement l'apothéose des mathématiques de l'Antiquité. Ces sous-groupes sont les symétries les plus profondes de l'époque.

Les groupes de Lie sont des groupes "continus", sur lesquels on peut faire du calcul différentiel (les exemples les plus importants et les plus simples étant les groupes de matrices). En particulier, l'espace tangent en l'identité joue un rôle fondamental et est muni d'une structure dite d'algèbre de Lie.

La découverte et la classification des groupes de Lie occupe la même place en mathématiques pour l'époque moderne que les sous-groupes finis du groupe des rotations dans l'Antiquité : les groupes de Lie sont les symétries les plus subtiles qui soient accessibles à la compréhension des mathématiques du 19e et du 20e siècle. Platon associait les cinq polyèdres réguliers aux quatre éléments (laissant le dodécaèdre comme un symbole du cosmos). Ce n'est pas une surprise si les lois physique des particules élémentaires sont actuellement formulées en termes des divers groupes de Lie simples : le groupe $U(1)$ agit sur la phase de l'électron-positron, $SU(2)$ sur le spin-isotopique du proton et du neutron, $SU(3)$ sur le triplet des couleurs du quark, etc

Dans ce court exposé, on essaiera tout d'abord d'introduire des groupes de transformations qui permettent de préserver des structures géométriques, les groupes de Lie.

On parlera ensuite des opérateurs symplectiques, en les introduisant par le problème des deux corps, avant de montrer que groupes de Lie et opérateurs symplectiques sont liés.

Mais tout d'abord, faisons un petit bilan de ce mémoire d'initiation à la recherche. Le sujet choisi par M.Féjoz était passionnant, mais souvent très complexe. Cette difficulté se ressentira peut-être dans certaines maladresses lors de la lecture du rapport. Si c'est le cas, je m'en excuse.

A travers ce stage, je souhaitais découvrir d'autres aspects des mathématiques, que l'on ne voit pas forcément en licence. Cela s'est avéré passionnant. Il a été très intéressant de constater, au fil de mes lectures, que les mathématiques et la physique théorique sont intrinsèquement liées, alors que je partais empli du préjugé contraire.

Je tiens à remercier M.Féjoz pour sa patience face à toutes mes questions et pour sa bienveillance incroyable. Il a été un parfait encadrant.

1 Généralités sur la théorie des groupes de Lie

1.1 Groupes de Lie

Avant de définir un groupe de Lie, il est nécessaire de rappeler quelques définitions fondamentales de géométrie différentielle. En effet, la théorie de Lie a été construite pour étudier certaines propriétés des équations différentielles. Cette théorie permet notamment d'étudier la symétrie en mathématiques, mais a aussi des applications en physique théorique, comme nous le verrons dans la seconde partie de cet exposé.

Définition 1.1. Un espace topologique H est un **espace de Hausdorff** lorsque deux points distincts admettent toujours des voisinages disjoints, i.e. $\forall (u, v) \in H$ il existe U, V des sous-espaces ouverts de X tels que $u \in U, v \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

On dit aussi que H est un espace séparé.

Définition 1.2. Que U_x soit **homéomorphe** à un ouvert de \mathbb{R}^n signifie qu'il existe un homéomorphisme $\phi_x : U_x \rightarrow \phi_x(U_x) \subset \mathbb{R}^n$, où $\phi(U_x)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n .

On dit alors que (U_x, ϕ_x) est une carte locale de M .

Une famille de cartes (U_i, ϕ_i) qui recouvre M constitue un **atlas** de la variété M .

Un atlas est de classe C^k si $\forall i, j$ tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ l'application de changement de cartes :

$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$
est un difféomorphisme de classe C^k .

Pour parler de variétés topologiques C^∞ on parlera de variétés lisses.

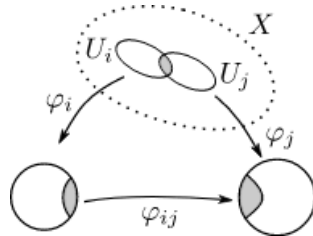


FIGURE 1 – Changement de cartes

Définition 1.3. Une **variété différentielle** est un espace topologique M tel que :

- M soit un espace de Hausdorff et soit à base dénombrable,
- tout point de M admette un voisinage homéomorphe à un ouvert inclus dans \mathbb{R}^n .

En particulier, un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie est une variété lisse (on peut choisir un atlas constitué de cartes toutes égales à l'identité).

Exemple – $G = GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$ muni de la structure C^∞ d'ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Après avoir posé ces définitions, nous pouvons désormais définir les groupes de Lie.

Définition 1.4. Un **groupe de Lie** est un ensemble G muni de deux structures compatibles :

- groupe : loi de composition $m : G \times G \rightarrow G(x, y) \mapsto m(x, y) = xy$. On notera i l'application de passage à l'inverse
- variété lisse (donnée par une classe d'équivalence d'atlas de classe C^∞)

Définition 1.5. Un sous-groupe de Lie H d'un groupe de Lie G est un sous-groupe qui est aussi une sous-variété.

Ainsi, l'injection $H \hookrightarrow G$ est un plongement de groupes de Lie.

Proposition 1.6. Tout sous-groupe de Lie est fermé.

1.2 Algèbres de Lie

Définition

Définition 1.7. Soit \mathbb{K} un corps commutatif. Une \mathbb{K} -**algèbre de Lie** L est un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une application bilinéaire $[,] : L \times L \rightarrow L$ telle que $\forall x, y \in L$:

- $[x, y] = -[y, x]$ (antisymétrie)
- $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (identité de Jacobi)

Cette application est couramment appelée crochet de Lie.

Exemples – Tout espace vectoriel muni du crochet nul remplit les conditions de la définition.

– Soient deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Leur commutateur est défini par :

$$[,] : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$(A, B) \longmapsto [A, B] = AB - BA$$

qui est bien une fonction \mathbb{R} -linéaire. Il est facile de vérifier que le commutateur vérifie les conditions pour être un crochet de Lie. Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du commutateur est une algèbre de Lie.

Avant de faire le lien entre les algèbres de Lie et les groupes de Lie, il est nécessaire de faire un écart pour rappeler quelques définitions d'algèbre.

Définition 1.8. Un **anneau unitaire** $(A, +, \times)$ est tel que $(A, +)$ soit un groupe unitaire et \times soit associative et distributive par rapport à $+$ et possède un élément neutre.

Il est commutatif si la loi \times est commutative.

Définition 1.9. Un **pseudo-anneau** possède toutes les propriétés d'un anneau mais sans neutre pour la multiplication.

Exemple – Prenons les matrices dans \mathbb{Z} de la forme : $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il y a une infinité de neutres à gauche de la forme $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais aucun n'est neutre à droite. Ils ne sont donc pas neutres.

C'est donc un pseudo-anneau.

Définition 1.10. Un module sur un anneau peut être à gauche ou à droite.

Soit $(A, \hat{+}, \times)$ un anneau unitaire.

Un **A -module** à gauche est la donnée $(M, +)$ d'un ensemble, d'une loi interne $+$ qui fait de $(M, +)$ un groupe abélien et d'une loi externe $\cdot : A \times M \rightarrow M$ tel que $\forall a, b \in A, \forall x, y \in M$:

- $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
- $(a \hat{+} b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot y$
- $(a \times b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Pour un A -module à droite, la seule différence est que $(a \times b) \cdot x = b \cdot (a \cdot x)$

Définition 1.11. Soit A un anneau commutatif.

$(B, +, \cdot, \times)$ est une **A -algèbre associative** lorsque :

- $(B, +, \cdot)$ est un A -module,
- $(B, +, \times)$ est un pseudo-anneau,
- $\forall \lambda \in A, \forall x, y \in B : \lambda \cdot (x \times y) = x \times (\lambda \cdot y) = (\lambda \cdot x) \times y$

Poser toutes ces définitions nous permet de donner un exemple important d'algèbre de Lie.

Soit A une \mathbb{K} -algèbre associative. Alors, si $x, y \in A$ $[x, y] = xy - yx$ définit un crochet de Lie.

Démonstration :

1. $[x, y] = xy - yx = -(yx - xy) = -[y, x]$
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = [x, yz - zy] + [y, zx - xz] + [z, xy - yx]$
 $= x(yz - zy) - (yz - zy)x + y(zx - xz)$
 $- (zx - xz)y + z(xy - yx) - (xy - yx)z$
 $= 0$

3. A étant une \mathbb{K} -algèbre associative, c'est un espace vectoriel par définition.

Les exemples les plus importants d'algèbre de Lie sous-jacente à une algèbre commutative sont $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou plus généralement $A = \text{End}(\mathbb{K})$. Les algèbres de Lie ainsi obtenues sont notées $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, respectivement $\mathfrak{gl}(V)$.

Construction d'une algèbre de Lie

Pour faire le lien entre les groupes de Lie et les algèbres de Lie, on va devoir poser quelques fonctions. Celles-ci nous permettront de construire un crochet sur un sous-groupe du groupe de Lie initial, et ainsi d'obtenir une algèbre de Lie pour tout groupe de Lie que l'on pourrait imaginer.

Après cela, on citera un théorème qui permet de relier encore plus les algèbres et les groupes de Lie, mais uniquement sous certaines conditions, et non plus dans le cadre général.

Dérivation d'une algèbre

Soit A une \mathbb{K} -algèbre associative.

Une dérivation ∂ de A est un endomorphisme du \mathbb{K} -espace vectoriel sous-jacent à A vérifiant la formule de Leibnitz : $\partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b)$.

L'ensemble $Der(A)$ est un sous-espace vectoriel de $End_{\mathbb{K}}(A)$. $\partial \circ \partial'$ n'est généralement pas une dérivation, mais $[\partial, \partial'] = \partial \circ \partial' - \partial' \circ \partial$ est encore une dérivation de A .

Ainsi $Der(A)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(A)$.

On définit la dérivation sur une \mathbb{K} -algèbre de Lie L comme un élément ∂ de $End_{\mathbb{K}}(L)$ tel que : $\forall X, Y \in L, \partial([X, Y]) = [\partial X, Y] + [X, \partial Y]$

Ici encore, le sous- \mathbb{K} -espace vectoriel $Der(L)$ n'est pas stable par composition mais par produit. C'est donc une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(L)$.

Exemple – Dérivation d'une algèbre de Lie

Soit $Z \in L$,

$$\begin{aligned} ad_Z : L &\longrightarrow L \\ X &\longmapsto ad_Z(X) := [Z, X] \end{aligned}$$

Montrons que c'est bien une dérivation. Soit $X, Y \in L$

$$\begin{aligned} ad_Z([X, Y]) &= [Z, [X, Y]] \\ &= -[X, [Y, Z]] - [Y, [Z, X]] && \text{(par identité de Jacobi)} \\ &= [X, [Y, Z]] + [[Z, X], Y] && \text{(par bilinéarité et antisymétrie)} \\ &= [X, [Z, Y]] + [[Z, X], Y] \\ &= [X, ad_Z(Y)] + [ad_Z(X), Y] \end{aligned}$$

Définition 1.12. L'espace tangent à G en son élément neutre e est :

$$T_e G = \{\gamma'(0) \mid \gamma :]a; b[\subset \mathbb{R} \rightarrow G, \text{ de classe } C^1, \text{ avec } \gamma(0) = e\},$$

où $0 \in]a; b[$.

Différentielle de la loi et de l'inverse

Soit G un groupe de Lie. On munit $T_e G$ d'une structure de \mathbb{R} -algèbre de Lie.

Soient m la loi du groupe de Lie G et i son application inverse.

En différentiant m en (e, e) , on a $(d_{(e,e)} m : T_e G \times T_e G \rightarrow T_e G)$ qui est bilinéaire mais aussi associative, comme m est associative. Exprimons cette loi :

$$\begin{aligned} d_{(e,e)} m(X, Y) &= d_e[x \mapsto m(x, e)](X) + d_e[y \mapsto m(e, y)](Y) \\ &= d_e id_G(X) + d_e id_G(Y) \\ &= X + Y \end{aligned}$$

C'est l'addition dans $T_e G$.

En différentiant i en e , on a $d_e i : T_e G \rightarrow T_e G$ qui fournit une application inverse pour $T_e G$. On a que $d_e i(X) = -X$.

Représentation adjointe d'un groupe de Lie

Avant de définir la représentation adjointe d'un groupe de Lie, on va expliquer ce qu'est une représentation de façon générale en algèbre. Pour cela, on introduit d'abord la notion de groupe général linéaire.

Définition 1.13. Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} .

Le **groupe général linéaire** de E , noté $GL(E)$ est le groupe des automorphismes de E , muni de la composition des applications.

Définition 1.14. Une **représentation** (ρ, V) d'un groupe G est la donnée d'un espace vectoriel V appelé espace de la représentation et d'un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow GL(V)$

Cet espace est isomorphe à $GL_n(\mathbb{K})$.

Cela revient donc à visualiser E comme un groupe des matrices.

Ces définitions étant posées, nous pouvons revenir à notre problème : définir la représentation adjointe d'un groupe de Lie, ce qui nous permettra de définir son algèbre de Lie par la suite.

Soit $x \in G$. On pose les deux fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \text{Int}_x : G & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & xyx^{-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{Ad}_x : T_e G & \longrightarrow & T_e G \\ y & \longmapsto & d_e(\text{Int}_x)(y) \end{array}$$

De façon évidente, on a $\text{Int}_x \circ \text{Int}_{x'} = \text{Int}_{xx'}$. On peut en déduire que $\text{Ad}_x \circ \text{Ad}_{x'} = \text{Ad}_{xx'}$. Donc Ad_x est inversible. D'où :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ad} : G & \longrightarrow & GL(T_e G) \\ x & \longmapsto & \text{Ad}_x \end{array} \text{ est un morphisme de groupes.}$$

De plus, comme $\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & \text{Int}_x(y) = xyx^{-1} \end{array}$ est lisse,

l'application $\begin{array}{ccc} G \times T_e G & \longrightarrow & T_e G \\ (x, Y) & \longmapsto & \text{Ad}_x(Y) \end{array}$ est lisse aussi, puisqu'on l'obtient par différentiation de la fonction précédente au point e , en sa deuxième variable y .

Ainsi, $(\text{Ad}, T_e G)$ est une représentation de G . On l'appelle représentation adjointe de G .

Maintenant, il nous reste à construire un crochet sur $T_e G$. Posons :

$$\begin{array}{ccc} \text{ad} : T_e G & \longrightarrow & \text{End}_{\mathbb{R}}(T_e G) \\ X & \longmapsto & \text{ad}_X := d_e \text{Ad}(X) \end{array}$$

On veut montrer que

$$\begin{array}{ccc} [,] : T_e G \times T_e G & \longrightarrow & T_e G \\ (X, Y) & \longmapsto & \text{ad}_X(Y) \end{array} \quad (1)$$

définit bien un crochet de Lie [5].

- **Bilinéarité**

L'application est bien bilinéaire car c'est une différentielle d'application linéaire.

- **Antisymétrie**

$$\begin{aligned} f : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xyx^{-1}y^{-1} \end{aligned}$$

D'abord on remarque de $f(G \times \{e\}) = \{e\}$ et que $f(x, y) = \text{Int}_x(y)y^{-1}$.
Différentions f en y au point e .

On obtient :

$$\begin{aligned} \partial_y f : G \times T_e G &\longrightarrow T_e G \\ (x, Y) &\longmapsto \text{Ad}_x(Y) - Y \end{aligned}$$

car par définition, $d_e(\text{Int}_x) = \text{Ad}_x$.

Dérivons maintenant cette dérivée partielle par rapport à x . On a alors :

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_y f : T_e G \times T_e G &\longrightarrow T_e G \\ (X, Y) &\longmapsto \text{ad}_X(Y) \end{aligned}$$

car par définition $d_e(\text{Ad}_x) = \text{ad}_x$.

On fait de même, mais en différentiant d'abord en x puis en y , et on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_y \partial_x f : G \times T_e G &\longrightarrow T_e G \\ (X, Y) &\longmapsto -\text{ad}_Y(X) \end{aligned}$$

Or toutes nos applications sont lisses, elles sont donc C^2 . D'où, par le théorème de Schwarz, $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$.

C'est à dire, que :

$$\forall X, Y \in T_e G, \text{ad}_X(Y) = -\text{ad}_Y(X).$$

Cette inégalité reformulée sous forme de notre (peut-être) crochet de Lie donne : $[X, Y] = -[Y, X]$.

On a donc montré que le crochet est antisymétrique.

• Identité de Jacobi

Pour montrer l'identité de Jacobi, on va d'abord démontrer la proposition suivante.

Proposition 1.15. Soit $\phi : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes de Lie.

- $\forall x \in G, d_e \phi \circ \text{Ad}_x = \text{Ad}_{\phi(x)} \circ d_e \phi$
- $\forall X \in T_e G, d_e \phi \circ \text{ad}_X = \text{ad}_{d_e \phi(X)} \circ d_e \phi$

Démonstration – Soit $x, y \in G$

$$\begin{aligned} \phi \circ \text{Int}_x(y) &= \phi(xyx^{-1}) \\ &= \phi(x) \phi(y) \phi(x^{-1}) \\ &= \phi(x) \phi(y) \phi(x)^{-1} && \text{car } \phi \text{ est un morphisme.} \\ &= \text{Int}_{\phi(x)} \circ \phi(y) \end{aligned}$$

En différentiant cette relation en e , on obtient :

$$\begin{aligned} d_e \phi \circ d_e(\text{Int}_x) &= d_e(\text{Int}_{\phi(x)}) \circ d_e \phi && \text{car } d_e(\text{Int}_x) = \text{Ad}_x \\ \Leftrightarrow d_e \phi \circ \text{Ad}_x &= \text{Ad}_{\phi(x)} \circ d_e \phi \end{aligned}$$

– Pour obtenir la deuxième partie de la proposition, on différencie la première égalité en e , en se rappelant que $d_e \text{Ad}_x = \text{ad}_x$. Cette dérivation est possible car les fonctions utilisées sont lisses.

En appliquant le deuxième point de la propriété à $\phi = \text{Int}_g$, avec $g \in G$, on a $\forall X \in T_e G$:

$$\begin{aligned} Ad_g \circ ad_X &= ad_{Ad_g(X)} \circ Ad_g \\ \Leftrightarrow \forall Y \in T_e G, Ad_g([X, Y]) &= [Ad_g(X), Ad_g(Y)] \end{aligned}$$

On peut en déduire l'identité de Jacobi. Pour cela, on différencie en e , et on obtient : $\forall X, Y, Z \in T_e G$

$$\begin{aligned} ad_Z([X, Y]) &= d_{(e,e)}\{(g, h) \mapsto [Ad_g X, Ad_h Y][Z, Z]\} \\ &= [ad_Z X, Ad_e Y] + [Ad_e X, ad_Z Y] \\ &= [ad_Z X, Y] + [X, ad_Z Y] \\ \Leftrightarrow [Z, [X, Y]] &= [[Z, X], Y] + [X, [Z, Y]] \\ &= -[Y, [Z, X]] + [X, -[Y, Z]] && \text{(par antisymétrie)} \\ &= -[Y, [Z, X]] - [X, [Y, Z]] && \text{(par bilinéarité)} \end{aligned}$$

On a donc bien l'identité de Jacobi.

Conclusion ¹

L'espace tangent à G en e $T_e G$ est donc une algèbre de Lie, avec son crochet défini par :

$$\begin{aligned} [,] : T_e G \times T_e G &\longrightarrow T_e G \\ (X, Y) &\longmapsto ad_X(Y) \end{aligned}$$

Rappelons que ad_X est défini comme ce que suit :

$$ad_X := d_e(Ad_X), \quad Ad_X := d_e(\text{Int}_X), \quad \text{Int}_X(Y) = XYX^{-1}$$

1.3 Quelques exemples sur les groupes de matrices

Dans cette section, nous allons essayer de voir ce qu'est un groupe de Lie, ainsi qu'une algèbre de Lie, pour donner un peu de tangibilité à ces nouvelles notions.

Généralités [2] [8]

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. Il n'est pas commutatif pour $n \geq 2$.

$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\} \longrightarrow$ Groupe général linéaire

$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\} \longrightarrow$ Groupe spécial linéaire

Définition 1.16. Un **groupe de matrices** est un sous-groupe $G \leq GL_n(\mathbb{K})$. C'est aussi un sous-espace fermé.

Exemple – $GL_n(\mathbb{K})$ peut être considéré comme un sous-groupe de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ en identifiant $A \in GL_n(\mathbb{K})$ à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

– Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix}$

1. Cette démonstration, et plus généralement cette partie, est tirée de [5] très largement

Alors le groupe symplectique est : $Sp_{2n} = \{M \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^t M J M = J\}$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices inversibles de dimension $(2n)^2$ tel que le changement de base par M laisse J invariant.

Théorème 1.17. (H.Cartan) Les groupes de Lie matriciels réels sont exactement les sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$.

Remarquons que pour toute algèbre de Lie matriciel, le crochet de Lie est défini par le commutateur des matrices :

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\longmapsto [\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} \end{aligned}$$

Nous allons maintenant essayer de faire le lien entre les groupes de matrices et les algèbres de Lie.

Pour cela, on utilise l'exponentielle des matrices.

Définition 1.18. [10] La série de matrices de terme général :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \end{aligned}$$

converge normalement sur toute partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On définit alors l'exponentielle des matrices par :

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto \exp(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} A^k \end{aligned}$$

Propriété 1.19. Soit G un groupe de Lie matriciel.

L'exponentielle des matrices envoie $T_e G$ dans G .

On commence donc à voir un lien direct pour les matrices entre les algèbres et les groupes de Lie. Mais il faudrait encore que $\exp(T_e G)$ soit un groupe de Lie, ce qui est loin d'être sûr.

En réalité, l'exponentielle appliquée en $T_e G$ ne génère pas G tout entier, mais seulement sa composante connexe.

Théorème 1.20. Soit G un groupe de Lie matriciel et \mathfrak{g} son algèbre de Lie.

Alors $\exp(\mathfrak{g})$ génère la composante connexe de G .

Ce théorème peut avoir une autre formulation, mais pour l'énoncer il faut d'abord définir la simple connexité.

Définition 1.21. Si X est un espace topologique connexe par arcs, il est **simple-ment connexe** si tout lacet tracé sur X est homotope à un point.

De façon plus intuitive, cela signifie que l'on peut rétrécir tout lacet jusqu'à former un point. Cela signifie qu'il n'y a pas de trou, pas d'obstacles pour que le lacet se résorbe.

Théorème 1.22. Si G est un groupe de Lie matriciel simplement connexe, alors l'exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est surjective.

Mais on peut voir un autre lien entre groupes et algèbres de Lie. Prenons G et H des groupes de Lie quelconques (pas nécessairement matriciels donc).

Théorème 1.23. Si φ est un morphisme de groupes entre H et G et est différentiable, alors sa différentielle en l'identité sera un morphisme entre les algèbres de Lie \mathfrak{h} et \mathfrak{g} de G et H .

Ainsi, à une représentation différentiable de G , on associe une représentation de \mathfrak{g} .

Exemples importants : $SO(3)$ et $SU(2)$

$SO(3)$ [10]

Définition 1.24. Un automorphisme u de E est **orthogonal** s'il préserve le produit scalaire, i.e. :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

L'ensemble des automorphismes orthogonaux sur E est $O(E)$.

Remarque : puisque l'on parle de produit scalaire, le corps de base est nécessairement \mathbb{R} .

Le groupe orthogonal sur \mathbb{R}^n est noté $O(n)$.

Le groupe spécial orthogonal est défini par :

$$SO(E) = \{f \in O(E) \mid \det f = 1\}.$$

$SO(3)$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $O(3)$. On l'appelle le groupe spécial orthogonal de \mathbb{R}^3 .

En mécanique et en géométrie, il est utilisé pour représenter le groupe des rotations autour de l'origine dans l'espace euclidien, en utilisant la loi de composition. Par définition, ces rotations préservent l'origine, la distance euclidienne et l'orientation de l'espace.

Chaque rotation dans \mathbb{R}^3 fixe un unique sous-espace vectoriel de dimension 1, appelé axe de rotation. Une rotation peut donc être définie par son axe de rotation et son angle de rotation. Il faut aussi définir un sens (horaire ou anti-horaire) pour l'espace \mathbb{R}^3 .

Par exemple, la rotation autour de l'axe Oz d'une base orthonormée et d'angle ψ peut être définie par la matrice :

$$\mathcal{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plus important pour nous, ce groupe est un groupe de Lie.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'algèbre de Lie de ce groupe, noté $\mathfrak{so}(3)$. Il se compose de toutes les matrices antisymétriques de $SO(3)$. Soit $\mathcal{R}(\psi, \vec{n})$ la matrice de rotation qui représente une rotation d'axe \vec{n} et d'angle ψ en sens anti-horaire, avec \vec{n} un vecteur unitaire.

$$\left. \frac{d}{d\psi} \right|_{\psi=0} \mathcal{R}(\psi, \vec{n})\vec{x} = \vec{n}\vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

Cela permet de montrer que une base de $\mathfrak{so}(3)$ serait :

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Entre ces éléments, on a les relations suivantes :

$$[L_x, L_y] = L_z \quad [L_z, L_x] = L_y \quad [L_y, L_z] = L_x$$

SU(2)

Définition 1.25. Soit U une matrice carrée complexe. On définit sa **matrice adjointe**, notée U^* par :

$$U^* = {}^t\bar{U} = \bar{{}^tU}$$

Définition 1.26. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien de dimension n .

Un automorphisme u sur E est dit **unitaire** s'il préserve le produit hermitien.

Il est alors représenté par une matrice unitaire U , i.e. telle que :

$$UU^* = U^*U = I_n.$$

Ce groupe est noté $U(E)$.

On peut remarquer que si le corps de base de E est \mathbb{R} , $U(E)$ et $O(E)$ coïncident.

Ainsi, lorsque l'on parle de $U(n)$, on parle toujours du groupe unitaire sur \mathbb{C}^n .

$SU(n)$ est un sous-groupe du groupe $U(n)$ appelé groupe spécial unitaire.

Il est défini par :

$$SU(n) = \{g \in U(n) \mid \det g = 1\}.$$

On peut faire remarquer que ce groupe est simplement connexe, en plus d'être un groupe de Lie.

L'algèbre de Lie de $SU(2)$, notée $\mathfrak{su}(2)$, est un espace vectoriel ayant pour base :

$$u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (3)$$

Cette base satisfait la relation suivante :

$$[u_1, u_2] = u_3 \quad [u_2, u_3] = u_1 \quad [u_3, u_1] = u_2$$

On voit que les coefficients $\frac{1}{2}$ servaient à éviter d'avoir un coefficient sur les crochets de Lie.

Liens entre ces exemples

On peut voir un premier lien en posant l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned}\gamma : \mathfrak{su}(2) &\longrightarrow \mathfrak{so}(3) \\ au_1 + bu_2 + cu_3 &\longmapsto aL_x + bL_y + cL_z\end{aligned}$$

Ainsi, avec (3) et (2), on voit que cet isomorphisme satisfait :

$$\gamma([U, V]) = [\gamma(U), \gamma(V)] \quad (4)$$

C'est donc un morphisme d'algèbres de Lie.

$\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ sont donc isomorphes.

Il serait très intéressant de chercher un morphisme de groupes de Lie $\Gamma : SU(2) \rightarrow SO(3)$ dont la dérivée serait γ . Néanmoins nous ne le ferons pas, mais un lecteur intéressé pourra se référer à [2], des pages 86 à 92.

2 Les opérateurs symplectiques

La géométrie symplectique est le langage unificateur de domaines aussi variés que la mécanique, le calcul des variations, l'optique, la thermodynamique, l'analyse microlocale des équations aux dérivées partielles ou la quantification (l'étude de la description classique d'un système mécanique à sa description quantique). Elle est un outil de choix en particulier pour étudier le comportement dynamique d'un système mécanique, comme Poincaré, Birkhoff ou Arnold l'ont éminemment illustré.

2.1 Problème physique

Prenons le problème mécanique suivant :

Soit un point matériel M de masse m_1 soumis à l'attraction gravitationnelle d'un point A de masse m_2 qui est fixe dans le référentiel choisi. Le point et le corps sont distants de r . On considère que le système est isolé.

On peut montrer que M se meut nécessairement dans l'espace affine contenant A et M à l'instant initial, et dont l'espace tangent contient la vitesse initiale de M . Donc l'espace physique peut être supposé de dimension 2 et, par le choix d'un référentiel, s'identifie à \mathbb{C} . Si on note q la position de M dans l'espace et que le centre d'attraction est situé en l'origine (ce qui simplifie les calculs), on a que $r = |q|$, avec $q = x + iy$

Avec la seconde loi de Newton, on obtient que :

$$m_2 \ddot{q} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

avec G la constante de gravitation.

Pour simplifier l'équation, on enlève toutes les constantes multiplicatives (ce qui ne changera rien à la nature des équations ni des solutions). On obtient alors :

$$\ddot{q} = -\frac{q}{r^3}, \quad q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad r = |q|. \quad (5)$$

Posons $p = \dot{q}$, pour avoir des équations du premier ordre sur $(q, p) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$. On obtient alors le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\frac{q}{r^3} \end{cases} \quad (6)$$

Définition 2.1. Soit $(E) : X' = f(X)$ une équation différentielle, avec X un vecteur, avec f définie sur un ouvert U .

Une **intégrale première** de (E) est une application $I : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que la fonction $x \mapsto dI_x(f(x))$ soit nulle sur tout U .

Une intégrale première du mouvement est donc une fonction constante le long des solutions.

En mécanique classique, on en a trois qui nous intéressent :

— Le moment cinétique : $C = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$.

Il représente l'état général de rotation du système. On pourrait le comparer à la quantité de mouvement pour la translation.

En transposant le produit vectoriel dans \mathbb{C} on obtient :

$$C = \text{Im}(\bar{q}p) = x\dot{y} - y\dot{x}$$

— Le vecteur excentricité : $E = \frac{q}{r} + iCp$.

C'est une grandeur utilisée en mécanique céleste lorsque (comme dans notre cas) on étudie le mouvement relatif de deux astres en interaction newtonienne. Les orbites de ces astres sont alors des ellipses d'excentricité e . Le vecteur excentricité est le vecteur de norme e , colinéaire à la ligne des apsides et dirigé vers le périapse².

$$E = \frac{q}{r} + iCp$$

L'équation d'une orbite s'obtient en éliminant la vitesse des expressions précédentes de C et E :

$$\begin{aligned} \text{Re}(\bar{E}q) &= \frac{\bar{q}q}{r} - Cq(i\dot{x} + \dot{y}) \\ &= \text{Re}\left(\frac{r^2}{r} - C(x\dot{y} - y\dot{x} + i\dots)\right) \\ &= r - C^2 \end{aligned}$$

— Le Hamiltonien

$$H = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{r}$$

On peut remarquer que le système d'équations (6) se met sous la forme hamiltonienne :

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \partial_{p_j} H(q, p) \\ \dot{p}_j = -\partial_{q_j} H(q, p) \end{cases} \quad (7)$$

2. Les apsides sont les deux points extrêmes de l'orbite d'un corps céleste. Le périapse est le point le plus proche du corps attracteur (A ici) entre les deux apsides.

Ou formulé autrement : $\nabla H(q, p) = (\dot{q}, -\dot{p})$.

Cette forme hamiltonienne justifie que le Hamiltonien est une intégrale première du mouvement : il est bien constant le long des solutions.

Comme on a une symétrie par rapport au centre d'attraction, on passe en coordonnées polaires. On a donc :

$$q = r e^{i\theta}$$

Pour les vitesses, si on pose :

$$p = \left(R + i \frac{\Theta}{r} \right) e^{i\theta}$$

avec $R = \dot{r}$ et $\Theta = r^2 \dot{\theta}$, la forme hamiltonienne des équations est préservée :

$$\begin{cases} \dot{r} = \partial_R H \\ \dot{\theta} = \partial_\Theta H \\ \dot{R} = -\partial_r H \\ \dot{\Theta} = -\partial_\theta H \end{cases}$$

Attention : c'est un abus de noter H ici, en réalité c'est une autre fonction que celle définie plus haut, puisque l'on a changé de coordonnées.

Les intégrales premières du mouvement que l'on a définies plus haut sont dans la base polaire :

$$H = \frac{R^2}{2} + \frac{\Theta^2}{2r^2} - \frac{1}{r}, \quad C = \Theta \quad \text{et} \quad E = e^{i\theta} \left(1 - \frac{\Theta^2}{r} + i\Theta R \right) \quad (8)$$

2.2 Une première résolution approchée : le schéma d'Euler

On va appliquer l'algorithme d'Euler pour résoudre une équation différentielle et voir que cela ne fonctionne pas. On montrera où se trouve la faiblesse de cet algorithme (dans notre cas du moins) et on proposera une solution.

Rappelons le principe de la méthode de résolution d'Euler. Considérons que les abscisses sont le temps et la position les ordonnées. On sait que la dérivée en un point x est égale au coefficient directeur de la tangente au point x . Or, si on prend un intervalle de temps suffisamment petit centré en x , on peut considérer que la courbe de la fonction et la tangente sont superposées sur cet intervalle.

En connaissant les valeurs initiales, on choisit donc un pas τ suffisamment petit. On considère que n est le nombre d'itérations. On écrit (pour respecter nos notations précédentes) q la position et p la vitesse. On a alors le schéma itératif suivant : $\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

$$\text{Eul} : \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} q_i + \tau p_i \\ p_i - \tau \frac{q_i}{r_i^3} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -\frac{\tau}{r^3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit K le conditionnement de la matrice A .
 Quand $\tau \rightarrow 0^+$ avec $K\tau \simeq 1$, la ligne polygonale des sommets obtenus avec l'algorithme converge uniformément vers la solution de l'équation différentielle (qui est unique par Cauchy-Lipschitz).

Cet algorithme ne conserve ni H , ni C , ni E , ni l'aire. Or on sait que H , C et E doivent être constantes le long d'une solution, par définition d'intégrales premières.

L'aire est préservée signifie que si l'on prend une boule B de conditions initiales, la mesure du flux obtenu à partir de ces conditions initiales à tout temps t est égale à la mesure de la boule, i.e. :

$$\lambda\phi_t(B) = \lambda(B).$$

Lorsque l'on prend des conditions initiales quelconques, on obtient - avec l'algorithme d'Euler - les mouvements de la figure 2.

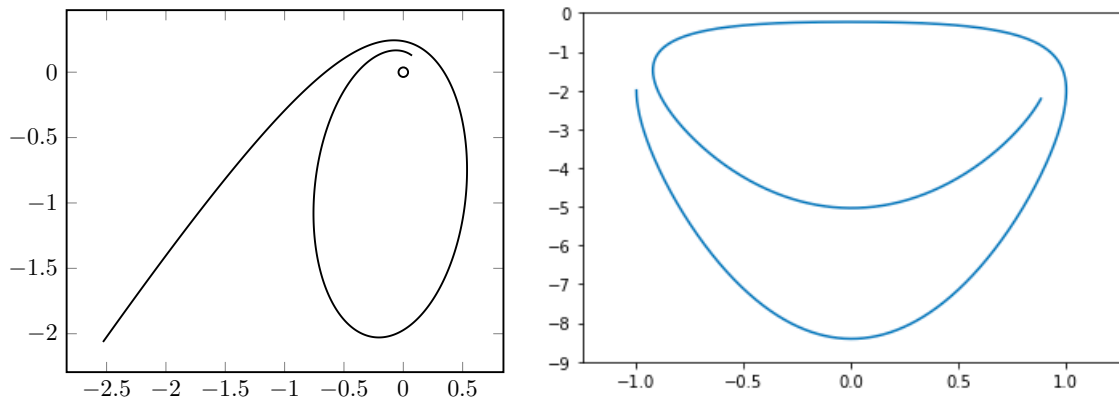


FIGURE 2 – Mouvements obtenus avec l'algorithme d'Euler

On voit que le mouvement obtenu n'est pas une ellipse, ce qui montre bien que cela ne correspond pas véritablement à notre problème. Après seulement un tour on échappe à la gravitation dans un cas. Dans l'autre cas, la figure est encore loin d'être une ellipse, bien que cette fois-ci on n'échappe pas à la gravitation aussi rapidement.

Démonstration – (L'aire est préservée)

Pour montrer que l'aire est préservée on va montrer que sa dérivée par rapport au temps est nulle.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(B)} d\lambda(z) &= \frac{d}{dt} \int_B |\det \phi'_t(z)| d\lambda(z) && \text{changement de variables : } z = \phi_t(z) \\
&= \frac{d}{dt} \int_B \det \phi'_t(z) d\lambda(z) \\
&= \int_B \frac{d}{dt} \det \phi'_t(z) dz \\
&= \int_B \operatorname{div} \vec{v}(z) dz && (1) \\
&= \int_B \sum_{j=1,2} \partial_{q_j} \vec{v}(q, p) + \partial_{p_j} \vec{v}(q, p) dz \\
&= \int_B 0 dz \\
&= 0 \quad \square
\end{aligned}$$

(1) avec $\vec{v}(q, p) = \left(p, -\frac{q}{|q|^3}\right)$ en se plaçant dans les coordonnées cartésiennes de l'équation (6) et en considérant $p = p_1 + ip_2$ et $q = q_1 + iq_2$.

Si on prenait la variante définie comme suit, on préserverait l'aire.

$$\text{Eul} : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} q + \tau \left(p - \tau \frac{q}{r^3}\right) \\ p - \tau \frac{q}{r^3} \end{pmatrix} \quad (10)$$

On obtient la figure 3 pour des conditions initiales aléatoires.

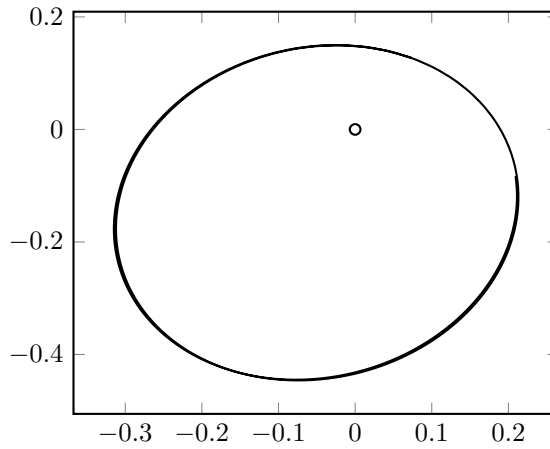


FIGURE 3 – Mouvement obtenu avec l'algorithme modifié

On voit bien qu'ici, bien que ça ne soit toujours pas parfait, on obtient une figure bien plus proche d'une ellipse.

2.3 Symétrie hamiltonienne

Soient O un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et

$$\begin{aligned}
H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\
z = (x, y) &\longmapsto H(z) = H(x, y).
\end{aligned}$$

On associe à cette application un champ de vecteurs hamiltoniens défini par :

$$Z_H = \begin{cases} \dot{x}_j = \partial_{y_j} H \\ \dot{y}_j = -\partial_{x_j} H, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases}$$

Ce champ de vecteurs peut se voir comme une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans chaque plan $q_j p_j$.

En posant :

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline -I_n & 0_n \end{array} \right),$$

on obtient l'expression suivante pour Z_H

$$Z_H = J \times H'.$$

H, comme affirmé plus haut, est une intégrale première du mouvement. On va le montrer.

Démonstration – H constante le long d'une solution.

En effet, si on pose $\phi_t = (x, y) \mapsto \phi_t(x, y)$ le flot de Z_H au temps t, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\phi_t(x, y)) &= \partial_x H \cdot \dot{x} + \partial_y H \cdot \dot{y} \\ &= \partial_x H \partial_y H - \partial_y H \partial_x H \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

H est une intégrale première, car $H(\phi_t(z)) = H(z) \forall t \geq 0$.

Les intégrales premières sont associées à une symétrie continue, en prenant le flot du champ hamiltonien associé à l'intégrale première elle-même.

Que l'énergie soit conservée traduit l'indépendance de H par rapport au temps.

Le problème de Kepler est particulier car il possède plusieurs intégrales premières. Le moment cinétique traduit l'invariance par l'action de SO_3 sur l'équation différentielle. Le fait que le vecteur excentricité soit constant reflète une invariance par action du groupe SO_4 .

Il existe encore une autre symétrie continue, que l'on peut lire sur l'équation aux variations. Pour cela, on procède de la façon suivante.

Soit la condition initiale $z = (x, y)$ fixée et on note :

$$\begin{cases} z(t) = \phi_t(z) \in \mathbb{R}^{2n} \\ \zeta(t) = \phi'_t(z) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

ζ correspond donc à la dérivée spatiale de ϕ_t .

On souhaite étudier le comportement des solutions qui sont infinitésimalement proches de notre solution $z(t)$. Pour cela, on va d'abord déterminer l'équation satisfaite par $\zeta(t)$ en dérivant l'équation suivante :

$$\dot{\phi}_t(z) = JH'(\phi_t(z))$$

3. Voir les exemples de groupes de Lie matriciels plus haut

On obtient l'équation aux variations par rapport à z :

$$\dot{\zeta}(t) = JH''(z(t))\zeta(t) \quad (11)$$

car $z(t) = \phi_t(z)$.

Cette équation est linéaire et dépend du temps.

Lemme 2.2. La fonction ${}^t\zeta(t)J\zeta(t)$ est une intégrale première, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall t, \quad {}^t\zeta(t)J\zeta(t) = J$$

Démonstration – La relation est vérifiée en $t = 0$. En effet, $\zeta(0) = \phi_0(z) = Id$.

Notons de plus que ${}^tH'' = H''$ et que ${}^tJ = -J$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}^t\zeta(t)J\zeta(t) &= {}^t\dot{\zeta}(t)J\zeta(t) + {}^t\zeta(t)J\dot{\zeta}(t) \\ &= {}^t\dot{\zeta}J\zeta + {}^t\zeta J\dot{\zeta} \\ &= {}^t(JH''\zeta)J\zeta + {}^t\zeta J JH''\zeta \\ &= {}^t\zeta(H'' - H'')\zeta \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

Cette intégrale première montre bien que l'on a une symétrie autre (ce que l'on avait affirmé plus haut).

Définition 2.3. Un isomorphisme linéaire ζ de \mathbb{R}^{2n} est **symplectique** s'il préserve la forme bilinéaire antisymétrique J , i.e. :

$${}^t\zeta J\zeta = J$$

De tels isomorphismes forment un groupe noté Sp_{2n} et appelé le groupe symplectique⁴.

Définition 2.4. Un difféomorphisme ϕ est **symplectique** si pour tout z , $\phi'(z) \in Sp_{2n}$.

Donc le ϕ défini plus haut, dans l'équation aux variations, est un difféomorphisme symplectique.

Proposition 2.5. Soient ζ un isomorphisme symplectique et λ une valeur propre de ζ .

Alors $1/\lambda$, $1/\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda}$ sont des valeurs propres de ζ .

Démonstration – ζ est un isomorphisme symplectique, on a donc :

$$\begin{aligned} {}^t\zeta J\zeta &= J \\ \Leftrightarrow {}^t\zeta J &= J\zeta^{-1} \\ \Leftrightarrow {}^t\zeta &= J\zeta^{-1}J^{-1} \\ \Leftrightarrow \zeta &= {}^t(J\zeta^{-1}J^{-1}) \\ \Leftrightarrow \zeta &= J^t\zeta^{-1}J^{-1}. \end{aligned}$$

Donc ζ est semblable à ${}^t\zeta^{-1}$. De plus, ζ est une matrice réelle, donc semblable à $\bar{\zeta}$. \square

4. Voir l'exemple p.7

Corollaire 2.6. Un difféomorphisme symplectique ϕ préserve le volume, i.e. :

$$\det \phi' = 1$$

Démonstration – On peut facilement montrer par une récurrence simple, et avec des développements bien choisis, que $\det J = \pm 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. On peut donc diviser par $\det J$

ϕ est un difféomorphisme symplectique, donc $\phi' \in Sp_{2n}$

donc par définition, on a : ${}^t\phi' J \phi' = J$

En passant au déterminant, on a alors : $\det {}^t\phi' J \phi' = \det J$.

D'où $\det({}^t\phi') \det(J) \det(\phi') = \det J$

$$\Rightarrow \det({}^t\phi') \det(\phi') = 1 \quad \Rightarrow \det(\phi')^2 = 1 \quad \Rightarrow \det(\phi') = \pm 1.$$

Il nous reste à montrer que seul un déterminant de valeur +1 est possible. Cette démonstration étant un peu compliquée, on en donnera juste l'idée.

Rappelons d'abord ce qu'est la décomposition polaire d'une matrice.

Définition 2.7. On se réduit aux matrices sur le corps \mathbb{C} .

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe un unique couple $(U, H) \in U_n \times H_n^+$ tel que $A = UH$.

On rappelle que $U_n = \{M^*M = MM^* = I_n\}$ avec $M^* = {}^t\overline{M} = \overline{{}^tM}$ la matrice adjointe, aussi appelée matrice transconjugée. Ce sont les matrices unitaires.

H_n^+ correspond aux matrices hermitiennes définies positives. Tout d'abord, une matrice hermitienne est telle que $M = M^*$. Elle est définie positive si la forme sesquilinéaire

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto x^* M y$$

est un produit scalaire sur \mathbb{C}^n .

Pour revenir à la démonstration, on suppose que $A = UH$ est la décomposition polaire de notre matrice symplectique. Alors U et H sont aussi des matrices symplectiques d'après [6] [7]. Donc $\det U = \pm 1$ et $\det H = \pm 1$. Or comme H est définie positive, $\det H = 1$.

Il nous reste donc à montrer que $\det U = 1$. C'est cela que nous admettons. \square

Revenons à nos exemples de résolution numérique plus haut. On a vu que le premier algorithme ne conservait pas l'aire. On admet que le second le fait.

Donc, le second algorithme respecte la symétrie symplectique du problème de Kepler, ce qui explique que la solution qu'il génère soit plus proche de la solution véritable.

2.4 Lien entre les opérateurs symplectiques et les groupes de Lie

On rappelle que le groupe symplectique est défini par :

$$Sp_{2n} = \{M \in GL_{2n} \mid {}^tM J M = J\}$$

avec $J = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline -I_n & 0_n \end{array} \right).$

Rappelons que le groupe des matrices orthogonales est :
 $\mathcal{O}_n = \{M \in GL_n \mid {}^t M I_n M = I_n\}$.
L'application $(M, N) \rightarrow {}^t M I_n N$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, tandis que $(M, N) \rightarrow {}^t M J N$ est une forme antisymétrique.
On peut donc considérer que Sp_{2n} est l'équivalent antisymétrique du groupe \mathcal{O}_n .

Les équations de Newton donnent une explication physique sur pourquoi on s'intéresse aux espaces Sp_{2n} et non Sp_n . En effet, on a :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \Sigma \vec{F}_i \end{cases}$$

avec \vec{F}_i les forces qui s'exercent sur le système.

Le fait que l'on ait une équation du second d'ordre donne une idée palpable des raisons pour lesquelles les groupes symplectiques sont d'ordre pair.

Soient une équation différentielle $X'(t) = F(X(t))$ avec $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui est C^1 ou Lipschitz. Alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour chaque condition initiale, il existe une unique solution.

Notons $\phi(t, X_0)$ la solution pour une condition initiale X_0 au temps t .

Alors la fonction $\phi_t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, X_0 \mapsto \phi(t, X_0)$ est le flot de cette équation différentielle.

Pour revenir à notre problème, on a donc pour tout temps $t : \phi_t \in Diff^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Les symplectomorphismes sont définis comme suit :

$$Symp^\infty(\mathbb{R}^{2n}) = \{\varphi \in Diff^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \forall z \in \mathbb{R}^{2n}, \varphi'(z) \in Sp_{2n}\}.$$

La symétrie des symplectomorphismes est donc subtile, elle se niche dans la dérivée.

Or Sp_{2n} est un groupe de Lie. Et les opérateurs symplectiques, aussi appelés symplectomorphismes, en ont besoin. On voit donc le lien - pas évident - entre ces deux notions.

Conclusion

Ainsi, on voit qu'il existe un lien entre les groupes de Lie et les opérateurs symplectiques. Or, les opérateurs symplectiques permettent de traduire des mouvements de physique (de mécanique céleste ici).

Il existe également un lien entre opérateur symplectique et mécanique quantique, que l'on retrouve dans les équations d'Heisenberg par exemple. Toutefois, je n'ai pu traiter cet exemple à cause de sa difficulté.

Ainsi, deux notions que l'on pourrait penser très éloignées ne le sont au final pas tant. Ce rapprochement montre bien l'importance de la symétrie, tant en mathématiques qu'en physique.

Références

- [1] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1989. Translated from the 1974 Russian origina.
- [2] BAKER, A. *Matrix groups*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2002. An introduction to Lie group theory.
- [3] BOURBAKI, N. *Groupes et algèbres de Lie : chap. 1*. Hermann, 1972.
- [4] BOURBAKI, N. *Groupes et algèbres de Lie : chap. 2 et 3*. Hermann, 1972.
- [5] DAT, J.-F. Groupes et algèbres de lie. Cours introductif de M2, 2012.
- [6] MACKEY, D., MACKEY, N., AND TISSEUR, F. Structured tools for structured matrices. *Electronical Journal of Linear Algebra* 10 (2003), 106–145.
- [7] MACKEY, D. S., AND MACKEY, N. On the determinant of symplectic matrices. *Numerical Analysis Report 422* (2003).
- [8] PAULIN, F. Introduction aux groupes de lie pour la physique. Cours de troisième année de Centrale-Supélec, 2018.
- [9] STERNBERG, S. Lie algebras. Lecture notes, 2004.
- [10] WIKIPEDIA, 2001. Encyclopédie libre.