

Politique de Vaccination Optimale

Version Finale



Memoire de L3

présenté le 29 Juin 2015
à l'université Paris-Dauphine

Université Paris Dauphine

Touvron Hugo

Contents

List of figures	i
Introduction	1
0.1 Le modèle SIR	1
0.2 Les différents coûts à optimiser	3
0.2.1 Le coût pour l'individus	3
0.2.2 Le coût pour l'individus	3
0.3 Représentations de l'évolution d'une épidémies	3
1 Quelques rappel	4
1.1 Les fonctions à variation bornée	4
1.2 équation différentielle	4
1.3 L'intégrales de Stieljes	4
1.4 Calcul différentiel	5
2 Première approche	6
2.1 Un modèle différent	6
2.1.1 Modele SIR	6
2.1.2 Fonctions de coût	6
2.2 Les critères de décision	7
2.2.1 décision	7
3 Nouvelle approche	8
3.1 Les chaines de Markov et modèles SIR	8
3.2 Les différents optimum	9
3.3 L'optimum pour l'individus	10
3.3.1 La Décision individuelle	10
3.3.2 Représentation graphique	12
3.4 l'optimum pour la société	12
3.4.1 Le choix de la société	12
3.4.2 Représentation graphique	14
3.5 l'équilibre de Nash conciliant les différents intérêts	14
3.5.1 Stratégie pour avoir un équilibre	14
3.5.2 Représentation graphique	15
4 Actualisation des coûts	16
4.1 Présentation du modèles	16
4.2 Représentations graphique	17
5 Conclusion	18
5.1 Conclusion	18

List of Figures

1	Schémas SIR	2
2	Evolution epidémie	3
3.1	Optimum Individus	12
3.2	Décision Individus	12
3.3	Optimum Société	14
3.4	Optimum à l'équilibre	15
3.5	Evolution	15
4.1	Optimum	17

Introduction

La rédaction de ce mémoire est principalement basée sur l'étude des articles:

[1] Individual vaccination as Nash equilibrium in a SIR model: the interplay between individual optimization and societal policies

[4] Global optimal vaccination in the SIR model: properties of the value function and application to cost-effectiveness analysis

[3] *Optimal tax/subsidy combinations for the flu season* de Peter J. Francis. Il y sera fait référence tout au long de ce mémoire. Nous allons commencer par définir les problèmes de l'optimisation de la vaccination comme cela est défini dans les articles précédemment cités.

0.1 Le modèle SIR

On classe les personnes en quatre catégories les individus susceptibles d'être infectés, les individus infectés, les individus guéris et ceux qui sont vaccinés. Notons:

X_1 : la proportion d'individus susceptibles d'être infectés

X_2 : la proportion d'individus infectés

X_3 : la proportion d'individus guéris

X_4 : la proportion d'individus vaccinés

Le modèle SIR s'écrit donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_1(t) = -\beta X_1(t)X_2(t)dt - dU(t), \quad X_1(0^-) = X_0^1 \\ dX_2(t) = (\beta X_1(t)X_2(t)dt - \gamma X_2(t)dt), \quad X_2(0^-) = X_0^2 \\ dX_3(t) = \gamma X_2(t)dt, \quad X_3(0^-) = X_0^3 \\ X_4(t) = \int_0^t dU(\tau), \quad X_4(0^-) = 0 \end{array} \right.$$

Nous avons U qui intervient dans ce modèle il s'apparente à une mesure comme par exemple une masse de Dirac. U représente les campagnes de vaccination qui sont mises en place lors d'une épidémie ces campagnes de vaccinations ne sont pas continues avec dans le temps.

β et γ sont des paramètres caractéristiques de l'épidémie on a un taux de βX_2 parmi les personnes susceptibles qui vont être infectées puis un taux γ parmi les infectés qui vont guérir. Notons $p_V(t)$ le nombre d'individus vaccinés au temps t . durant un intervalle de temps dt on aura $p_V(t+dt) - p_V(t)$ personnes qui vont se faire vacciner.

Le schéma suivant va illustrer mes explications :

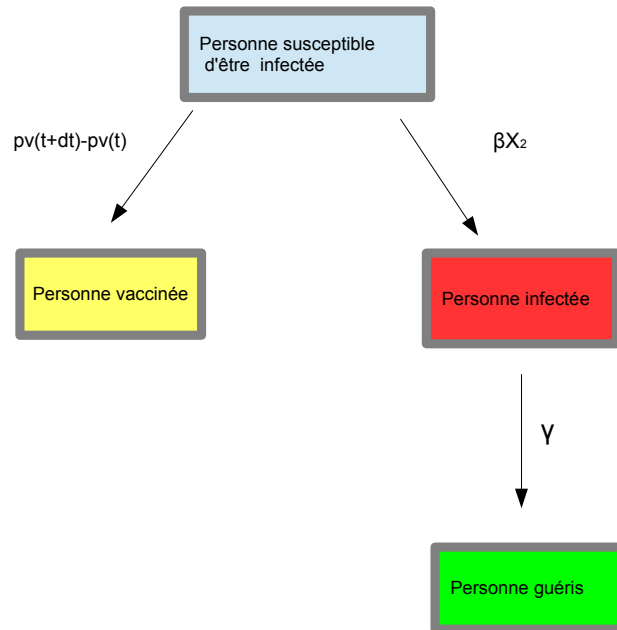


Figure 1: schémas du SIR.

On pourrait se dire que pour arrêter l'épidémie il faudrait faire vacciner tout le monde. Mais il ne faut pas oublier que l'épidémie mais aussi la vaccination ont un coût on notera : r_v (resp r_I) le coût de la vaccination notamment dû aux effets secondaires du vaccin (resp le coût d'être infecté).

Nous noterons $\phi_V(t)$ la probabilité d'être vacciné avant le temps t et $\phi_I^{X_0, U}(t)$ la probabilité d'être infecté avant le temps t .

0.2 Les différents coûts à optimiser

0.2.1 Le coût pour l'individu

Le coût pour un individu c'est le coût de l'infection si on n'est pas vacciné auquel s'additionne le coût d'être vacciné. Mathématiquement cela donne:

$$C_{\text{Individus}}(\phi_V; X_0, U) = \int_0^{+\infty} r_I(1 - \phi_V(t))d\phi_I^{X_0, U}(t) + \int_0^{+\infty} r_V(1 - \phi_I^{X_0, U}(t))d\phi_V(t)$$

0.2.2 Le coût pour la société

Le coût pour la société c'est l'agrégation des coûts des individus. Mathématiquement cela donne:

$$C_{\text{société}}(X_0, U) = \int_0^{+\infty} r_I \frac{X_1(t)}{1 - \phi_I^{X_0, U}(t)} d\phi_I^{X_0, U}(t) + \int_0^{+\infty} r_V dU(t)$$

Remarque 1. Dans l'ensemble de ce document nous écrirons parfois $I(t)$ au lieu de $X_2(t)$, $S(t)$ au lieu de $X_1(t)$ et $R(t)$ au lieu de $X_3(t)$

0.3 Représentations de l'évolution d'une épidémie

La figure suivante représente l'évolution d'une épidémie au cours du temps on peut observer l'évolution du nombre de personnes infectées et le nombre de personnes susceptibles d'être infectées.

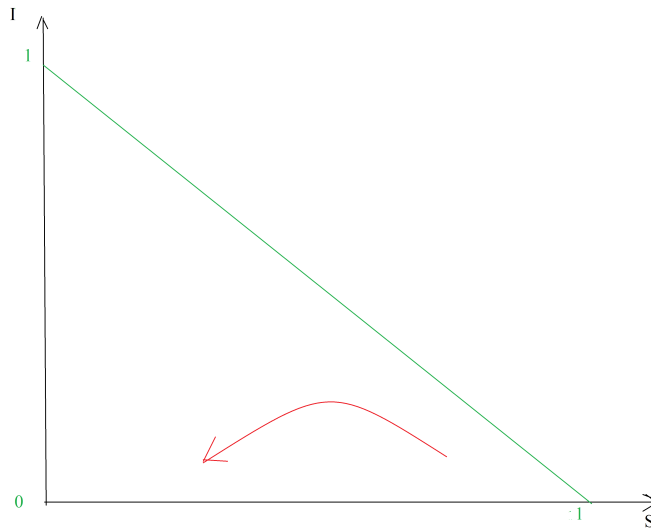


Figure 2: Evolution épidémie

1 Quelques rappel

on peut considérer que dans le modèle SIR les campagnes de vaccination sont à variation bornée. c'est pour cela que l'on va faire différents rappels sur les équations différentielles et les intégrales de Stieljes.

1.1 Les fonctions à variation bornée

Définition 1. Soit \mathcal{J} un intervalle de \mathbb{R} ,

Soit $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ on dit que f est à variation bornée si :

$$\sup \left\{ \sum_{j=1}^N \|f(x_j) - f(x_{j-1})\|; N \in \mathbb{N}^*, -\infty < x_0 < \dots < x_N < \infty \right\} < \infty$$

$\forall i \in [0, N], x_i \in \mathcal{J}$

1.2 équation différentielle

Théorème 1. Soit n un entier et Ω un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$. posons $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Si $F(t, X)$ et continu par morceau et localement lipschitzienne par rapport à ça deuxième variable alors le probleme de cauchy est bien défini et la solution maximale est unique.

1.3 L'intégrales de Stieljes

Définition 2. Soit $f \in \mathcal{C}^0$ et $F \in \mathcal{BV}$ alors on peut définir l'intégrale de Stieljes on la note:

$$\int f dF$$

en se plaçant sur un intervalle $[a, b]$ et en considérant la subdivision: $a < x_0 < \dots < x_N < b$ et soit $\gamma_i \in [x_i, x_{i+1}]$ si la limite de $\sum_{i=0}^N f(\gamma_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i))$ est finie alors elle correspond à l'intégrale de stieljes :

$$\int_a^b f dF$$

Théorème 2. Si on considère l'équation différentielle: $x(t) = \int_0^t f(\tau) dV(\tau)$ avec $V \in \mathcal{BV}$ alors ce problème de cauchy est bien défini et admet une solution.

Remarque 2. Pour plus de détails se référer à:

[2] Problèmes de Cauchy pour les équations différentielles et théorie de l'intégration: influences mutuelles

ce théorème nous montre que le problème SIR ainsi posé est bien défini étant donné que les campagnes de vaccination peuvent être vues comme des fonctions à valuation bornée ou qu'elles peuvent au moins être approchées par de telles fonctions.

1.4 Calcul différentiel

Théorème 3. *fonctions implicites*

Soit E, F, G trois espaces de Banach :

$$\begin{aligned} f &: E \times F \longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

on suppose que f est \mathcal{C}^1 soit $(x_0, y_0) \in E \times F$

posons $z_0 = f(x_0, y_0)$

on suppose que $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \in \text{ISOM}(F, G)$

Alors il existe un voisinage ouvert W de x_0 et une application $\phi : W \longrightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 et un voisinage V du point (x_0, y_0) tel que

$$f(x, \phi(x)) = z_0 \quad \forall x \in W$$

2 Première approche

Dans ce chapitre nous allons étudier une première approche du problème de vaccination optimale, basé sur l'article :

[3] *Optimal tax/subsidy combinations for the flu season* de Peter J. Francis. Nous allons dans un premier temps oublier ce que l'on a dit dans l'introduction pour travailler avec un modèle SIR un peu plus simple nous permettant d'explicitier plus de choses. Nous supposons donc dans un premier temps que l'on peut exprimer les dérivées de chacun des paramètres du modèle.

2.1 Un modèle différent

2.1.1 Modèle SIR

X_1 : la proportions d'individus susceptibles d'être infectés

X_2 : la proportions d'individus infectés

X_3 : la proportions d'individus guéris

X_4 : la proportions d'individus vaccinés

on rajoute $X_5 = X_3 + X_4$ Le modèle SIR s'écrit donc:

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = -\beta X_1(t)X_2(t) - \dot{X}_4(t), & X_1(0^-) = X_0^1 \\ \frac{dX_2}{dt} = \beta X_1(t)X_2(t) - \gamma X_2(t), & X_2(0^-) = X_0^2 \\ \frac{dX_5}{dt} = \gamma X_2(t) + \dot{X}_4(t), & X_5(0^-) = X_0^5 \end{cases}$$

Remarque 3. on peut constater que c'est le même modèle que dans l'introduction on a juste supposé dans ce cas qu'il est licite de dériver ce qui n'est pas toujours le cas mais permet d'explicitier d'avantage de choses.

2.1.2 Fonctions de coût

Nous nous intéressons maintenant à la fonction de coût. Nous allons voir l'optimum de la société comme la somme des optimum individuels. En prenant toujours comme notation r_I le coût de l'infection et r_V le coût de la vaccination. on cherche donc à trouver le taux de vaccination qui minimise la fonction suivante:

Définition 3. fonctions de coût $\min C(X_1(0), X_2(0); X_4(t)) = \int_0^\infty r_I X_2(t) + r_V \dot{X}_4(t) dt$
sous la contrainte que X_1 et X_2 vérifie les équations du modèle SIR

et que $\dot{X}_4(t)$ soit bornée.

2.2 Les critères de décision

Remarque 4. Comme cela est écrit dans

[3] *Optimal tax/subsidy combinations for the flu season* de Peter J.Francis. on peut trouver les équations de l'évolution de l'infection en fonction du nombre de personnes susceptibles d'être infectées pour plus de détails se référer à ce texte.

2.2.1 décision

Dans l'article

[3] *Optimal tax/subsidy combinations for the flu season* de Peter J.Francis. Il arrive à un modèle de décision assez similaire à celui que l'on obtient si on ne suppose pas que les différentes variables du modèle SIR sont dérivables. Nous avons décidé de ne pas exposer ceci en détail pour éviter les redondances car nous présentons par la suite des choses assez similaires. Pour plus de détails nous renvoyons à la lecture de l'article précédemment cité.

3 Nouvelle approche

3.1 Les chaines de Markov et modèles SIR

Contenus du modèle SIR nous avons: on note :

S_t : l' événement être susceptible au temps t

I_t : l' événement être infecté au temps t

R_t : l' événement être guéri au temps t

$$\mathcal{P}(R_{t+\Delta t}/I_t) = \gamma\Delta t + o(\Delta t)$$

$$\mathcal{P}(I_{t+\Delta t}/S_t) = \beta X_2(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

Proposition 1. La probabilité d'être infecté avant le temps t

$$\phi_I(t) = 1 - e^{-\int_0^t \beta X_2(\tau) d\tau}$$

Proof.

$$\mathcal{P}(I_{t+\Delta t}/S_t) = \frac{\mathcal{P}(I_{t+\Delta t}, S_t)}{\mathcal{P}(S_t)}$$

$$\mathcal{P}(I_{t+\Delta t}/S_t) = \frac{\phi_I(t + \Delta t) - \phi_I(t)}{1 - \phi_I(t)}$$

d'après les calculs préliminaires on a :

$$\frac{\phi_I(t + \Delta t) - \phi_I(t)}{1 - \phi_I(t)} = \beta X_2(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

on fait tendre Δt vers 0 on obtient alors :

$$\phi_I'(t) = \beta X_2(t)(1 - \phi_I(t))$$

on a une équation différentielle d'ordre 1 on résout avec la formule de Duhamel et on obtient:

$$\phi_I(t) = 1 - e^{-\int_0^t \beta X_2(\tau) d\tau}$$

□

Nous rappelons que U désigne la campagne de vaccination cette fonction est supposée bornée on ne peut pas matériellement vacciner tout le monde en même temps on peut expliciter d'avantage $u(t)$

Proposition 2.

$$dU(t) = \frac{d\phi_V(t)}{1 - \phi_V(t)} S(t)$$

Proof. Nous avons :

$$\mathcal{P}(V_{t+\Delta t}/S_t) = \frac{\phi_V(t + \Delta t) - \phi_V(t)}{1 - \phi_V(t)}$$

cette probabilité peut également s'écrire:

$$\frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{S(t)}$$

on a donc égalité entre les deux quantités et donc en faisant tendre Δt vers 0 on obtient:

$$dU(t) = \frac{d\phi_V(t)}{1 - \phi_V(t)} S(t)$$

□

De la proposition précédente on peut obtenir la proposition suivante:

Proposition 3. en notans u_{max} le nombre maximum de perssone que l'on peut vacciner en même temps.

$$\frac{d\phi_V(t)}{dt} \leq \frac{u_{max}}{X_1(t)} (1 - \phi_V(t))$$

Proof. on a $dU(t) \leq u_{max} \Rightarrow \frac{d\phi_V(t)}{1 - \phi_V(t)} S(t) \leq u_{max}$
cqfd

□

3.2 Les différents optimum

Nous allons tout d'abord définir $\zeta(X)$ qui va représenter la trajectoire de l'évolution du nombre de personnes infectées en l'absence de vaccin si l'on commence en $X = (X_1, X_2)$ avec X_1 :le nombre de personnes suceptibles et X_2 :le nombre de perssone infectées.On pose:

$$1 - \frac{\zeta(X)}{X_1} = e^{-\frac{\beta}{\gamma}(X_2 + \zeta(X))}$$

comme cela est définit dans

[1] Individual vaccination as Nash equilibrium in a SIR model: the interplay between individual optimization and societal policies

Nous renvoyons au document

[4] Global optimal vaccination in the SIR model: properties of the value function and application to cost-effectiveness analysis appendice A pour plus de détail.

Proposition 4.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial X_1} = \frac{\zeta}{X_1(1 + \frac{\beta}{\gamma}(\zeta - X_1))}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial X_2} = \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\zeta - X_1 + \frac{\gamma}{\beta}} - 1$$

Proof. Nous allons utiliser le théorème des fonctions implicites

posons $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$

tel que: $f(X_1, X_2, y) = -1 + \frac{y}{X_1} + e^{-\frac{\beta}{\gamma}(X_2+y)}$

on a:

$y \mapsto f(X_1, X_2, y)$ qui est continue de plus $f(X_1, X_2, 0) \leq 0$ et $f(X_1, X_2, X_1) > 0$

donc par le théorème des valeurs intermédiaires on peut en déduire qu'il existe y^* tel que:

$f(X_1, X_2, y^*) = 0$

on a également $\frac{\partial f(X_1, X_2, y^*)}{\partial y} = -\frac{\beta}{\gamma} e^{-\frac{\beta}{\gamma}(y^*+X_2)} + \frac{1}{X_1}$

et comme $y^* \leq X_1$ et que $X_1 + X_2 < 1$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+$ on a $xe^{-x} < 1$ et donc $\frac{\partial f(X_1, X_2, y^*)}{\partial y}$ est non nulle on peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites

il existe un voisinage ouvert W de (X_1, X_2) et une application $\zeta : W \mapsto]0, X_1[$ de classe \mathcal{C}^1

$f(X_1, X_2, \zeta(X_1, X_2)) = 0 \quad \forall (X_1, X_2) \in W$

on pose alors $g : W \mapsto \mathbb{R}^3$ tel que $g(X_1, X_2) = (X_1, X_2, \zeta(X_1, X_2))$

on a donc $(f(g))' = 0 \Rightarrow \nabla f(X_1, X_2, \zeta) \nabla g(X_1, X_2) = (0, 0)$

on obtient alors

$$\frac{\partial \zeta}{\partial X_1} = \frac{\zeta}{X_1(1 + \frac{\beta}{\gamma}(\zeta - X_1))}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial X_2} = \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\zeta - X_1 + \frac{\gamma}{\beta}} - 1$$

□

3.3 L'optimum pour l'individu

Dans cette section on va s'intéresser au mode de décision de l'individu. L'individu essaye de minimiser sa fonction de coût (cf introduction) et la représentation graphique que l'on peut en faire. Nous reprenons les critères de décision exposés dans

[1] Individual vaccination as Nash equilibrium in a SIR model: the interplay between individual optimization and societal policies

3.3.1 La Décision individuelle

Théorème 4. *Mode de Décision*

Si à l'instant t $\frac{\phi_I^{X_0, U}(\infty) - \phi_I^{X_0, U}(t)}{1 - \phi_I^{X_0, U}(t)} \geq \frac{r_V}{r_I}$ on se fait vacciner dans les autres cas on ne se fait pas vacciner

ce premier mode de décision ne comprend pas tous les cas on peut donc en proposer un plus précis

Théorème 5. *Mode de Décision*

a) Si $r_V \geq r_I$ on ne se fait pas vacciner

b) Si $r_V < r_I$ et $\phi_I^{X_0, U}(\infty) \leq \frac{r_V}{r_I}$ alors pas de vaccination.

c) sinon la fonction $\phi_V(t)$ représentant le nombre de personnes vaccinées au temps t vérifie

$\dot{\phi}_V(t) = f(t)1_{[0, \tau]}(1 - \phi_V(t))$ avec τ qui vérifie:

$$\frac{\phi_I^{X_0, U}(\infty) - \phi_I^{X_0, U}(\tau)}{1 - \phi_I^{X_0, U}(\tau)} = \frac{r_V}{r_I}$$

Proof. Nous rappelons que le coût pour l'individu est :

$$r_I \phi_I(\infty) + \int_0^{\infty} r_V (1 - \phi_I(t)) + (r_V - r_I)(\phi_I(\infty) - \phi_I(t)) d\phi_V(t)$$

on rappelle également que ϕ_I est une fonction croissante avec le temps.

a)

Dans ce cas tous les termes de la fonction de coûts sont positifs le minimum est donc 0 et il est atteint avec ϕ_V identiquement nulle. On ne vaccine donc pas dans ce cas.

b)

on va s'intéresser à la monotonie de la fonction de coût on la dérive donc, on a:

$$\frac{d}{dt} (r_V (1 - \phi_I(t)) + (r_V - r_I)(\phi_I(\infty) - \phi_I(t))) = (r_I - r_V) \frac{d\phi(t)}{dt}$$

la dérivée est positive comme produit de termes positifs on a donc la fonction qui est croissante en fonction du temps la plus petite valeur prise par cette fonction quand $t \geq 0$ est en $t = 0$ la valeur en 0 est $r_V - r_I \phi_I(\infty)$ et d'après nos hypothèses cette quantité est positive et donc le minimum atteignable est toujours 0 est il est atteint avec ϕ_V identiquement nulle. La stratégie optimale est donc de ne pas vacciner.

c)

d'après les calculs précédents la partie qui est dans l'intégrale de la fonction de coût n'est pas toujours positive il existe des t tel que,

$$r_V - r_I \phi_I(\infty) + (r_I - r_V) \phi_I(t) \leq 0 \iff \frac{\phi_I(\infty) - \phi_I(t)}{1 - \phi_I(t)} \geq \frac{r_V}{r_I}$$

Pour atteindre le minimum on vaccine pour les t ou c'est négatif et on arrête après de plus $t \mapsto \frac{\phi_I(\infty) - \phi_I(t)}{1 - \phi_I(t)}$ est décroissante et donc on vaccine jusqu'au temps τ

$$\frac{\phi_I^{X_0, U}(\infty) - \phi_I^{X_0, U}(\tau)}{1 - \phi_I^{X_0, U}(\tau)} = \frac{r_V}{r_I}$$

□

3.3.2 Représentation graphique

graphiquement on peut représenter l'optimum de l'individu comme ceci:

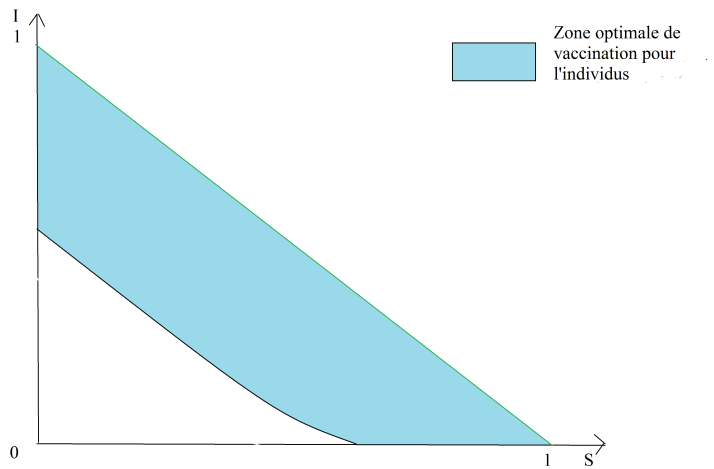


Figure 3.1: Optimum Individus

graphiquement on peut représenter la décision de l'individu comme ceci:

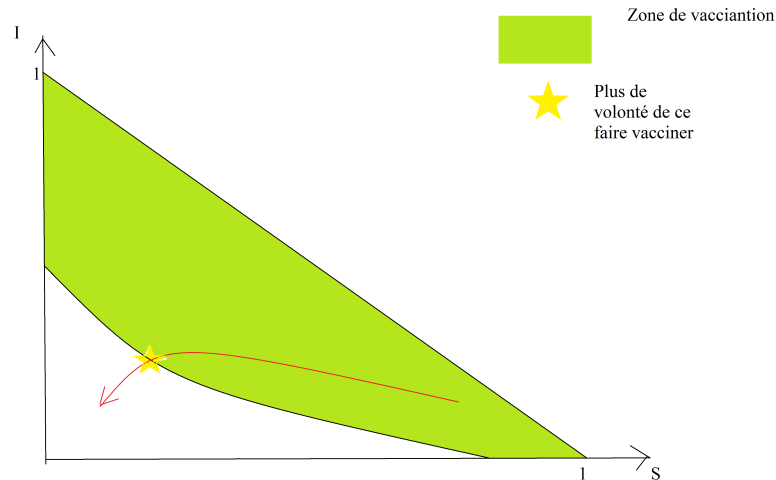


Figure 3.2: Décision Individus

3.4 l'optimum pour la société

On s'intéresse maintenant à l'optimum pour la société (cf Introduction) pour les fonctions de coût.

3.4.1 Le choix de la société

On reprend l'ensemble qui est donné par

[1] Individual vaccination as Nash equilibrium in a SIR model: the interplay between individual optimization and societal policies

Théorème 6. *Mode de Décision*

La courbe délimitant la région de vaccination à l'équilibre est :

$$\{X = (X_1, X_2) \in \Omega \mid \partial_{X_1} \zeta(X_1, X_2) = \frac{r_V}{r_I}\}$$

au dessus de cette courbe on ne vaccine pas en dessous on vaccine

Proof. voir

[1] Individual vaccination as Nash equilibrium in a SIR model: the interplay between individual optimization and societal policies □

3.4.2 Représentation graphique

graphiquement on peut représenter l'optimum de la société comme ceci:

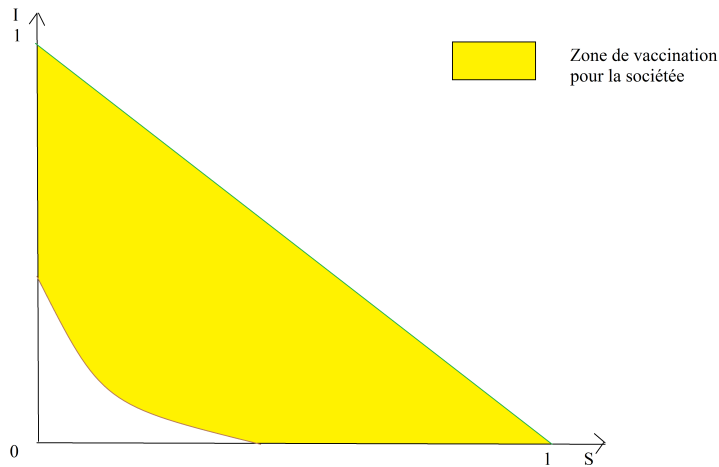


Figure 3.3: Optimum Société

3.5 l'équilibre de Nash conciliant les différents intérêts

Définition 4. *équilibre de Nash*

Un équilibre est un équilibre de Nash si aucun joueur n'a intérêt à changer unilatéralement sa stratégie qui l'a amené à cet équilibre.

3.5.1 Stratégie pour avoir un équilibre

On reprend l'ensemble qui est donné par

[1] Individual vaccination as Nash equilibrium in a SIR model: the interplay between individual optimization and societal policies

Théorème 7. *L'équilibre* Si on est dans un cas où l'individu accepte de se faire vacciner on pose τ le premier temps où la dynamique touche l'ensemble

$$\{(X_1, X_2) \in \Omega \mid \frac{\zeta(X_1, X_2)}{X_1} = \frac{r_V}{r_I}\} \cup \{(X_1, X_2) \in \Omega \mid X_1 = 0\}$$

l'unique équilibre est alors caractérisé par:

$$dU(t) = u_{max} \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t) dt$$

et

$$d\phi_V(t) = \frac{u_{max}}{X_1(t)} (1 - \phi_V(t)) \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t)$$

Remarque 5. *pas forcément l'optimum...* L'équilibre obtenu est l'optimum tel que l'équilibre soit un équilibre de Nash d'autres stratégies permettent d'obtenir un coût plus faible mais l'équilibre n'est plus un équilibre de Nash se référer à

[1] Individual vaccination as Nash equilibrium in a SIR model: the interplay between individual optimization and societal policies. pour avoir un exemple explicite.

3.5.2 Représentation graphique

graphiquement on peut représenter les deux optimum comme ceci:

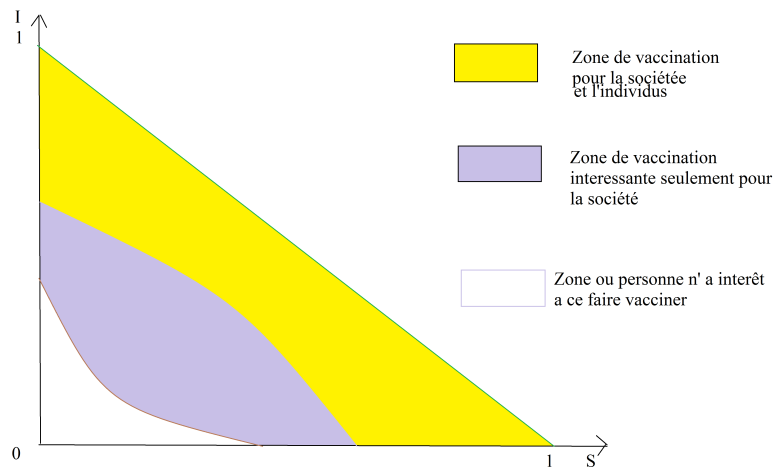
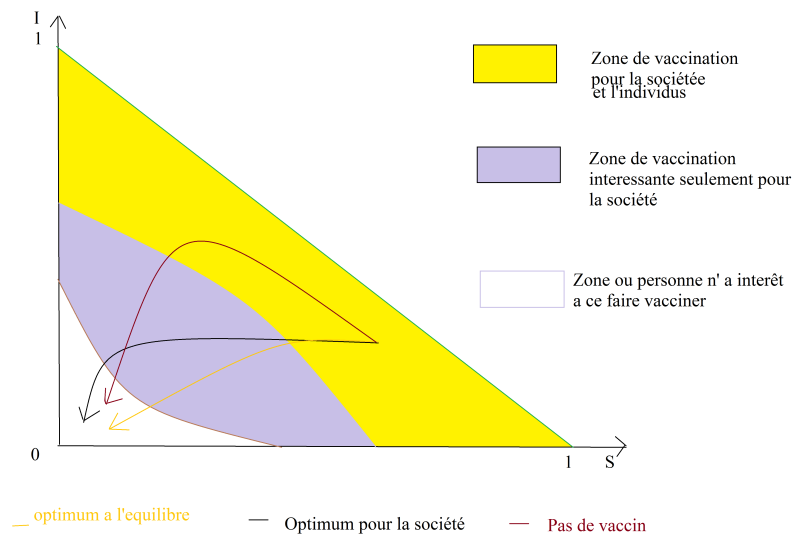


Figure 3.4: Optimum à l'équilibre

graphiquement on peut représenter les différentes évolutions de l'épidémie en fonction de la



vaccination

Figure 3.5: Evolution

4 Actualisation des coûts

Dans cette partie nous allons utiliser de l'actualisation dans le modèle de décisions comme ceci est utilisé en économie .

4.1 Présentation du modèles

On introduit un taux d'amortissement \mathcal{D} et les nouveaux coûts comme cela est fait dans

[1] Individual vaccination as Nash equilibrium in a SIR model: the interplay between individual optimization and societal policies Dans cette nouvelle approche au temps t l'individu va actualiser le coût du vaccin il ne va plus se dire quand je me ferai vacciner le coût est de r_v mais il va actualiser le coût et il va se dire par exemple si dans deux ans je me fais vacciner après actualisation ça me coûte tant aujourd'hui. on va définir :

$$\varphi_I(t) = \int_0^t e^{-\mathcal{D}\tau} d\phi_I(\tau)$$

ceci prend en compte à la fois la probabilité d'être infecté ainsi que l'actualisation de l'infection.

Définition 5. La fonction de coût à minimiser est:

$$C_{\mathcal{D}}(\phi_V) = r_I \varphi_I(\infty) + \int_0^{\infty} r_I (\varphi_I(t) - \varphi_I(\infty)) + r_V e^{-\mathcal{D}t} (1 - \phi_I(t)) d\phi_V(t)$$

cette fonction de coût actualise à l'instant présent le coût de la vaccination. Le coût de la vaccination étant perçu différemment aujourd'hui que dans le futur.

Remarque 6. on peut remarquer que lorsque $\mathcal{D} = 0$ on est dans le cas qui a été précédemment ce cas correspond au cas où le coût de la vaccination est perçu de la même façon aujourd'hui que dans le futur.

4.2 Représentations graphique

comme cela est prouvé dans [1] Individual vaccination as Nash equilibrium in a SIR model: the interplay between individual optimization and societal policies Si $\mathcal{D} > 0$ et que $\frac{r_v}{r_i}$ est assez petit on va avoir cette fois ci trois zones qui vont apparaître

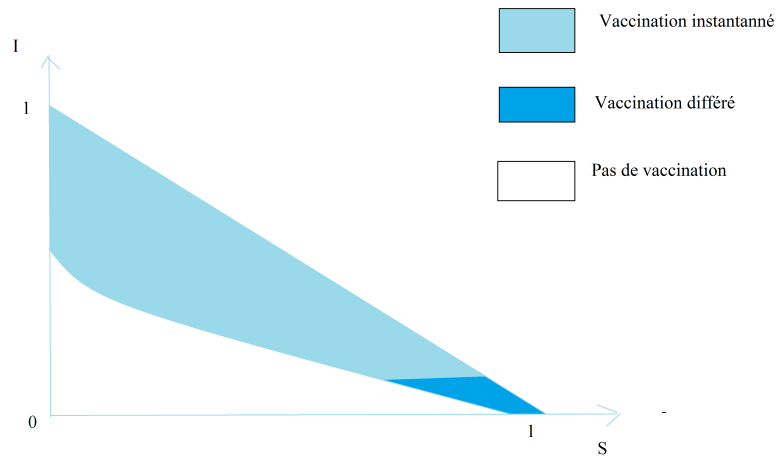


Figure 4.1: Optimum

5 Conclusion

5.1 Conclusion

Pour conclure on peut dire que malgré le fait que la société représente l'ensemble des individus optimiser la vaccination en fonction d'un individu ne permet pas d'obtenir un optimum pour la société. On constate que différentes approches permettent d'obtenir des résultats quasiment similaires mais pas complètement identiques la dernière approche présentée est la plus proche de la réalité même si personne ne fait de calcul mathématique avant d'aller se faire vacciner on se projette toujours vers l'avenir et essayons de savoir quel est notre intérêt de nous faire vacciner .

Bibliography

- [1] Laetitia Laguzet , Gabriel Turinici *Individual vaccination as Nash equilibrium in a SIR model: the interplay between individual optimization and societal policies.*
- [2] Jean Mawhin *Problèmes de Cauchy pour les équations différentielles et théorie de l'intégration:influences mutuelles* Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, tome 9(1988),p.231-246
- [3] Peter J.Francis *Optimal tax/subsidy combinations for the flu season*
- [4] Laetitia Laguzet , Gabriel Turinici *Global optimal vaccination in the SIR model: properties of the value function and application to cost-effectiveness analysis.*