Bastien Bergère

MARCHES ET SCENES ALEATOIRES

Mémoire d'initiation à la recherche

Sous la direction de Monsieur **Julien Poisat**

Cycle pluridisciplinaire d'études supérieures
Troisième année (L3)

Table des matières

Introduction : Une marche aléatoire modélise l'évolution dans un graphe d'une particule se déplaçant de manière aléatoire (par la suite le graphe sera toujours $\mathbb{Z}^d$). A chaque unité de temps, la particule se déplace vers un de ses plus proches voisins dans le graphe. Dans le cas d'une marche simple, tous les sites voisins de la position où se situe la particule ont la même probabilité d'être atteint. Une marche aléatoire vérifie de plus la propriété de Markov : à chaque instant, le futur du système ne dépend que de son état présent, et en aucun cas de son passé.

Plan : On commencera par étudier le cas de la marche aléatoire simple. On montrera d'abord que celle-ci suit un comportement diffusif, puis après avoir introduit des notions propres aux chaînes de Markov, on étudiera le caractère récurrent/transient de la marche en fonction de la dimension. On se penchera ensuite sur le cas plus complexe d'une marche aléatoire en scène aléatoire et on montrera qu'on peut alors observer des comportements non-diffusifs.

1 Marche aléatoire et marche aléatoire simple (M.A.S)

Mathématiquement, il s'agit d'un processus stochastique à temps discret, i.e une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 0}$, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ définis par :
$S_0 = 0$ et $\forall n \geq 1 : S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Xi$ où les pas $(X_i)_{i\geq 1}$ sont une suite de va i.i.d définies sur un espace de probabilités (Ω, A, P) à valeurs sur les 2d vecteurs unité de $\mathbb{Z}^d$ (selon la loi uniforme dans le cas simple).

1.1 Quel est le comportement asymptotique de la M.A.S ?

Deux éléments de réponse nous sont directement donnés par la loi forte des grands nombres (LFGN) et le théorème central limite (TCL) :

- **LFGN :** $\frac{S_n}{n} \to E[X_1]$ (convergence p.s et L^1)
- **TCL :** $\sqrt{n}(\frac{S_n}{n} - E[X_1]) \to \mathcal{N}(0, V(X_1))$ (convergence en loi)

Dans le cas le plus simple où on se limite à la dimension 1 :
X_1 suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et les deux résultats théoriques précédents se réécrivent : $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s} 0$ et $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1)$
Note : Ces deux résultats sont observés et confirmés par simulations informatiques (**cf. Annexes A et B**).

On en conclut que quand n est grand, "$S_n \approx \sqrt{n}$" (i.e S_n est de l'ordre de $\sqrt{n}$). On dit que la marche aléatoire a un comportement diffusif, en allusion à l'équation de diffusion de la chaleur.

Remarque : Cette dernière conclusion est aussi valable en dimension plus grande que 1, où on peut aussi observer un comportement diffusif. On a en effet $E[\|S_n\|^2] = n$, ce qui implique grosso modo : $\|S_n\|$ de l'ordre de $\sqrt{n}$.

1.2 Chaîne de Markov, propriété de Markov, récurrence

On se limite au cas où l'espace d'états E est fini ou dénombrable (en pratique on travaillera toujours sur $\mathbb{Z}^d$).

Définition : Propriété de Markov :

Un processus stochastique à temps discret (Y_n) à valeurs dans un ensemble d'états E vérifie la propriété de Markov (simple) si :

Pour tout n, pour toute suite d'états $(y_1, ..., y_n) \in E^n$,
$P(Y_n = y_n | Y_1 = y_1, ..., Y_{n-1} = y_{n-1}) = P(Y_n = y_n | Y_{n-1} = y_{n-1})$

Définition : Chaîne de Markov :

Une chaîne de Markov est un processus stochastique à temps discret vérifiant la propriété de Markov

Proposition : Une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$, qu'elle soit simple (de loi uniforme sur les 2d vecteurs unité) ou non, est une chaîne de Markov.

Preuve : Il suffit de montrer que la propriété de Markov est vérifiée :

Soit n $\geq$1 et $(x_1,...,x_n) \in (\mathbb{Z}^d)^n$,
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $(X_i)_i$ des v.a.i.i.d

On a $P(S_1 = x_1, S_2 = x_2, ..., S_n = x_n)$
$= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 - x_1, ..., X_n = x_n - x_{n-1})$
$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i - x_{i-1}) \qquad (x_0 = 0)$

D'où :

$P(S_n = x_n | S_1 = x_1, .., S_{n-1} = x_{n-1})$
$= \frac{P(S_1 = x_1, S_2 = x_2, ..., S_n = x_n)}{P(S_1 = x_1, S_2 = x_2, ..., S_{n-1} = x_{n-1})}$
$= P(X_n = x_n - x_{n-1})$
$= P(S_n = x_n | S_{n-1} = x_{n-1})$

Définitions :

Soit (Y_n) une chaîne de Markov sur E.
Soient x, y deux états de E.

On dit que y est accessible depuis x si $P(\exists n \geq 1, Y_n = y \, | Y_0 = x) > 0$.
On dit que x et y communiquent entre eux si x est accessible depuis y et y accessible depuis x. Cette dernière relation définit une relation d'équivalence.

On dit que (Y_n) est irréductible si tous les états de E communiquent entre eux.

Proposition : La M.A.S est irréductible
Idée de preuve : deux positions sur $\mathbb{Z}^d$ peuvent toujours être reliées par un chemin composé d'une succession de n positions voisines. Et ce chemin aura une probabilité strictement positive : $(\frac{1}{2d})^n$ d'être pris par la M.A.S.

Définitions : Soit (Y_n) une chaîne de Markov sur E.
Un état $x \in E$ est dit récurrent si, partant de x, la chaîne passe (avec une probabilité égale à 1) une infinité de fois par x, i.e $P(\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{Y_n=x\}} = +\infty) = 1$
Un état non récurrent est dit transient. Si un état est transient, alors on peut montrer que la probabilité que la marche passe une infinité de fois par cet état vaut 0 (c'est une dichotomie : il n'y a pas d'autres cas possible).

Propriété : Soit (Y_n) une chaîne de Markov sur E.
Si deux états x et y communiquent, alors on a l'équivalence suivante :

$$x \text{ récurrent} \Leftrightarrow y \text{ récurrent}$$

Preuve : Supposons que x et y communiquent, et supposons que y récurrent.

Montrons qu'avec probabilité strictement positive, partant de x, on revient une infinité de fois en x, ce qui impliquera que x est récurrent (du fait de la dichotomie précédemment énoncée) et sera suffisant pour conclure.

Comme x et y communiquent, et du fait de la propriété de Markov, avec probabilité strictement positive, la marche va de y en x puis de x en y.
Puis, on a une infinité d'excursions de y en y car y est récurrent. Ces excursions sont par ailleurs toutes i.i.d du fait du caractère markovien de la marche.
Or, à chaque excursion partant de y, on a une probabilité strictement positive de passer par x. On en conclut qu'il y a donc une infinité d'excursions de y en y passant par x.

Donc au final on a une probabilité strictement positive d'aller en y puis en x, puis de repasser une infinité de fois par x. Par Markov, on conclut en décomposant l'événement précédent en deux événements indépendants qui sont donc tous deux de probabilité positive : aller de y en x, et passer une infinité de fois en x, partant de x.

Conséquence : Dans le cas d'une chaîne de Markov irréductible, soit tous les états sont récurrents, soit ils sont tous transients.

Conclusion : Comme la M.A.S est irréductible, pour étudier ses propriétés de récurrence, il suffit d'étudier la récurrence en 0.

1.3 Récurrence en 0 de la M.A.S

Question : Combien de fois la marche revient-elle en 0 ?

Soient p_0 la probabilité de retour à l'origine (i.e en 0), et N_∞ le nombre de visites de la marche en 0. Mathématiquement, on écrit $p_0 = P(\exists n \geq 1, S_n = 0 | S_0 = 0)$ et $N_\infty = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}$

Propriété : Si $p_0 = 1$, alors la marche passe une infinité de fois par 0 (avec probabilité 1).
Preuve : $\forall n \geq 1, P(E_n) = 1$ où $E_n := \{N_\infty \geq n\}$ ("la marche repasse au moins n fois en 0")
Ceci découle directement de la propriété de Markov. Étant en 0, la marche repasse toujours par 0 avec probabilité 1, peu importe les états qui ont précédés.

Si on note $E_\infty = \{N_\infty = \infty\}$ ("la marche repasse une infinité de fois par 0"), on a : $E_\infty = \cap_{n\geq 1} E_n$.
Par continuité à droite de P, on conclut : $P(E_\infty) = \lim P(E_n) = 1$
La marche est ainsi récurrente en 0.

Résultat : $E[N_\infty] < \infty$ ssi $p_0 < 1$
Preuve :
$(\Rightarrow)$: Par contraposée : découle directement de la propriété précédente.
$(\Leftarrow)$: Si $p_0 < 1$, on montre que N_∞ suit une loi géométrique :
En effet, on peut montrer en utilisant encore une fois la propriété de Markov que la marche ne repasse pas en 0 (i.e $N_\infty = 0$) avec probabilité $1 - p_0 > 0$, passe une fois en 0 (i.e $N_\infty = 1$) avec probabilité $p_0(1-p_0)$, et plus généralement, n fois en 0 (i.e $N_\infty = n$) avec probabilité $p_0^n(1-p_0)$.
Et on a donc $\mathrm{E}[N_\infty] = \sum\limits_{n\geq 1} n p_0^n (1-p_0) = \frac{p_0}{1-p_0} < +\infty$

Remarque : On aurait aussi pu utiliser le lemme de Borel-Cantelli :
En effet, le lemme nous dit que $\sum\limits_{n\geq 1} P(S_n = 0) < +\infty$ implique que la probabilité qu'un nombre infini d'évènements $\{S_n = 0\}$ se réalisent simultanément est nulle.
On en déduit alors directement : $\mathrm{E}[N_\infty] < +\infty \Rightarrow p_0 < 1$.

Conséquence : La marche est récurrente en 0 ssi $\mathrm{E}[N_\infty] = \infty$

Propriété : $\mathrm{E}[N_\infty] = \sum\limits_{n\geq 1} P(S_n = 0)$
Preuve : Application directe du théoreme de Tonelli sur $E[\sum\limits_{n\geq 1} \mathbb{1}_{S_n=0}]$

1.3.1 Cas de la M.A.S en dimension 1

On a vu précédemment que la récurrence en 0 de la marche dépendait de la convergence de $\mathrm{E}[N_\infty] = \sum\limits_{n\geq 1} P(S_n = 0)$
Ce qui mène naturellement à la question suivante : *Que vaut* $P(S_n = 0)$?

A chaque unité de temps, s'ajoute à la marche un incrément valant soit +1 (montée), soit -1 (descente) avec la même probabilité.
Le "chemin" suivi par la marche entre les temps 0 et n est décrit par l'ensemble des n premiers pas réalisés, on pourra donc le représenter comme un vecteur de $\{1, -1\}^n$. On peut montrer que tous les chemins sont équiprobables en utilisant le fait que : (i) tous les pas sont indépendants entre eux et (ii) à chaque étape la probabilité de monter est la même que celle de descendre.

Pour calculer $P(S_n = 0)$, il suffit donc de faire le rapport entre le nombre de chemins finissant en 0 et le nombre de chemins total qui vaut 2^n.
Comme la marche démarre à 0, les chemins conduisant à $\{S_n = 0\}$ sont ceux comportant autant de descentes que de montées, ce qui fait $\binom{2k}{k}$ chemins si $n = 2k$, 0 sinon.

On a donc : $P(S_n = 0) = 0 \quad$ si $n = 2k+1$,

$$\text{et } P(S_n = 0) = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \qquad \text{si } n = 2k$$

On obtient en utilisant la formule de Stirling que : $P(S_{2n}=0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi 2n}}$

D'où : $\mathrm{E}[N_\infty] = \sum\limits_{n\geq 1} P(S_{2n}=0) = +\infty$,
ce qui implique que la marche est récurrente en 0.

1.3.2 Généralisation aux dimensions supérieures

Propriété : On peut décomposer la M.A.S en dimension 2 en un couple de M.A.S en dimension 1 indépendantes.

Preuve : On utilise un argument géométrique :

On définit un nouveau repère $(0, < e'_1, e'_2 >)$ sur $\mathbb{Z}^2$ en opérant une rotation et une homothétie sur le repère canonique $(0, < e_1, e_2 >)$ de telle sorte que :
$e'_1 + e'_2 = e_2, \quad e'_1 - e'_2 = e_1, \quad -e'_1 + e'_2 = -e_1, \quad -e'_1 - e'_2 = -e_2.$
(Illustration en **Annexe C**)

Puis on définit dans la base $< e'_1, e'_2 >$ les incréments $(X_i)_i = (X_i'^{(1)}, X_i'^{(2)})_i$ variables i.i.d de loi $U(-1,1) \bigotimes U(-1,1)$ (Chaque pas correspond à l'enchaînement de deux variables aléatoires).

On a bien alors, comme voulu, des incréments X_i indépendants, et de même loi uniforme sur $\{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$.

Et on a $S_n = \sum\limits_{1\leq i\leq n} X_i = (S_n^{(1)}, S_n^{(2)})_{<e1,e2>}$
qui se réécrit dans la base $< e'_1, e'_2 >$:

$$S'_n = \sum_{1\leq i\leq n} ((X_i'^{(1)}, X_i'^{(2)}) = (S_n'^{(1)}, S_n'^{(2)})_{<e'_1,e'_2>}$$

Avec $(S_n'^{(1)})$ et $(S_n'^{(2)})$ deux M.A.S en dimension 1 indépendantes.

Remarque : La propriété précédente n'est plus vraie en dimension d>2 : on n'a plus d'équivalence entre le modèle de la M.A.S et celui de la marche aléatoire (dite modifiée) : $S_n = (S_n^{(1)}, ..., S_n^{(d)})$ où les $S_n^{(i)}$ sont des M.A.S en dimension 1 indépendantes.
En effet $X = (X^{(1)}, ..., X^{(d)})$ prend alors 2^d valeurs et dès que $d \geq 3$:
$2^d > 2d$ (où 2d est le nombre de vecteurs unités).

Cependant, on admet que pour la M.A.S et la marche aléatoire modifiée précédemment définie on a un même équivalent asymptotique pour $P(S_{2n}=0)$ et donc les mêmes propriétés de récurrence en dimension d>2 (car on a toujours : $\mathrm{E}[N_\infty] = \sum\limits_{n\geq 1} P(S_{2n}=0)$ dans tous les cas).
Ceci nous permettra donc de conclure quant à la récurrence de la M.A.S en dimension d>2 en se contentant seulement d'étudier la récurrence de la marche aléatoire modifiée (de même dimension).

Corollaire : Soit (S'_n) la marche aléatoire modifiée sur $\mathbb{Z}^d$,

Par définition, $\forall n \geq 1$, $P(S'_n = 0) = P(S_n'^{(1)} = 0)^d$ où $S_n'^{(1)}$ est la M.A.S sur $\mathbb{Z}$.

D'où : $P(S'_{2n} = 0) \sim (\frac{1}{\sqrt{\pi 2n}})^d$

Conclusion :
En comparant avec les séries de Riemann, on obtient que :

$$\mathrm{E}[N_\infty] = \sum_{n\geq 1} P(S'_{2n} = 0) < +\infty \quad \text{ssi} \quad \text{d>2.}$$

Ce qui implique que la marche (S'_n) est récurrente en 0 uniquement pour les dimensions d=1 et d=2.

On en conclut donc que la M.A.S (S_n) est récurrente pour les dimensions d=1 et d=2 et transiente en dimension d$\geq$ 3.

Généralisation : (admis)
On peut généraliser le résultat précédent à toutes les marches aléatoires : (S_n) dont les incréments (i.i.d) sont d-dimensionnels* et vérifient :
$E[X_1] = 0, \quad E[\|X_1\|^2] < +\infty.$

*(i.e dont le support n'est pas inclus dans un sous-espace de dimension inférieure à l'espace ambiant)

2 Marche aléatoire en scène aléatoire (M.A.S.A)

Définition : Une marche aléatoire en scène aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est définie à partir de la donnée d'un couple :
• Une marche aléatoire (S_n) sur $\mathbb{Z}^d$
• Une scène aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$: $(\omega(x))_{x\in\mathbb{Z}^d}$ suite de v.a.i.i.d
Il s'agit d'un processus stochastique à temps discret $Z_n = Z_n^{(\omega,S)}$ défini par :

$$Z_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ Z_n = \sum_{1}^{n} \omega(S_i)$$

Simulation : on peut essayer d'observer par simulation si la M.A.S.A suit un comportement connu.

Pour cela, on se place dans le cas le plus simple : en dimension d=1, avec une marche simple et les variables ω_x de la scène centrées de même loi : +1 ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
Il s'avère qu'on a deux choix méthode possibles pour simuler un échantillon de M.A.S.A :
(i) On simule une scène ω, puis un échantillon de M.A.S $(S^{(i)})_{1\leq i\leq N}$ et on obtient un échantillon $Z^{(i)} = Z^{(\omega,S^{(i)})}$ pour i allant de 1 à N.
(ii) On simule à chaque étape une scène $\omega^{(i)}$ et une marche $S^{(i)}$ et on obtient un échantillon $Z^{(i)} = Z^{(\omega^{(i)},S^{(i)})}$ pour i allant de 1 à N.

Résultat : On simule 1000 exemplaires de la v.a Z_n pour n grand (n=500) en utilisant la seconde méthode et on obtient une distribution centrée semblable à celle d'une loi normale mais de variance plus grande que 1 (**cf. Annexe D**).

Par la suite on va privilégier une approche théorique et calculatoire où l'on va chercher à obtenir directement l'espérance et la variance de la M.A.S.A dans des cas relativement simples.

2.1 Espérance de la M.A.S.A

On se place dans le cas où (S_n) est une marche sur $\mathbb{Z}^d$ (d ≥ 1) quelconque.

Et on choisit une scène : $(\omega(x))_{x\in\mathbb{Z}^d}$ i.i.d de loi centrée et de variance finie.
En effet on pourra montrer dans ce cas-là que la M.A.S.A aura une moyenne (ou espérance) nulle.

Encore faut-il définir la mesure de probabilité avec laquelle on va calculer l'espérance de (Z_n). En effet, on peut la calculer par rapport à la probabilité de la scène : $P = P^\omega$, par rapport à celle de la marche : $P = P^S$, ou encore par rapport à la probabilité produit : $P = P^\omega \otimes P^S$ (c'est ce cas qui nous intéressera).

(i) Premier cas $(P = P^\omega)$:

$$\begin{aligned} E^\omega[Z_n] &= E^\omega[\sum_{1\leq k\leq n} \omega(S_k)] \\ &= \sum_{1\leq k\leq n} E^\omega[\omega(S_k)] \\ &= \sum_{1\leq k\leq n} E^\omega[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \omega_x \mathbb{1}_{\{S_k=x\}}] \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini,
qu'on justifie du fait que $E^\omega[|\omega_0|] < +\infty$ (car $E^\omega[\omega_0]$ bien définie),
on obtient au final une espérance nulle :

$$E^\omega[Z_n] = \sum_{1\leq k\leq n} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} E^\omega[\omega_x]\mathbb{1}_{\{S_k=x\}} = 0$$

car $E^\omega[\omega_x] = 0 \ \forall x \in \mathbb{Z}^d$

(ii) Deuxième cas $(P = P^S)$:

Similairement, on écrit :
$$E^S[Z_n] = \sum_{1\leq k\leq n} E^S[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \omega_x \mathbb{1}_{\{S_k=x\}}]$$

Comme la somme sur $\mathbb{Z}^d$ ne porte que sur les x tels que $\|x\| \leq n$, dont le nombre est fini et indépendant de la réalisation, on peut écrire :

$$\begin{aligned} E^S[Z_n] &= \sum_{1\leq k\leq n} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \omega_x E^S[\mathbb{1}_{\{S_k=x\}}] \\ &= \sum_{1\leq k\leq n} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \omega_x P^S(S_k = x) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \omega_x \sum_{1\leq k\leq n} P^S(S_k = x) \qquad\qquad (\neq 0 \text{ à priori}) \end{aligned}$$

Ici, chaque v.a ω_x est pondérée par le nombre de passage moyen de la marche en x

On observe que l'on n'obtient pas les mêmes résultats si on intègre de manière partielle seulement par rapport à P^ω ou seulement par rapport à P^S.

(iii) Troisième cas :

En fait, ce qui nous intéressera ici et ce qui nous intéressera par la suite sera de calculer la moyenne de Z_n par rapport à la probabilité produit $P^\omega \otimes P^S$, càd calculer $\mathbb{E}[Z_n] = E^\omega E^S[Z_n] = E^S E^\omega[Z_n]$ (sous réserve d'intégrabilité) :

Et comme $E^\omega[Z_n] = 0$, on obtient directement que Z_n a une moyenne nulle :
$$\mathbb{E}[Z_n] = 0$$

2.2 Variance de la M.A.S.A

On va chercher à calculer la variance de la M.A.S.A sur $\mathbb{Z}^d$ dans un cas simple :

(i) Avec (S_n) M.A.S sur $\mathbb{Z}^d$.

(ii) Et avec une scène $(\omega(x))_{x\in\mathbb{Z}^d}$ i.i.d tels que :

$$E^\omega[\omega_0] = 0 \quad \text{et} \quad E^\omega[\omega_0^2] = 1$$

On aura pour cela besoin de l'approximation $P(S_{2n} = 0) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi 2n}}\right)^d$,
que l'on avait déjà admise pour étudier la récurrence de la M.A.S en dimension $d \geq 3$. En réalité, on peut montrer que l'approximation recherchée découle directement du théorème limite local (TLL).

D'après ce qui précède, on sait que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$.
Donc $V(Z_n) = \mathbb{E}[Z_n^2]$.

Question : Que vaut $\mathbb{E}[Z_n^2]$ *?*

On réécrit, en utilisant le fait que la somme en x soit aléatoire mais finie :

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{1\leq k\leq n} \omega_x \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{\{S_k=x\}} \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \omega_x \sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{1}_{\{S_k=x\}} \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \omega_x \, l_n(x) \qquad \left(\text{avec } l_n(x) := \sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{1}_{\{S_k=x\}}\right) \end{aligned}$$

Et on a donc :

$\mathbb{E}[Z_n^2] = E^S E^\omega[Z_n^2]$

$$\begin{aligned} \text{Avec } E^\omega[Z_n^2] &= E^\omega[(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \omega_x \, l_n(x))^2] \\ &= E^\omega[\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} \omega_x\omega_y l_n(x) l_n(y)] \end{aligned}$$

Sachant que $\forall (x,y)$, $E^\omega[|\omega_x\omega_y|] \leq E^\omega[\omega_0^2] = 1$, et sachant que $(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} l_n(x))^2$ est fini, on peut utiliser le théorème de Fubini et écrire :

$$E^\omega[Z_n^2] = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} E^\omega[\omega_x\omega_y] l_n(x) l_n(y)$$

Et comme on a par indépendance,

$$E^\omega[\omega_x\omega_y] = E^\omega[\omega_x]E^\omega[\omega_y] = 0 \qquad \text{si } x \neq y$$

On a finalement :

$$E^\omega[Z_n^2] = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} E^\omega[\omega_x^2] l_n(x)^2 = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} l_n(x)^2$$

Donc $\mathbb{E}[Z_n^2] = E^S[\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} l_n(x)^2]$

$$\begin{aligned} \text{Or } \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} l_n(x)^2 &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} (\sum_{1\leq k\leq n} \mathbb{1}_{\{S_k=x\}})^2 \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \sum_{1\leq k,j\leq n} \mathbb{1}_{\{S_k=x\}} \mathbb{1}_{\{S_j=x\}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} l_n(x)^2 &= \sum_{1\le k,j\le n}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{\{S_k=S_j=x\}}\\ &= \sum_{1\le k,j\le n} \mathbb{1}_{\{S_k=S_j\}}\end{aligned}$$

Remarque : Cette dernière quantité correspond au nombre d'auto-intersections de la marche.

$$\begin{aligned}\text{Donc } \mathbb{E}[Z_n^2] &= E^S[\sum_{1\le k,j\le n} \mathbb{1}_{\{S_k=S_j\}}]\\ &= n + 2\ E^S[\sum_{1\le k<j\le n} \mathbb{1}_{\{S_k=S_j\}}]\\ &= n+2\sum_{1\le k<j\le n} P^S(S_k=S_j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ici } P^S(S_k=S_j) &= P^S(S_k-S_j=0)\\ &= P^S(\sum_{l=k+1}^{j} X_l = 0)\end{aligned}$$

Or les X_i sont tous indépendants et de même loi,
donc $\sum\limits_{l=k+1}^{j} X_l$ suit la même loi que $\sum\limits_{l=1}^{j-k} X_l = S_{j-k}$

Et donc $P^S(S_k=S_j) = P^S(S_{j-k}=0)$

$$\begin{aligned}\text{D'où : } \mathbb{E}[Z_n^2] &= n+2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} P^S(S_{j-k}=0)\\ &= n+2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{u=1}^{n-k} P^S(S_u=0)\\ &= n+2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{u=1}^{k} P^S(S_u=0)\end{aligned}$$

(entre k=1 et k=n-1, n-k parcourt le même ensemble de valeurs que k)

Question : Comment se comporte asymptotiquement $\mathbb{E}[Z_n^2] = V(Z_n)$ *?*
A-t-on un comportement diffusif ($\mathbb{E}[Z_n^2] \sim C_{ste} n$*) ?*

On utilise pour cela l'approximation (à une constante près) : $P(S_u=0) \sim \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{d}{2}}$

On dissocie trois cas selon la dimension d :

- **Cas où d=1 :**

$\sum\limits_{u=1}^{k} P^S(S_u=0) \sim C_{ste} k^{\frac{1}{2}}$

Et donc $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{u=1}^{k} P^S(S_u=0) \sim C_{ste} n^{\frac{3}{2}}$

D'où : $\mathbb{E}[Z_n^2] \sim C_{ste} n^{\frac{3}{2}}$ (le terme en n est négligeable)

On en conclut que dans ce cas la M.A.S.A a un comportement **surdiffusif**.

• **Cas où d=2 :**

$\sum\limits_{u=1}^{k} P^S(S_u = 0) \sim C_{ste} ln(k)$

Et donc $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \sum\limits_{u=1}^{k} P^S(S_u = 0) \sim C_{ste} n log(n)$

D'où : $\mathbb{E}[Z_n^2] \sim C_{ste} n log(n)$ (le terme en n est négligeable)

On en conclut que dans ce cas la M.A.S.A a un comportement **marginalement surdiffusif**.

• **Cas où d>3 :**

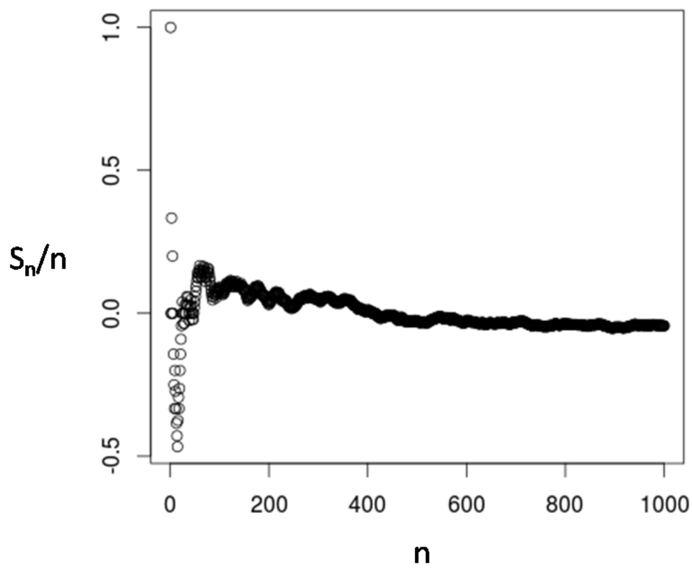
$\sum\limits_{u=1}^{k} P^S(S_u = 0) \sim \sum\limits_{u \geq 1} P^S(S_u = 0) = S < \infty$

Et donc $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \sum\limits_{u=1}^{k} P^S(S_u = 0) \sim nS$

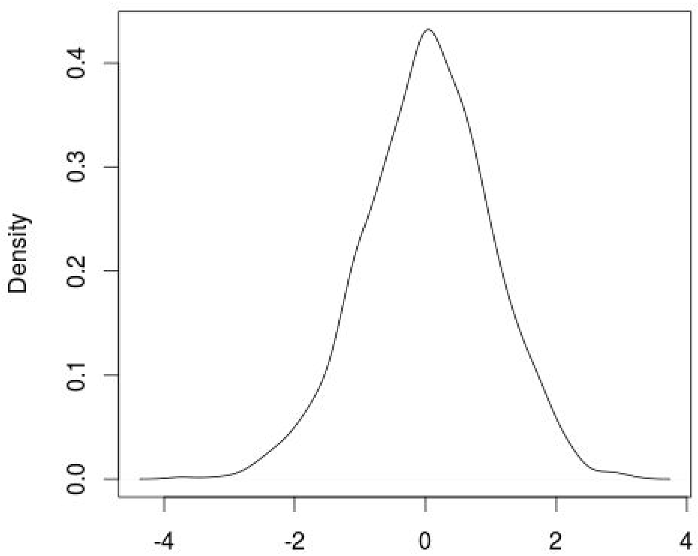
D'où : $\mathbb{E}[Z_n^2] \sim C_{ste} n$

On en conclut que dans ce cas la M.A.S.A a un comportement **diffusif**.

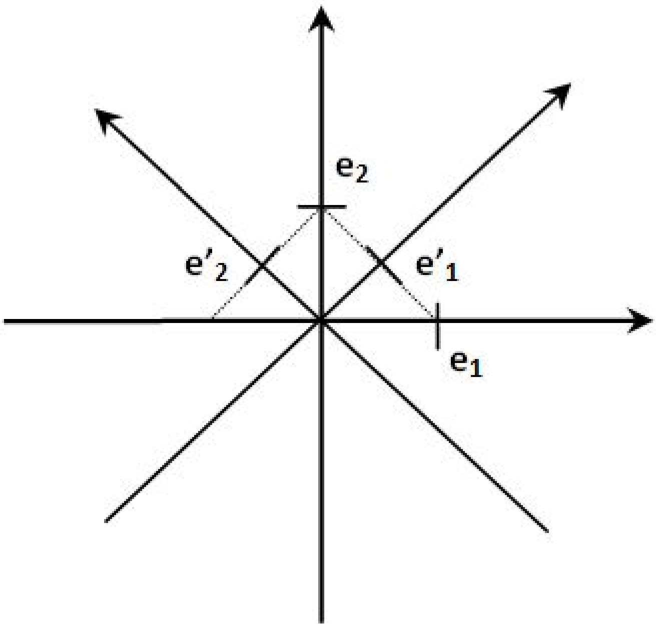
3 Annexes



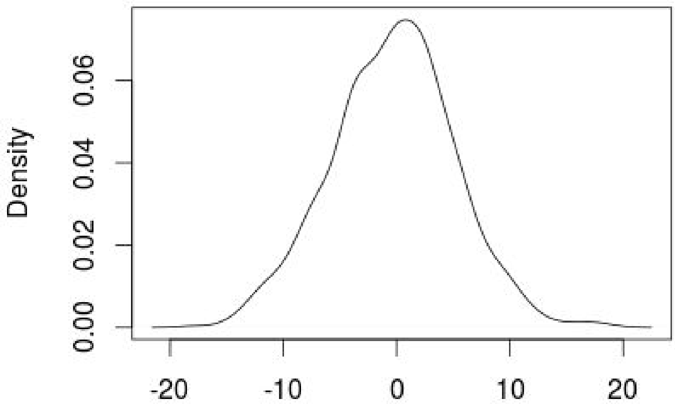
A) Illustration de la loi des grands nombres dans le cas de la marche simple (S_n)



B) Illustration du TCL pour la marche simple :
Densité d'un échantillon de 1000 v.a S_n pour n grand (n=500). On obtient une distribution semblable à celle de la loi normale centrée réduite.



C) Illustration du repère $(0, < e'_1, e'_2 >)$



D) Densité d'un échantillon de 1000 v.a Z_n pour n grand (n=500).

4 Bibliographie

• Durrett R. (2010), *Probability : Theory and Examples*

• Brémaud P. (2009), *Initiation aux probabilités et aux chaînes de Markov.*

• Kesten, Spitzer (1979), "A limit theorem related to a new class of self similar processes", *Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 50,5-25.