Modélisation des océans par l'étude des équations de conservation

Agathe Rosenzweig, sous la direction de M. Benjamin Mélinand

Second semestre 2019

Table des matières

Introduction

Ce devoir a pour visée la modélisation des vagues situées en pleine mer - et présentant ainsi des hypothèses de régularité - par le biais d'équations aux dérivées partielles. La première partie est consacrée à la démonstration des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, ce qui nous permet d'obtenir un système vérifié par les ondes sous l'hypothèse des milieux continus. L'équation de conservation de la température n'est pas abordée ici, car on supposera que la température est constante à l'échelle de l'océan étudié. Cette partie a pour source principale le troisième chapitre du cours de Mme. Vignal à l'Institut mathématique de Toulouse (1), et les démonstrations reposent majoritairement sur des résultats de calcul différentiel et d'intégration.
Dans la seconde partie, nous nous sommes attachés à décrire le comportement des ondes situées en pleine mer, et à étudier les implications des hypothèses physiques sur le système vérifié par les ondes. En effectuant des hypothèses restrictives mais néanmoins assez proches de ce que l'on observe dans la réalité, nous avons abouti à deux équations, dont la redémonstration de l'équation des ondes, résultat démontré en dimension 1 par d'Alembert en 1746 . Cette partie n'a pas vraiment été traitée par la littérature jusque là, même s'il s'agit d'approximations similaires à celle qu'effectue M. Mitsotakis (2).

Première partie

Equations de conservation dans les milieux continus

1 Hypothèses des milieux continus

Définition 1. Une particule est une portion de matière suffisamment petite pour pouvoir être considérée comme ponctuelle, mais suffisament grande pour pouvoir y définir des propriétés caractéristiques.
Pour décrire un fluide, que l'on définira comme un corps simple composé de particules identiques en phase liquide ou gazeuse, on a recours à des *paramètres*, qui peuvent être :

-*mécaniques*, tels que la position (en m), la vitesse (en $m.s^{-1}$), l'accélération (en $m.s^{-2}$), la quantité de mouvement (en $kg.m.s^{-1}$), l'énergie cinétique, définie comme l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement (en J ou $kg.m^2.s^{-2}$) et l'énergie potentielle, c'est à dire l'énergie échangée par un corps lorsqu'il se déplace tout en étant soumis à une force conservatrice (en J ou $kg.m^2.s^{-2}$).

-*thermodynamiques*, tels que la pression (en $kg.m^{-1}.s^{-2}$), définie comme la quantité de force qu'exerce un fluide par unité de surface, la température (en K), la masse volumique, qui caractérise la masse d'un fluide par unité de volume, (en $kg.m^{-3}$) et l'énergie interne en chacun des points du système, constituée de la somme des énergies cinétiques microscopiques correspondant à l'agitation thermique des particules et des énergies d'interactions microscopiques correspondant aux énergies de liaisons et d'interactions diverses.

Remarque. On fixe l'état initial comme étant $t_0 = 0$. L'hypothèse fondamentale des milieux continus suppose que deux particules infiniment proches à l'état initial restent infiniment proches en tout temps $t \geq 0$. Cette hypothèse nous permet donc de définir les paramètres ci-dessus *en tout point du milieu et à tout instant.*

2 Propriétés générales des milieux continus

Définition 2. $\forall t \in \mathbb{R}, t \geq 0$, on peut définir $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$, l'ensemble de positions qu'occupe le fluide à l'instant t. On fait de plus l'hypothèse que Ω_t présente une hypothèse de régularité à la frontière. On définit la configuration de référence Ω_0 comme la configuration du fluide à l'instant $t_0 = 0$. On note X les coordonnées des vecteurs positions M de Ω_t.

(1). Cours de master 1ère année, fillière : ingénierie mathématique à Toulouse, Modélisation aux dérivées par- tielles , M-H. Vignal, 2013
(2). A simple introduction to water waves , D. Mitosotakis, 2013, https ://hal.archives-ouvertes.fr/file/ index/docid/805080/filename/euler1.pdf

Définition 3. La description Lagrangienne d'un fluide consiste à se donner une configuration de référence Ω_0 à l'instant initial 0, puis à se donner $\forall t \in \mathbb{R}$, l'expression du vecteur position X dans le domaine Ω_t de la particule située en X_0 en $t = 0$.
On définit donc :
$\phi : \Omega_0 \times \mathbb{R}^+ \to \{(X,t), X \in \Omega_t, t \in \mathbb{R}^+\}$, telle que $\phi(\cdot, 0) = Id_{\Omega_0}$ et $\phi(X_0, t)$ est la position à l'instant t de la particule qui était en X_0 à l'instant $t = 0$.

Remarque. La fonction ϕ associée à la description lagrangienne d'un fluide, telle que $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$, est appelée le flot d'un fluide.

Remarque. Pour que cette description vérifie l'hypothèse des milieux continus, on définit ϕ comme un C^1-difféomorphisme. En effet, l'hypothèse de surjectivité permet de garantir qu'en chaque point du domaine se trouve une particule, et assure donc l'hypothèse de continuité du milieu. L'hypothèse d'injectivité assure le fait que deux particules différentes ne peuvent se trouver au même point du domaine en même temps.

Définition 4. La description eulérienne du mouvement d'un fluide consiste à donner en tout instant t et en tout point du domaine Ω_t l'expression de la vitesse $\mathbf{U}$ des particules :

$$\mathbf{U}(X,t) \in \mathbb{R}^3, \forall X \in \Omega_t$$

Théorème 2.1 (Théorème de Cauchy-Lipshitz)**.** *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$, et soit F une fonction C^1, $F : \mathbb{R}^+ \times \Omega$, alors le problème de Cauchy défini par :*
$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$
admet l'existence d'une unique solution maximale définie sur l'intervalle de temps $J \subset \mathbb{R}^+$ c'est à dire que J ne peut être étendu à un intervalle de temps plus grand.

Remarque. Si $\mathbf{U}$ est C^1, alors le théorème de Cauchy-Lipshitz nous permet de définir la fonction ϕ de la description Lagrangienne à partir de la description Eulerienne d'un fluide. En effet, $\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(X_0, t) = \mathbf{U}(\phi(X_0,t), t), \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ \phi(X_0, 0) = X_0 \end{cases}$ constitue alors un problème de Cauchy, et donc il existe une unique fonction ϕ, telle qu'elle soit solution maximale pour ce problème.

3 Equation de conservation de la masse

Définition 5 (Conservation de la masse)**.** Pour tout domaine régulier ω_0 compris dans Ω_0, on définit $\omega_t = \{\phi(X_0,t); X_0 \in \omega_0\}$. Soit ρ la masse volumique du fuide considéré. On dit qu'il y a conservation de la masse si pour tout domaine ω_0

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho(X,t) dt = 0 \ .$$

Définition 6. soit $\mathbf{U}$ la vitesse des particules d'un fluide, telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} : \Omega \times [0, +\infty[&\mapsto \mathbb{R}^3 \\ (X,t) &\mapsto \mathbf{U}(X,t) = \left(\mathbf{U}_x(X,t), \mathbf{U}_y(X,t), \mathbf{U}_z(X,t)\right)^T. \end{aligned}$$

On définit la divergence de $\mathbf{U}$ que l'on note $\text{div}\mathbf{U} = \nabla_X \cdot \mathbf{U} = \partial_x \mathbf{U}_x + \partial_y \mathbf{U}_y + \partial_z \mathbf{U}_z \in \mathbb{R}$ et $J_X\mathbf{U}$ sa matrice jacobienne :

$$J_X\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \partial_x \mathbf{U}_x & \partial_y \mathbf{U}_x & \partial_z \mathbf{U}_x \\ \partial_x \mathbf{U} y & \partial_y \mathbf{U}_y & \partial_z \mathbf{U}_y \\ \partial_x \mathbf{U}_z & \partial_y \mathbf{U}_z & \partial_z \mathbf{U}_z \end{pmatrix} .$$

Soit A une fonction matricielle, telle que A : $\Omega \times [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A : (X,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} A_{11}(X,t) & A_{12}(X,t) & A_{13}(X,t) \\ A_{21}(X,t) & A_{22}(X,t) & A_{23}(X,t) \\ A_{31}(X,t) & A_{32}(X,t) & A_{33}(X,t) \end{pmatrix},$$

on définit la divergence en X de A, notée $\nabla_X \cdot A$ ou div$A$ par :

$$\nabla_X \cdot A = \begin{pmatrix} \partial_x A_{11}(X,t) + \partial_y A_{12}(X,t) + \partial_z A_{13}(X,t) \\ \partial_x A_{21}(X,t) + \partial_y A_{22}(X,t) + \partial_z A_{23}(X,t) \\ \partial_x A_{31}(X,t) + \partial_y A_{32}(X,t) + \partial_z A_{33}(X,t) \end{pmatrix}$$

Définition 7. Soient a et b, deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on définit le produit tensoriel de a par b, noté $a \otimes b$, comme le vecteur de $\mathbb{R}^{d^2}$ composé de d blocs, tel que $\forall i \in [\![1, d]\!]$, en notant a_i la i-ième composante du vecteur a, et $(a \otimes b)_i$ le i-ième bloc du vecteur $a \otimes b$,
$(a \otimes b)_i = (a_i \times b) \in \mathbb{R}^d$.

Théorème 3.1 (Equation de continuité)**.** *Soit ϕ le flot associé à la description lagrangienne d'une fluide. On suppose que ϕ soit un C^1-difféomorphisme. On note ρ la masse volumique, et $\boldsymbol{U}$ la vitesse du fluide que l'on souhaite décrire, et on suppose que ces deux fonctions soient C^1. Alors, l'équation locale de conservation de la masse est donnée par :*

$$\partial_t \rho(X,t) + \nabla_X \cdot \big(\rho(X,t)\, \boldsymbol{U}(X,t)\big) = 0$$

Pour tout $X \in \omega_t$ et tout $t > 0$.

Preuve du Théorème 3.1. Soit $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3, \omega_0$ un domaine régulier compris dans Ω_0, et soit $\omega_t = \phi(\omega_0, t)$. On définit $\mathcal{M}(t) = \int_{\omega_t} \rho(X,t)dt$.
On ne peut utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral car le domaine d'intégration ω_t dépend du paramètre t. On cherche donc à effectuer un changement de variable.
On sait que $\mathbf{U}(\phi((X_0,t),t) = \partial_t \phi(X_0,t)$, et que ϕ est un C^1-difféomorphisme. En notant $J_\phi(X_0,t)$ la jacobienne de ϕ au point X_0, on obtient alors :

$$\mathcal{M}(t) = \int_{\omega_0} \rho(\phi(X_0,t),t)|det(J_\phi(X_0,t))|dX_0$$

On sait que ϕ est de classe C^1, on peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral, ce qui nous donne en utilisant la règle de la chaîne :

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt}(t) = \int_{\omega_0} \Bigg[\partial_t \rho(\phi(X_0,t),t) + J_X \rho(\phi(X_0,t),t) \cdot \partial_t \phi(X_0,t)\Bigg] |det(J_\phi(X_0,t))| + \rho(\phi(X_0,t),t)\partial_t(|det(J_\phi(X_0,t))|)dX_0 = 0$$

En utilisant la définition de la vitesse, il vient :

$$\int_{\omega_0} \Bigg[\partial_t \rho(\phi(X_0,t),t) + J_X \rho(\phi(X_0,t),t) \cdot \mathbf{U}(\phi(X_0,t),t)\Bigg] |det(J_\phi(X_0,t))| + \rho(\phi(X_0,t),t)\partial_t(|det(J_\phi(X_0,t))|)dX_0 = 0 \quad (1)$$

Lemme 3.2. *Soit ϕ un C^1-difféomorphisme, telle que $\phi(\cdot,0) = Id_{\Omega_0}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $X_0 \in \Omega_0$, $det(J_\phi(X_0,t)) > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$, et de plus,*

$$\begin{cases} \partial_t(det(J_\phi(X_0,t))) = \Big(\nabla_X \cdot \boldsymbol{U}(\phi(X_0,t),t)\Big) det(J_\phi(X_0,t)) \\ det(J_\phi(X_0,0)) = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Par hypothèse, $\phi(\cdot,0) = \mathrm{Id}_{\Omega_0}$. On en déduit donc que $J_\phi(X_0,0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, et ainsi $det(J_\phi(X_0,0)) = 1$.

ϕ étant un C^1-difféomorphisme de Ω_0 dans Ω_t, on peut exploiter ce résultat de calcul différentiel :

$$J_{\phi^{-1}}(\phi(X_0,t)) = \Bigg[J_\phi(X_0,t)\Bigg]^{-1}$$

On en déduit que J_ϕ est toujours inversible, donc $det(J_\phi)$ n'est jamais nul. On sait que J_ϕ est continue en X_0 et en t. Par composition de fonctions continues, $det(J_\phi(X_0,t))$ est continue en X_0 et en t, et ne s'annule pas, donc $det(J_\phi(X_0,t)$ est de signe constant. Comme $det(J_\phi(X_0,0)) = 1$, il vient
$det(J_\phi(X_0,t)) > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Il reste à démontrer le premier point du lemme. On rappelle que par définition de la vitesse, on a : $\partial_t \phi(X_0, t) = \mathbf{U}(\phi(X_0, t), t)$

Lemme 3.3. *si ϕ est le flot d'un fluide en milieu continu, et est de classe C^2, et si $\boldsymbol{U}$ la vitesse de ce fluide est une fonction de classe C^1, alors :*

$$\partial_t (J_\phi(X_0, t)) = J_X \, \boldsymbol{U}(\phi(X_0, t), t) J_\phi(X_0, t)$$

Démonstration. Pour simplifier la preuve, on se place dans le cas où $\phi(X_0, t) = (\phi_1(X_0, t), \phi_2(X_0, t))^T$, à savoir en deux dimensions.
On a alors :

$$\partial_t \phi(X_0, t) = \begin{pmatrix} \partial_t \phi_1(X_0, t) \\ \partial_t \phi_2(X_0, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1(\phi(X_0, t), t) \\ \mathbf{U}_2(\phi(X_0, t), t) \end{pmatrix}$$

$$\partial_x \partial_t \phi(X_0, t) = \partial_x \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1(\phi(X_0, t), t) \\ \mathbf{U}_2(\phi(X_0, t), t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x(\mathbf{U}_1(\phi_1(X_0, t), \phi_2(X_0, t), t)) \\ \partial_x(\mathbf{U}_2(\phi_1(X_0, t), \phi_2(X_0, t), t)) \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne en utilisant la règle de la chaîne :

$$\partial_x \partial_t \phi(X_0, t) = \begin{pmatrix} \partial_x \mathbf{U}_1(\phi(X_0, t), t) \partial_x \phi_1(X_0, t) + \partial_y \mathbf{U}_1(\phi(X_0, t), t) \partial_x \phi_2(X_0, t) \\ \partial_x \mathbf{U}_2(\phi(X_0, t), t) \partial_x \phi_1(X_0, t) + \partial_y \mathbf{U}_2(\phi(X_0, t), t) \partial_x \phi_2(X_0, t) \end{pmatrix}$$

En regroupant les termes et en utilisant le fait que la hessienne est symétrique par le lemme de Schwarz, on obtient :

$$\partial_x \partial_t \phi(X_0, t) = \partial_t \partial_x \phi(X_0, t) = \begin{pmatrix} \partial_x \mathbf{U}_1(\phi(X_0, t), t) & \partial_y \mathbf{U}_1(\phi(X_0, t), t) \\ \partial_x \mathbf{U}_2(\phi(X_0, t), t) & \partial_y \mathbf{U}_2(\phi(X_0, t), t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \phi_1(X_0, t) \\ \partial_x \phi_2(X_0, t) \end{pmatrix}$$

On peut procéder de même en dérivant par y, ce qui nous donne :

$$\partial_t \partial_y \phi(X_0, t) = \begin{pmatrix} \partial_y \mathbf{U}_1(\phi(X_0, t), t) & \partial_y \mathbf{U}_1(\phi(X_0, t), t) \\ \partial_x \mathbf{U}_2(\phi(X_0, t), t) & \partial_y \mathbf{U}_2(\phi(X_0, t), t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_y \phi_1(X_0, t) \\ \partial_y \phi_2(X_0, t) \end{pmatrix}$$

On rappelle que

$$\partial_t J_\phi(X_0, t) = \partial_t \begin{pmatrix} \partial_x \phi_1(X_0, t) & \partial_y \phi_1(X_0, t) \\ \partial_x \phi_2(X_0, t) & \partial_y \phi_2(X_0, t) \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet de conclure la preuve. □

On utilise une nouvelle fois la règle de la chaîne pour aboutir à la conclusion de la preuve du lemme 3.2 :

$$\partial_t det(J_\phi(X_0, t)) = Tr[det(J_\phi(X_0, t))(J_\phi(X_0, t))^{-1}) \partial_t J_\phi(X_0, t)]$$

En injectant le résultat du Lemme 3.3, il vient :

$$\partial_t det(J_\phi(X_0, t)) = det(J_\phi(X_0, t)) Tr[(J_\phi(X_0, t)^{-1} J_X \mathbf{U}(\phi(X_0, t), t) J_\phi(X_0, t))]$$

Comme pour tout A et $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $Tr(AB) = Tr(BA)$, on obtient :

$$\partial_t det(J_\phi(X_0, t)) = det(J_\phi(X_0, t)) Tr(J_X \mathbf{U}(\phi(X_0, t), t)) = det(J_\phi(X_0, t)) \nabla_X \cdot \mathbf{U}(\phi(X_0, t), t)$$

Car la divergence de $\mathbf{U}$ est définie comme la trace de la matrice jacobienne de $\mathbf{U}$. □

En injectant les résultats du Lemme 3.2 dans l'équation (1), on obtient :

$$\int_{\omega_0} \left[\partial_t \rho(\phi(X_0, t), t) + \nabla_X \rho(\phi(X_0, t), t) \cdot \mathbf{U}(\phi(X_0, t), t) + \rho(\phi(X_0, t), t) \nabla_X \cdot \mathbf{U}(\phi(X_0, t), t) \right] det(J_\phi(X_0, t)) dX_0 = 0$$

On utilise alors le changement de variables inverse $(\phi(\cdot, t))^{-1}$,où t est fixé, ce qui nous donne,

$$\int_{\omega_t} \left[\partial_t \rho(X, t) + \nabla_X \rho(X, t) \cdot \mathbf{U}(X, t) + \rho(X, t) \nabla_X \cdot \mathbf{U}(X, t) \right] dX = 0$$

et donc

$$\int_{\omega_t} \left[\partial_t \rho(X, t) + \nabla_X \cdot \Bigg(\rho(X, t) \mathbf{U}(X, t) \Bigg) \right] = 0 \quad (2)$$

Soit U un ouvert connexe régulier de $\mathbb{R}^3$, on pose $\omega_0 = (\phi(\cdot,t))^{-1}(U)$, alors $\Omega_t = U$.On peut faire le raisonnement précédent sur tout sous ensemble de Ω_t, et en particulier sur toute boule ouverte comprise dans Ω_t. On peut alors exploiter le théorème suivant :

Théorème 3.4. *Soit $\phi \in L^1(\Omega)$, où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si pour toute boule ouverte $\mathcal{B}$ comprise dans Ω, on a :*

$$\int_{\mathcal{B}} \phi(X)dX = 0$$

alors, $\phi(X) = 0$ pour presque tout $X \in \Omega$.

Remarque. La démonstration du Théorème 3.4 se trouve en annexe.

En appliquant ce théorème à l'équation (2), il vient $\partial_t\rho(X,t) + \nabla_X \cdot \Bigg(\rho(X,t)\mathbf{U}(X,t)\Bigg) = 0$ pour presque tout $X \in \Omega_t$, et $\forall t \in \mathbb{R}^+$. De plus, ρ et $\mathbf{U}$ sont des fonctions de classe C^1 par hypothèse, donc ceci est vrai pour tout $X \in \Omega_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. $\square$

4 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Définition 8. Loi fondamentale de la mécanique de Newton
On note m la masse, $\vec{\gamma}$ l'accélération, et $\vec{F_i}$ les forces exercées sur le fluide que l'on étudie. La loi fondamentale de la mécanique est alors donnée par :

$$m\vec{\gamma} = \sum_i \vec{F_i}$$

Définition 9. Les forces exercées sur le fluide forment deux catégories distinctes : les *forces extérieures*, et les *forces intérieures*.
- Les forces extérieures dépendent du milieu que l'on étudie. Pour modéliser l'océan, on s'attachera à étudier la force de gravité $\vec{g} = -g\vec{e_z}$, où g représente l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre, et $\vec{e_z}$ le troisième vecteur canonique du référentiel terrestre, pointant vers le haut.
- Les forces intérieures représentent les efforts que chaque sous-domaine de ω_t exerce sur les autres. Par la suite, on ne considérera que la force exercée par la pression interne du fluide notée p.
Ces forces sont modélisées par :

$$\sum_i \vec{F_i} = -g\int_{\omega_t} \rho(X,t)\vec{e_z}dX - \int_{\partial\omega_t} p(X,t)\vec{n}(X)d\mu$$

où $d\mu$ représente la mesure superficielle de l'espace $\partial\omega_t$ (3), et $\vec{n}(X)$ est le vecteur normal unitaire sortant en $X \in \partial\omega_t$ (4).

Définition 10. Sous l'hypothèse des milieux continus, en supposant que le fluide occupe un domaine $\Omega_t = \phi(X_0,t) \subset \mathbb{R}^d$, où ϕ est un C^2-difféomorphisme, et en notant $\mathbf{U}$ sa vitesse et ρ sa masse volumique, on note $\vec{q}$ la quantité de mouvement

$$\vec{q} = \int_{\Omega_t} \rho(X,t)\mathbf{U}(X,t)dX$$

Lemme 4.1. *Sous les mêmes conditions que celles énoncées dans la définition précédente, on a la relation suivante :*

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \int_{\Omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Bigg(\rho(X,t)\,\boldsymbol{U}(X,t)\Bigg) + \begin{pmatrix} \nabla_X \cdot \Bigg(\rho(X,t)\,\boldsymbol{U}_x(X,t)\,\boldsymbol{U}(X,t)\Bigg) \\ \nabla_X \cdot \Bigg(\rho(X,t)\,\boldsymbol{U}_y(X,t)\,\boldsymbol{U}(X,t)\Bigg) \\ \nabla_X \cdot \Bigg(\rho(X,t)\,\boldsymbol{U}_z(X,t)\,\boldsymbol{U}(X,t)\Bigg) \end{pmatrix}\right]dX$$

(3). La mesure superficielle d'une surface de $\mathbb{R}^3$ est définie en annexe.
(4). On supposera qu'il existe toujours un vecteur normal sortant pour les volumes considérés.

$$= \int_{\Omega_t} \left[\partial_t\big(\rho(X,t)\,\boldsymbol{U}(X,t)\big) + \nabla_X \cdot \big(\rho(X,t)\,\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{U}(X,t)\big) \right] dX$$

Démonstration. On applique la méthode utilisée pour démontrer l'équation de conservation de la masse à

$$\partial_t\Big(\int_{\Omega_t} \rho(X,t)\mathbf{U}_x(X,t)dX\Big), \partial_t\Big(\int_{\Omega_t} \rho(X,t)\mathbf{U}_y(X,t)dX\Big), \text{et } \partial_t\Big(\int_{\Omega_t} \rho(X,t)\mathbf{U}_z(X,t)dX\Big).$$

□

Remarque. Sous les hypothèses du théorème 3.1,

$$\begin{aligned}
&\partial_t(\rho(X,t)\mathbf{U}(X,t)) + \nabla_X \cdot (\rho(X,t)\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}(X,t)) \\
&= \partial_t(\rho(X,t))\mathbf{U}(X,t)) + \rho(X,t)\partial_t(\mathbf{U}(X,t)) + \nabla_X \cdot (\rho(X,t)\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}(X,t)) \\
&= -\nabla_X \cdot (\rho(X,t)\mathbf{U}(X,t))\mathbf{U}(X,t) + \rho(X,t)\partial_t(\mathbf{U}(X,t)) + \nabla_X \cdot (\rho(X,t)\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}(X,t)) \\
&= \rho(X,t)\partial_t\mathbf{U}(X,t) + \rho(X,t)(\mathbf{U}(X,t) \cdot \nabla)\mathbf{U}(X,t)
\end{aligned}$$

Où $(\mathbf{U}(X,t) \cdot \nabla)\mathbf{U}(X,t) = (\mathbf{U}_x\partial_x + \mathbf{U}_y\partial_y + \mathbf{U}_z\partial_z) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_x \\ \mathbf{U}_y \\ \mathbf{U}_z \end{pmatrix}$

Théorème 4.2. *On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, le fluide occupe un domaine $\omega_t \subset \mathbb{R}^3$, et possède une masse volumique ρ et une vitesse $\boldsymbol{U}$.*
On note p la pression interne exercée par le fluide sur la paroi, et $g\vec{e_z}$ la force de gravitation. On suppose que p soit une fonction C^1 sur $\mathbb{R} \times \Omega_t$.
alors, pour tout $X \subset \omega_t$, et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\partial_t\big(\rho(X,t)\,\boldsymbol{U}(X,t)\big) + \nabla_X \cdot (\rho(X,t)\,\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{U}(X,t)) + \nabla p(X,t) = -g\rho(X,t)\vec{e}_z$$

Par la remarque précédente, sous les hypothèses du théorème 3.1,

$$\rho(X,t)\partial_t\boldsymbol{U}(X,t) + \rho(X,t)(\,\boldsymbol{U}(X,t) \cdot \nabla_X)\,\boldsymbol{U}(X,t) + \nabla p(X,t) = -g\rho(X,t)\vec{e}_z$$

Démonstration. D'après la deuxième loi de Newton,

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \sum_i \vec{F_i} = -g\int_{\omega_t} \rho(X,t)\vec{e_z}dX - \int_{\partial\omega_t} p(X,t)\vec{n}(X)d\mu$$

Or, en utilisant le théorème du gradient, on obtient :

$$\int_{\partial\omega_t} p(X,t)\vec{n}(X)d\mu = \int_{\omega_t} \nabla p(X,t)dX$$

ce qui nous donne, en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\int_{\omega_t} \left[\partial_t(\rho(X,t)\mathbf{U}(X,t)) + \nabla_X \cdot (\rho(X,t)\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}(X,t)) + \nabla_X p(X,t) + g\rho(X,t)\vec{e_z}dX \right] = 0$$

Pour finir, on utilise à nouveau le théorème 3.3, et on étend le résultat à tout l'ensemble Ω_t car les fonctions $\rho, \mathbf{U}$ et p sont continues par hypothèse. □

Deuxième partie

Modélisation de l'océan

5 Hypothèses physiques

(i) Le domaine fluide est un domaine de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Le fond de l'océan est supposé plat. Si une particule appartient au fond, alors ses coordonnées sont $X = (x, y, -H)$, où $H \in \mathbb{R}_*^+$ est fixé et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) La masse volumique de l'océan est supposé constante. On a donc $\forall X \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}^+$, $\rho(X, t) = \rho_0 \in \mathbb{R}_*^+$.

(iv) On suppose que la surface de l'océan peut être modélisée par un graphe. Si une particule appartient à la surface, alors ses coordonnées sont $X = \big(x, y, \zeta(x, y, t)\big)$

(v) La pression atmosphérique p_0 de l'air est supposée constante.

(vi) On suppose que les particules d'eau de l'océan ne traversent ni la surface ni le fond. Une particule qui se trouve au fond ou la surface reste donc au fond ou à la surface. Le domaine fluide étudié est ainsi $\Omega_t = \{(x, y, z), z \in]-H, \zeta\big(x, y, t\big)[\ \}$.

(vii) On fait l'hypothèse de non viscosité du fluide, ce qui signfie qu'à l'intérieur du domaine fluide, il n'y a pas de frottement entre les particules.

(viii) On suppose qu'il y a continuité de la pression à la surface. Ainsi, pour $z = \zeta(x, y, t)$, $p = p_0$.

(ix) Enfin, le fluide est supposé irrotationnel.

Remarque. Les inconnues du système étudié sont donc la vitesse $\mathbf{U}$, la pression interne p, et le graphe $\zeta\big(x, y, t\big)$ déterminant la surface.
On rappelle que $\vec{e_z}$ est le troisième vecteur canonique du plan, et pointe vers le haut, de sorte que la force de gravité soit $-g\vec{e_z}$.

6 Conséquences sur les équations de conservation

6.1 Volume incompressible

Soit $\mathbf{U}$ la vitesse du fluide considéré, alors le théorème 3.1 et l'hypothèse (iii) de la section 5 nous donne :

$$\forall X \in \Omega_t, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \nabla_X \cdot \mathbf{U}(X, t) = 0.$$

La divergence traduit les fluxs entrants et sortants, donc le fait que la divergence de la vitesse soit nulle en tout point du fluide considéré signifie que le volume du fluide reste constant.

6.2 Fluide irrotationnel

Définition 11. Soit u une fonction, telle que $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. On note u_1, u_2, u_3 les trois composantes de u. On définit le rotationnel de u, noté $rotu$, par le vecteur suivant :

$$rot\ u = \begin{pmatrix} \partial_y u_3 - \partial_z u_2 \\ \partial_z u_1 - \partial_x u_3 \\ \partial_x u_2 - \partial_y u_1 \end{pmatrix}$$

Le rotationnel traduit localement la rotation que subissent les particules de fluide. [5]

L'hypothèse (ix) nous donne donc $rot\ \mathbf{U} = 0$, soit le système suivant : $\begin{cases} \partial_y \mathbf{U}_3 - \partial_z \mathbf{U}_2 = 0 \\ \partial_z \mathbf{U}_1 - \partial_x \mathbf{U}_3 = 0 \\ \partial_z \mathbf{U}_2 - \partial_y \mathbf{U}_1 = 0 \end{cases}$

(5). Pour plus de détails sur l'interprétation physique du rotationnel, Voir p95, *Le petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, François Rouvière, Editions Cassini.

6.3 Comportement du fluide à la frontière de Ω_t

6.3.1 Comportement du fluide au fond

Soit $M(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \Omega_t$, la position d'une particule du fond de l'océan, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.
D'après les hypothèses (ii) et (vi), $M(t) = \big((x(t), y(t), z(t)\big)$ où $z(t) = -H$, donc $\frac{d}{dt}\big(z(t)\big) = 0$. La vitesse étant définie comme la dérivée de la position en fonction du temps, pour toute particule du fond,

$$\mathbf{U}(X,t) \cdot e_z = 0.$$

6.3.2 Comportement du fluide à la surface

On utilise la description lagrangienne d'un fluide. Soit $M(t) = \phi\big(x_0, y_0, z_0, t\big) \in \Omega_t$, la position d'une particule de la surface de l'océan en $t = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.
D'après les hypothèses (iv) et (vi), $z_0 = \zeta\big(x_0, y_0, 0\big)$ et, $\forall t \in \mathbb{R}^+, z(t) = \zeta\big(x(t), y(t), t\big)$.
En dérivant et en utilisant la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(\zeta\big(x(t), y(t), t\big)\big) &= J_{(x,y)}\zeta\big(x(t), y(t), t\big) \cdot (x'(t), y'(t))^T + \partial_t \zeta\big(x(t), y(t), t\big) \\
&= (x'(t), y'(t)) \cdot \nabla_{(x,y)}\zeta\big(x(t), y(t), t)\big) + \partial_t \zeta(x(t), y(t), t)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\partial_t \zeta\big(x(t), y(t), t\big) = \frac{d}{dt} z(t) - (x'(t), y'(t)) \cdot \nabla_{(x,y)}\zeta\big(x(t), y(t), t\big)$
On note $\overrightarrow{N} = \big(-\nabla_{(x,y)}\zeta\big(x(t), y(t), t), 1\big)^T$ le vecteur sortant normal à la surface. A la surface, en regroupant les termes dans l'équation précédente, on obtient :

$$\partial_t \zeta\big(x(t), y(t), t\big) = \mathbf{U}(X,t) \cdot \overrightarrow{N}$$

6.4 Bilan des équations vérifiées par les particules de l'océan

En divisant par ρ_0 l'équation obtenue par le théorème 3.2, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \partial_t(\mathbf{U}(X,t)) + (\mathbf{U}(X,t) \cdot \nabla_X)\mathbf{U}(X,t) + \frac{\nabla p(X,t)}{\rho_0} = -g\vec{e_z}$$

En notant z la troisième coordonnée dans $\mathbb{R}^3$ de la particule de fluide considérée, le système d'équations que vérifie le fluide est alors, $\forall X \in \Omega_t, \forall t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases}
\partial_t(\mathbf{U}(X,t)) + (\mathbf{U}(X,t) \cdot \nabla_X)\mathbf{U}(X,t) + \dfrac{\nabla p(X,t)}{\rho_0} = -g\vec{e_z} & (1)\\
\nabla_X \cdot \mathbf{U}(X,t) = 0 & (2)\\
\partial_y \mathbf{U}_3(X,t) = \partial_z \mathbf{U}_2(X,t), \partial_z \mathbf{U}_1(X,t) = \partial_x \mathbf{U}_3(X,t) \text{ et } \partial_x \mathbf{U}_2(X,t) = \partial_y \mathbf{U}_1(X,t) & (3)\\
\mathbf{U}(X,t) \cdot e_z = 0, \text{ si } z = -H, & (4)\\
\partial_t \zeta\big(x(t), y(t), t\big) = \mathbf{U}(X,t) \cdot \overrightarrow{N}, \text{ si } z = \zeta\big(x(t), y(t), t\big) & (5)\\
p = p_0, \text{ si } z = \zeta\big(x(t), y(t), t\big) & (6)
\end{cases}$$

Pour simplifier l'étude de système, on cherche à intégrer $g\vec{e_z}$ à l'un des paramètres. On rappelle que $p_H = -\rho(X,t)g\vec{e_z}$ représente la pression hydrostatique, c'est à dire la pression résultant de l'action du poids de l'eau sur la surface d'un corps que l'on immerge. On pose donc

$$q = \frac{p(X,t) - p_0 + \rho_0 g\vec{e_z}}{\rho_0},$$

où q traduit les effets non hydrostatiques de la pression. A la surface de l'océan, d'après l'équation (5) du système, et par l'hypothèse (iii), $q = \frac{p_0 - p_0 + \rho_0 g\zeta(x(t), y(t), t)}{\rho_0} = g\zeta(x(t), y(t), t)$.
De plus, $\nabla q(X,t) = \frac{\nabla p(X,t)}{\rho_0} - gz(t), \forall X \in \Omega_t, \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Le système S que l'on étudie est alors

$$\begin{cases} \partial_t(\mathbf{U}(X,t)) + (\mathbf{U}(X,t)\cdot\nabla_X)\mathbf{U}(X,t) + \nabla q(X,t) = 0 & (1)\\ \nabla_X \cdot \mathbf{U}(X,t) = 0 & (2)\\ \partial_y \mathbf{U}_3(X,t) = \partial_z \mathbf{U}_2(X,t), \partial_z \mathbf{U}_1(X,t) = \partial_x \mathbf{U}_3(X,t) \text{ et } \partial_x \mathbf{U}_2(X,t) = \partial_y \mathbf{U}_1(X,t) & (3)\\ \mathbf{U}(X,t)\cdot e_z = 0 & (4)\\ \partial_t \zeta\big(x(t),y(t),t\big) = \mathbf{U}(X,t)\cdot \overrightarrow{N}, \text{ si } z = \zeta\big(x(t),y(t),t\big) & (5)\\ q(X,t) = g\zeta(x(t),y(t),t), \text{ si } z = \zeta\big(x(t),y(t),t\big) & (6) \end{cases}$$

7 Etude asymptotique du système S

7.1 Hypothèses quant au comportement des vagues loin des côtes

7.1.1 Hypothèse de petites amplitudes

On fait l'hypothèse que les ondes étudiées présentent de petites amplitudes. On rappelle que l'amplitude d'une onde est sa hauteur divisée par 2. Cela se traduit par le fait que l'on puisse remplacer l'étude de $\big(\zeta, \mathbf{U}, q\big)$, par celle de $\big(\varepsilon\zeta, \varepsilon\mathbf{U}, \varepsilon q\big), \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$, avec ε très petit.

7.1.2 Hypothèse d'ondes longues

On fait l'hypothèse que les ondes présentes en pleine mer soient des ondes longues. Cela signifie que la longueur de la vague est grande par rapport à la hauteur d'eau moyenne [(6)]. Cela se traduit par le fait que l'on puisse introduire $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z},\widetilde{t})$, et remplacer l'étude de (X,t) par celle de $\big(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},\widetilde{z},\varepsilon\widetilde{t}\big), \forall\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$, avec ε très petit.

7.2 Conséquences des hypothèses sur le système S

Les hypothèses du paragraphe 7.1 nous permettent d'introduire les variables $\big(\widetilde{\zeta},\widetilde{\mathbf{U}},\widetilde{q}\big)$, telles que :

$$\begin{cases} \zeta(x,y,t) = \varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},\varepsilon\widetilde{t})\\ \mathbf{U}(X,t) = \varepsilon\widetilde{\mathbf{U}}(\varepsilon x,\varepsilon\widetilde{y},\widetilde{z},\varepsilon\widetilde{t})\\ q(X,t) = \varepsilon\widetilde{q}(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},\widetilde{z},\varepsilon\widetilde{t}) \end{cases}$$

Par la suite, on désignera par $\widetilde{X}$ le vecteur $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$, par $\widetilde{Y}$ le vecteur $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ et par $\widetilde{X}_\varepsilon$ le vecteur $(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},\widetilde{z})$. On pose également $\widetilde{\mathbf{U}} = (\widetilde{V},\widetilde{w})^T$, où $\widetilde{V} \in \mathbb{R}^2$ désigne la vitesse horizontale et $\widetilde{w} \in \mathbb{R}$ désigne la vitesse verticale. On note $\widetilde{V_1}$ et $\widetilde{V_2}$ les deux composantes du vecteur $\widetilde{V}$.
Si $(z,\mathbf{U},q)$ vérifie le système S, alors $(\widetilde{z},\widetilde{\mathbf{U}},\widetilde{q})$ vérifie le système suivant, que l'on appellera $\widetilde{S}$, $\forall\widetilde{X} \in \widetilde{\Omega} = \{(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}), \widetilde{z} \in]-H,\varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{X},\widetilde{t})[\}$:

$$\begin{cases} \varepsilon^2\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) + \varepsilon^3(\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\cdot\nabla_{\widetilde{Y}})\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) + \varepsilon^2\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\cdot\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) + \varepsilon^2\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) = 0 \quad (1.a)\\ \varepsilon^2\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) + \varepsilon^3(\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\cdot\nabla_{\widetilde{Y}})\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) + \varepsilon^2\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\cdot\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) + \varepsilon\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) = 0 \quad (1.b)\\ \varepsilon\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) + \partial_{\widetilde{z}}\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) = 0 \quad (2)\\ \varepsilon\partial_{\widetilde{y}}\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) = \partial_{\widetilde{z}}\widetilde{V}_2(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}), \partial_{\widetilde{z}}\widetilde{V}_1(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) = \varepsilon\partial_{\widetilde{x}}\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) \text{ et } \partial_{\widetilde{x}}\widetilde{V}_2(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) = \partial_{\widetilde{y}}\widetilde{V}_1(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) \quad (3)\\ \widetilde{w}((\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) = 0, \text{ si } \widetilde{z} = -H, \quad (4)\\ \varepsilon^2\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}) + \varepsilon^3\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\nabla\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}) - \varepsilon\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) = 0, \text{ si } \widetilde{z} = \varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}) \quad (5)\\ \widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) = g\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}), \text{ si } \widetilde{z} = \varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}) \quad (6) \end{cases}$$

En simplifiant l'écriture du système $\widetilde{S}$, on obtient :

(6). Cette hypothèse est vérifiée pour les vagues de longueur d'onde supérieure à mille mètres.

$$\begin{cases} \partial_t\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})+\varepsilon(\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\cdot\nabla_{\widetilde{Y}})\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})+\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\cdot\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})+\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=0 \quad (1.a)\\ \varepsilon\partial_t\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})+\varepsilon^2(\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\cdot\nabla_{\widetilde{Y}})\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})+\varepsilon\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\cdot\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})+\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=0 \quad (1.b)\\ \varepsilon\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})+\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=0 \quad (2)\\ \varepsilon\partial_{\widetilde{y}}\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{V}_2(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}),\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{V}_1(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=\varepsilon\partial_{\widetilde{x}}\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) \text{ et } \partial_{\widetilde{x}}\widetilde{V}_2(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=\partial_{\widetilde{y}}\widetilde{V}_1(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t}) \quad (3)\\ \widetilde{w}((\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=0, \text{ si } \widetilde{z}=-H \quad (4)\\ \varepsilon\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})+\varepsilon^2\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\nabla\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})-\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=0, \text{ si } \widetilde{z}=\varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}) \quad (5)\\ \widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=g\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}), \text{ si } \widetilde{z}=\varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}) \quad (6) \end{cases}$$

Ce qui nous donne le système $\widetilde{S}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} \partial_t\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})+\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\cdot\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})+\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=O(\varepsilon) \quad (1.a)\\ \partial_{\widetilde{z}}\widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=O(\varepsilon) \quad (1.b)\\ \partial_{\widetilde{z}}\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=O(\varepsilon) \quad (2)\\ \partial_{\widetilde{z}}\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=O(\varepsilon) \quad (3)\\ \widetilde{w}\ \widetilde{w}((\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=0, \text{ si } \widetilde{z}=-H \quad (4)\\ \widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=O(\varepsilon), \text{ si } \widetilde{z}=\varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}) \quad (5)\\ \widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=g\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}), \text{ si } \widetilde{z}=\varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}) \quad (6) \end{cases}$$

7.3 Obtention d'une première équation

L'étude du système $\widetilde{S}_\varepsilon$ défini dans le paragraphe précédent nous donne :
$\forall\widetilde{z}\in[-H,\varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})],\forall\widetilde{t}\in\mathbb{R}_*^+$,

$$\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=\widetilde{w}(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},-H,\varepsilon\widetilde{t})+\int_{-H}^{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{w}(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},s,\varepsilon\widetilde{t})ds$$

Or, par l'équation (4), $\widetilde{w}(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},-H,\varepsilon\widetilde{t})=0$, et, par l'équation (2), $\forall\widetilde{z}\in[-H,\varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})],\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{w}(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},\widetilde{z},\varepsilon\widetilde{t})=O(\varepsilon)$ On en conclut que

$$\forall\widetilde{X}\in\widetilde{\Omega},\forall\widetilde{t}\in\mathbb{R}_*^+,\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=O(\varepsilon).$$

Et de plus, en procédant de la même manière pour $\widetilde{q}$,
$\forall\widetilde{z}\in[-H,\varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})],\forall\widetilde{t}\in\mathbb{R}_*^+$,

$$\widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=\widetilde{q}(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}),\varepsilon\widetilde{t})+\int_{\varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})}^{\widetilde{z}}\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{q}(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},s,\varepsilon\widetilde{t})ds+O(\varepsilon)$$

Or, d'après l'équation (6), $\widetilde{q}(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}),\varepsilon\widetilde{t})=g\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})$, et, par l'équation (1.b), $\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{q}(\varepsilon\widetilde{x},\varepsilon\widetilde{y},\widetilde{z},\varepsilon\widetilde{t})=O(\varepsilon),\forall\widetilde{z}\in[-H,\varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})]$.
On en conclut que

$$\forall\widetilde{X}\in\widetilde{\Omega},\forall\widetilde{t}\in\mathbb{R}_*^+,\widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=g\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})+O(\varepsilon)$$

Remarque. En particulier, ce résultat signifie que la déviation par rapport à la pression hydrostatique q est indépendante de la troisième coordonnée de la particule dans le plan $\mathbb{R}^3$.

En conclusion, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=O(\varepsilon) \quad (A)\\ \widetilde{q}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=g\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})+O(\varepsilon) \quad (B)\\ \partial_{\widetilde{t}}V(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})+g\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})=O(\varepsilon) \quad (C) \end{cases}$$

7.4 Obtention d'une seconde équation

On ne peut déduire de résultat probant du système qui conclue le paragraphe précédent, car on ne dispose pas d'équation sur $\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\zeta}$. On décide donc de revenir à l'étude à l'étude du système $\widetilde{S}$. On rappelle l'équation (4) :

$$\text{si } \widetilde{z}=\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t}),\quad \varepsilon\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y},\varepsilon\widetilde{t})+\varepsilon^2\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})\nabla\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y})-\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon,\varepsilon\widetilde{t})=0$$

L'idée est alors d'établir un développement limité de $\widetilde{w}$ à l'ordre 2, ce qui nous donnera un développement limité de $\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\zeta}$ à l'ordre 1.
D'après l'équation (2) du système $\widetilde{S}$,

$$\varepsilon \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) + \partial_{\widetilde{z}} \widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) = 0.$$

On intègre cette équation entre $-H$ et $\widetilde{z}, \forall \widetilde{z} \in [-H, \varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{t})]$, ce qui nous donne :

$$\varepsilon \int_{-H}^{\widetilde{z}} \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, s, \varepsilon\widetilde{t})ds + \int_{-H}^{\widetilde{z}} \partial_{\widetilde{z}}\widetilde{w}(\varepsilon\widetilde{Y}, s, \varepsilon\widetilde{t})ds = 0$$

Or, $\int_{-H}^{\widetilde{z}} \partial_{\widetilde{z}}\widetilde{w}(\varepsilon\widetilde{Y}, s, \varepsilon\widetilde{t})ds = \widetilde{w}(\varepsilon\widetilde{Y}, \widetilde{z}, \varepsilon\widetilde{t}) - \widetilde{w}(\varepsilon\widetilde{Y}, -H, \varepsilon\widetilde{t}) = \widetilde{w}(\varepsilon\widetilde{Y}, \widetilde{z}, \varepsilon\widetilde{t})$, par l'équation (4) du système $\widetilde{S}$.
On a donc

$$\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) = -\varepsilon \int_{-H}^{\widetilde{z}} \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, s, \varepsilon\widetilde{t})ds, \forall \widetilde{z} \in \forall \widetilde{z} \in [-H, \varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{t})]. \tag{7}$$

D'après l'équation (3) du système, $\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) = O(\varepsilon)$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) &= \widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}), \varepsilon\widetilde{t}) + \int_{\varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t})}^{\widetilde{z}} \partial_{\widetilde{z}}\widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, s, \varepsilon\widetilde{t})ds \\
&= \widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}), \varepsilon\widetilde{t}) + O(\varepsilon)
\end{aligned}$$

On injecte ce résultat dans l'équation (7), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) &= -\varepsilon \int_{-H}^{\widetilde{z}} \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, s, \varepsilon\widetilde{t})ds \\
&= -\varepsilon \int_{-H}^{\widetilde{z}} (\nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}), \varepsilon\widetilde{t}) + O(\varepsilon))ds \\
&= -\varepsilon(\widetilde{z} + H)\nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}), \varepsilon\widetilde{t}) + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Quand $\widetilde{z} = \varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t})$, il vient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}), \varepsilon\widetilde{t}) &= -\varepsilon(\varepsilon\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{t}) + H)\nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}), \varepsilon\widetilde{t}) + O(\varepsilon^2) \\
&= -\varepsilon H \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}), \varepsilon\widetilde{t}) + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le développement limité souhaité. Par l'équation (4) du système $\widetilde{S}$, on en conclut :

$$\varepsilon\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{t}) + \varepsilon H \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}), \varepsilon\widetilde{t}) = O(\varepsilon^2)$$

Ce qui nous donne, en simplifiant :

$$\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\zeta}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{t}) = -H \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}(\varepsilon\widetilde{Y}, \varepsilon\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}), \varepsilon\widetilde{t}) + O(\varepsilon) \tag{8}$$

On dérive l'équation (C) en fonction de $\widetilde{t}$, :

$$\begin{aligned}
&\partial_{\widetilde{t}}^2 \widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) + g\partial_{\widetilde{t}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) = O(\varepsilon) \\
&\partial_{\widetilde{t}}^2 \widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) + g\nabla_{\widetilde{Y}}\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\zeta}(\widetilde{Y}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) = O(\varepsilon) \text{ par le lemme de Schwarz}
\end{aligned}$$

Enfin, on injecte l'équation (8), ce qui nous donne une équation appelée équation des ondes, que l'on peut facilement résoudre en dimension 1 ou 2, si la vitesse horizontale V et le graphe de la surface ζ sont donnés :

$$\partial_{\widetilde{t}}^2 \widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) - gH\nabla_{\widetilde{Y}} \cdot \nabla_{\widetilde{Y}} V(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) = O(\varepsilon)$$

En notant Δ le laplacien, c'est à dire l'application *div* appliquée au gradient, il vient :

$$\boxed{\partial_{\widetilde{t}}^2 \widetilde{V}(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) - gH\Delta_{\widetilde{Y}} V(\widetilde{X}_\varepsilon, \varepsilon\widetilde{t}) = O(\varepsilon)}$$

Troisième partie
Annexes

8 Démonstration du Théorème 3.4

On rappelle que l'espace $\mathbb{R}^d$ est un espace séparable car $\mathbb{Q}^d$ est dense dans $\mathbb{R}^d$. [(7)]En particulier, tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ est séparable. Donc $\Omega = \bigcup_{i\in I} B_i$, où B_i une suite de boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$ et I un ensemble dénombrable.
Soit ϕ une fonction mesurable et positive, ϕ est partout limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives, notée ϕ_n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_\Omega \phi_n(X)dX \leqslant \sum_{i\in I}\int_{B_i} \phi_n(X)dX = 0.$$

Par positivité de la mesure de Lebesgue, ϕ_n est nulle pour presque tout $x \in \Omega$, et par corollaire, ϕ est nulle pour presque tout $x \in \Omega$.
Si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\phi = \phi^+ - \phi^-$, où $\phi^+ = max(\phi, 0)$ et $\phi^- = max(-\phi, 0)$. Alors, d'après ce que l'on vient de montrer pour les fonctions positives et mesurables, ϕ^+ et ϕ^- sont nulles pour presque tout $x \in \Omega$. Par linéarité de l'intégrale, ϕ est nulle pour presque tout $x \in \Omega$.

9 Définition de la mesure superficielle d'une surface

Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$, paramétrée par une submersion notée φ.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, tel que $\varphi : \Omega \to S$. Alors, à une fonction f, telle que $f : S \to \mathbb{R}$, on associe l'intégrale double

$$\int\int_S f d\mu = \int\int_\Omega f(\varphi(u,v))\sqrt{det(J_\varphi^t \cdot J_\varphi)}\ dudv$$

La mesure notée $d\mu$ ainsi définie est appelée la mesure superficielle de la surface S [(8)].

Remarque. La mesure superficielle d'une surface est invariante par reparamétrisation. On retrouve aisément ce résultat par un changement de variables.

10 Bibliographie

Théorie de la mesure et intégration, F. Bolley et R.Dujardin, notes de cours d'A. Laubert, 2013, `https://www.lpsm.paris/pageperso/bolley/3M263-poly-1819.pdf`

Introduction à la Mécanique des fluides, cours pour la troisième année du Cycle Pluridisciplinaire d'Etudes Supérieures, M. Fermigier, 2018 `https://blog.espci.fr/marcfermigier/mecanique-des-fluides/`

A simple introduction to water waves, D. Mitsotakis, 2013, `https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/805080/filename/euler1.pdf`

Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, F.Rouvière, Cassini, 2003

Cours d'équations différentielles L3 MIDO, D. Tonon, 2018-2019

Cours de master 1ère année, fillière : ingénierie mathématique à Toulouse, Modélisation aux dérivées partielles, M-H. Vignal, 2013

Quatrième partie
Remerciements

Je tiens à remercier M. Mélinand pour sa patience et la clarté de ses explications, j'ai été ravie d'effectuer ce stage et de d'entrevoir des domaines tels que la mécanique des fluides qui m'étaient totalement inconnus.

(7). Un espace métrique est séparable s'il contient une suite dense, voir Proposition 3.11, p17 du polycopié de François Bolley [`www.lpsm.paris/pageperso/bolley/3M263-poly-1819.pdf`]

(8). Voir p96 -101 *petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, F. ROUVIERE, Cassini