**Nelly Alandou**

# ATTACHEMENT PREFERENTIEL

**Mémoire d'initiation à la recherche**

Sous la direction de Madame **Bénédicte Haas**

**C**ycle **p**luridisciplinaire d'**é**tudes **s**upérieures
Troisième année (L3)

# Sommaire

## Genèse

De nombreux réseaux comme Facebook, le Word Wide Web... partagent de nombreuses caractéristiques et notamment, une propriété dite d'invariance d'échelle. Cette propriété d'invariance d'échelle se manifeste par le fait que les degrés des nœuds du réseau suivent une loi puissance : si l'on définit le degré $k$ d'un nœud comme le nombre de liens qui lui sont adjacents dans le graphe, on observe que la proportion de nœuds de degré $k$ est proportionnelle à $k^{-\gamma}$ pour un certain coefficient $\gamma$. Aussi, les nombreuses occurrences de cette invariance d'échelle dans les phénomènes observés empiriquement motivé la recherche de modèles susceptibles de présenter les mêmes caractéristiques.

En 1999, Barabási et Albert publient ainsi un travail sur l'apparition de propriétés d'invariance d'échelle dans des graphes non-orientés générés suivant des processus d'attachement préférentiel.

L'attachement préférentiel se définit comme un processus dynamique au cours duquel des individus arrivent les uns après les autres au sein d'une population et doivent choisir de rejoindre une « classe », ce choix se faisant en fonction de la population présente : les nouveaux sommets arrivant dans le graphe s'attachent préférentiellement aux sommets avec le plus grand nombre de liens.

C'est dans leur caractère très général que les processus d'attachement préférentiel trouvent leur richesse : ces modèles sont appliqués à l'évolution du réseau des citations scientifiques, le nombre de liens pointant vers une page web, l'évolution de la richesse des 1% les plus riches. . .

Dans le cas du World Wide Web, l'intérêt suscité par le papier de Barabasi et Albert était lié à la volonté de développer des algorithmes de recherche sur le Web plus performants et d'améliorer, par une meilleure connaissance de la topologie du Web, la circulation d'information. Empiriquement, on observe que la probabilité qu'une page Web ait exactement $k$ liens pointant vers elle est proportionnelle à $k^{-\gamma}$ avec $\gamma = 2,1$.

Après avoir présenté le modèle, nous étudierons l'évolution au cours du temps des degrés des différents sommets du graphe puis, nous montrerons comment apparait la loi puissance dans les processus d'attachement préférentiel.

# 1 Le modèle

**Definition 1.1.** *Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est défini par la donnée d'un ensemble $V$ de sommets et d'un ensemble $E$ d'arêtes, chaque arête étant une paire de sommets.*

**Definition 1.2.** *Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.*

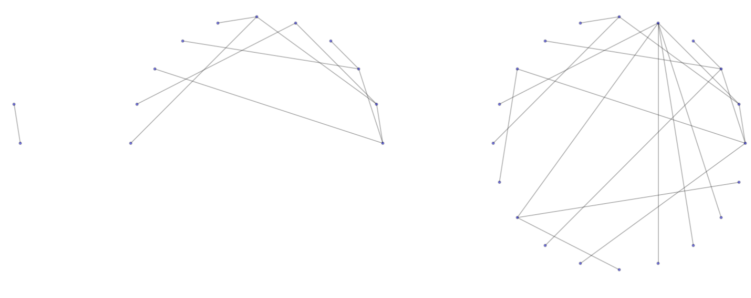
**Definition 1.3.** *Le degré d'un sommet $v$ est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.*

L'idée ici est de modéliser la croissance de graphes aléatoires pour le modèle d'attachement préférentiel, et de comprendre l'origine de cette propriété d'invariance d'échelle.
On se propose ainsi d'étudier une suite de graphes notée $(PA_t(m, \delta))_{t \geq 1}$ correspondant au temps $t$ à un graphe de $t$ sommets et $mt$ arêtes pour un certain $m = 1, 2....$ $\delta$ est un paramètre du modèle supérieur ou égal à $-1$, m correspond au nombre d'arêtes attachées au sommet lorsqu'il arrive.
On s'intéresse d'abord au modèle dans le cas $m = 1$ puis on généralisera.

## 1.1 Cas $m = 1$

$(PA_1(1, \delta))$ est un graphe d'un seul sommet avec une boucle. On note $v_1^{(1)}, ..., v_t^{(1)}$ l'ensemble des sommets de $(PA_t(1, \delta))$, $D_i(t)$ le degré du sommet $v_i^{(1)}$ dans $(PA_t(1, \delta))$, avec la convention qu'une boucle augmente le degré de 2.
Conditionnellement à $(PA_t(1, \delta))$, la règle de croissance pour obtenir $(PA_{t+1}(1, \delta))$ se définit comme suit : on ajoute un seul sommet $v_{t+1}^{(1)}$ avec une seule arête dont la seconde extrémité se connecte à un sommet $v_i^{(1)}, i = 1, ..., t, t+1$ selon la loi de probabilité ci-dessous.

$$P(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid PA_t(1, \delta)) = \begin{cases} \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+(1+\delta)} \; pour & i = t+1 \\ \frac{D_i(t)+\delta}{t(2+\delta)+(1+\delta)} \; pour & i = 1, .., t \end{cases} \tag{1}$$



(a) $t = 1$ (b) $t = 12$ (c) $t = 20$

FIGURE 1 – Evolution de $PA_t(1, 0)$

Le modèle ci-dessus est appelé modèle d'attachement préférentiel affine, les probabilités dans (1) ont une dépendance affine en les $D_i(t)$.

**Proposition 1.** *Soit $m = 1$. Alors pour tout $i$ et tout $t \geq i$, $D_i(t) \geq 1$*

*Démonstration.* Tout nouveau sommet arrive dans le graphe "attaché" à une arête. Étant donné qu'on ne supprime pas d'arêtes, le degré de chaque sommet reste supérieur ou égal à 1. □

**Remarque 1.1.** *On a ainsi (puisque $\delta \geq -1$) $D_i(t) + \delta \geq 0$ pour tout $i$ et pour tout $t \geq i$. On vérifie que la formule de l'équation 1 :*

$$P(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid PA_t(1,\delta)) = \begin{cases} \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+(1+\delta)} & \text{pour} \quad i=t+1 \\ \frac{D_i(t)+\delta}{t(2+\delta)+(1+\delta)} & \text{pour} \quad i = 1,..,t \end{cases} \tag{2}$$

*définit bien une probabilité, i.e. que la somme sur $i \in [1, t+1]$ vaut bien 1 :*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{t+1}(P(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid PA_t(1,\delta)) &= \sum_{i=1}^{t} \frac{D_i(t) + \delta}{t(2+\delta) + (1+\delta)} + \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+(1+\delta)} \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^{t} D_i(t)) + t\delta + 1 + \delta}{t(2+\delta) + (1+\delta)} \end{aligned} \tag{3}$$

*Et on a*

$$\sum_{i=1}^{t} D_i(t) = 2t$$

*car $PA_1(1,\delta)$ compte $t$ arêtes (on en rajoute 1 à chaque temps $t$), et on compte chacune des arêtes deux fois en sommant sur tout le graphe, d'où le $2t$. Et on a le bon résultat.*

## 1.2 Cas $m \geq 1$

On définit le modèle pour $m \geq 1$ par extension du cas $m = 1$ : on commence par étudier $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$, et on note les sommets de $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$ par $v_1^{(1)}, ..., v_{mt}^{(1)}$. On identifie ensuite $\{v_{(j-1)m+1}^{(1)}, ..., v_{jm}^{(1)}\}$ dans $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$ à $v_j^{(m)}$ dans $PA_t(m,\delta)$ : on fusionne les $m$ sommets de $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$, au sommet de $PA_t(m,\delta)$ résultant sont rattachés toutes les arêtes au départ attachées à ces $m$ sommets . Ceci définit le modèle pour $m \geq 1$. Il s'en suit que $D_j^{(m)}(t) = \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} D_k^{(1)}(mt)$.

Cette construction correspond à une mise à jour intermédiaire des degrés.

**Remarque 1.2.** *On remarque que le graphe $PA_t(m,\delta)$ ainsi défini compte exactement $t$ sommets, à raison de 1 sommet rajouté à chaque temps $t$, et $mt$ arêtes à raison de l'ajout* *de $m$ arêtes par sommet ajouté. Le degré total du graphe est, avec le même raisonnement que dans le cas $m = 1$, $2mt$, puisqu'on somme sur les $mt$ arêtes et on les compte chacune 2 fois.*

La description de $PA_t(m, \delta)$ en terme de $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$ telle que ci-dessus, est bien légitime. En effet, une arête dans $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$ est reliée à un sommet $v_k^{(1)}$ avec probabilité proportionnelle au poids de $v_k^{(1)}$ avec le poids de $v_k^{(1)}$ égal à la somme du degré de $v_k^{(1)}$ et de $\frac{\delta}{m}$. Ainsi, une arête dans $PA_t(m, \delta)$ est reliée au sommet $v_j^{(m)}$ avec probabilité proportionnelle au poids total de $v_{(m)}^j$ :
$\sum_{k=(j-1)m}^{jm} (D_k^{(1)}(mt) + \frac{\delta}{m}) = \sum_{k=(j-1)m}^{jm} D_k^{(1)}(mt) + \delta = D_j^{(m)}(t) + \delta.$
Aussi, garde-t-on avec cette description l'aspect essentiel du modèle d'attachement préférentiel : les arêtes auront tendance à se relier aux sommets avec un degré plus grand, on retrouve cette idée du riche qui s'enrichit.

## 1.3 Descriptions alternatives de $PA_t(mt, \delta)$

Définir $PA_t(m, \delta)$ en fonction de $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$ est particulièrement pratique. Cependant, il existe des définitions plus directes du modèle pour $m > 1$.

On commence à $t = 1$ avec $PA_1(m, \delta)$ qui est un graphe avec $m$ boucles.Pour construire $PA_{t+1}(m, \delta)$ à partir de $PA_t(m, \delta)$, on ajoute un sommet avec $m$ arêtes qui lui sont attachées. Ces arêtes sont attachées successivement avec mise à jour intermédiaire des degrés. La $k$-ième arête est reliée :

→ au sommet $v_i^{(m)}$ , $i \in [1, t]$ avec probabilité proportionnelle à $D_i(k-1, t) + \delta$ ; où on a posé pour $k = 1, ..., m$, $D_i(k, t)$ le degré du sommet i après que le $k$-ième sommet soit ajouté

→ au sommet $v_{t+1}^{(m)}$ avec probabilité proportionnelle à $D_i(k - 1, t) + 1 + \frac{\delta}{m}.k$ ; et on initialise $D_{t+1}(0, t) = 0$.

**Remarque 1.3.** *Cette construction alternative de $PA_t(m, \delta)$ est en réalité équivalente à celle qui consiste à fusionner $m$ sommets consécutifs dans $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$. En effet, on se place au temps $t + 1 = mj$ dans $PA_{mt}(1, \frac{\delta}{m})$ (donc au temps $j$ dans $PA_t(m, \delta)$) et considérons $v_{(j-1)m+1}^{(1)}, ..., v_{jm}^{(1)} = v_{(j-1)m+k}^{(1)}, k = 1, ..., m$ ensemble des $m$ derniers sommets ajoutés dans $PA_t(1, \frac{\delta}{m})$ :*

→ *La probabilité que $v_{(j-1)m+k}$ se relie à un sommet $v_l^{(1)}$ dans $PA_{m(j-1)+k-1}(1, \frac{\delta}{m})$ est proportionnelle à $D_l(m(j-1) + k - 1) + \frac{\delta}{m}$ ce qui correspond, dans le cas de l'attachement séquentiel à $D_l(k - 1, j - 1) + \delta$*

→ *La probabilité que $v_{(j-1)m+k}$ se relie à un des $m$ sommets dans la classe de ceux qui seront fusionnés pour donner $v_j^{(m)}$ est proportionnelle à la somme de*

— *la probabilité qu'il se relie à lui même (qui est proportionnelle à* $1 + \frac{\delta}{m}$

— *et la probabilité qu'il se relie au k-1-ème autres sommets de sa classe déjà présents dans le graphe lorsqu'on l'ajoute :*
$\sum_{e=m(j-1)+1}^{m(j-1)+k-1} (D_e(m(j-1)) + \frac{\delta}{m}) = D_{t+1}(k-1,t) + (k-1) * (\frac{\delta}{m})$

*Et obtient bien en sommant,* $D_{t+1}(k-1,t) + 1 + k * (\frac{\delta}{m})$

## 1.4 Topologie du graphe en fonction de $\delta$

Pour des valeurs particulières de $\delta$, on retrouve des exemples classiques de la littérature.

Le cas $\delta = 0$ correspond au modèle étudié par Barabási et Albert et dont les résultats ont été accueillis en 1999. Le fait de choisir $\delta = 0$ assure que la règle de croissance du graphe n'est plus seulement affine en les degrés mais linéaire.

Le cas $\delta = -1$ correspond au cas où le graphe est connexe. En effet, $P(v_{t+1}^{(1)} \to v_{t+1}^{(1)} \mid PA_t(1,-1)) = 0$ pour tout $t \geq 1$.
$P(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid PA_t(1,-1)) = \frac{D_i(t)-1}{t}$ pour tout $t \in [1,t]$. Et puisque la probabilité d'avoir une boucle sur un sommet $v_i^{(1)}$ est nulle sauf si c'est $v_1^{(1)}$, alors $D_i(t) = 1$ pour tout $i > 1$, pour tout $t \geq i$ et donc $P(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid PA_t(1,-1)) = \frac{\mathbf{1}_{\{v_i^{(1)} = v_1^{(1)}\}}}{t}$ Ainsi,dans $PA_t(1,\delta)$, tous les sommets sont reliés à $v_1^{(1)}$ par exactement une arête, y compris lui-même (donc une boucle).

**Dans la suite, on s'intéressera au cas** $m = 1, \delta > -1$

## 2 Boite à outils

### 2.1 La fonction Gamma

La *fonction Gamma* $t \mapsto \Gamma(t)$ définie pour tout $t > 0$ par :

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x$$

Elle vérifie la propriété $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. En effet :

$$\begin{aligned}
\Gamma(t+1) &= \int_0^\infty x^t e^{-x} \,\mathrm{d}x \\
&= \left[x^t \times e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty t \times x^t e^{-x} \,\mathrm{d}x = t\Gamma(t)
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} = \frac{1}{b-a-1}\left(\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k-1+b)} - \frac{\Gamma(k+1+a)}{\Gamma(k+b)}\right)$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k-1+b)} - \frac{\Gamma(k+1+a)}{\Gamma(k+b)} &= \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k-1+b)} - \frac{(k+a) * \Gamma(k+a)}{(k-1+b) \times \Gamma(k-1+b)} \\
&= \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k-1+b)} \times \left(\frac{k-1+b-k-a}{k-1+b}\right) \\
&= \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} \times (b-a-1)
\end{aligned}$$

### 2.2 Formule de Stirling

$$\begin{aligned}
&e^{-t} t^{t+1/2} \sqrt{2\pi} \leq \Gamma(t+1) \leq e^{-t} t^{t+1/2} \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12t}} \\
\Leftrightarrow\ &e^{-t} t^{t-1/2} \sqrt{2\pi} \leq \Gamma(t) \leq e^{-t} t^{t-1/2} \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12t}}
\end{aligned}$$

Une conséquence utile en pratique de cette formule est :

$$\frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t)} = t^a (1 + \mathcal{O}(1/t))$$

En effet, on a par cette formule de Stirling :

$$e^{-(t+a)} (t+a)^{t+a-1/2} \sqrt{2\pi} \leq \Gamma(t+a) \leq e^{-(t+a)} (t+a)^{t+a-1/2} \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12(t+a)}}$$

Et puisqu'on a :

$$\frac{e^{-(t+a)} (t+a)^{t+a-1/2} \sqrt{2\pi}}{e^{-t} t^{t-1/2} \sqrt{2\pi}} = e^{-a} \times e^{(t-1/2)\ln\left(\left(1+\frac{a}{t}\right)\right)} \times t^a e^{a \ln(1+\frac{a}{t})}$$

avec $\frac{a}{t} \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow \infty$ et a $\ln(1+x) = x + o(x)$ au voisinage de 0, on déduit :

$$\frac{e^{-(t+a)}(t+a)^{t+a-1/2}}{e^{-t}t^{t-1/2}} \sim t^a \times e^{-a+a-a/2t+o(1)} \times e^{a\times\frac{a}{t}+o(1/t)} \sim t^a(1+\mathcal{O}(1/t)).$$

On obtient la même équivalence asymptotique pour le membre de droite ce qui conclut.

## 2.3 Les martingales et le théorème de convergence des martingales positives

On fixe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$. Relativement à cet espace, soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale si, pour tout $n \in N$, $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$

On obtient la définition d'une sur-martingale (respectivement d'une sous-martingale) en remplaçant l'égalité précédente par $\leq$ (respectivement $\geq$ ).

**Théorème de convergence des surmartingales positives** Soit $(X_n)_{n\in N}$ une sur-martingale positive. Alors $X_n$ converge presque sûrement vers une limite $X_\infty$. En particulier, $X_\infty \in \mathcal{L}^1$ et on a $X_n \geq \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_n]$

**Inégalité d'Azuma-Hoeffding** Soit $\{M_k\}_{k=0}^n$ une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$. On suppose de plus qu'il existe une suite $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $\mid M_k - M_{k-1} \mid \leq \alpha_k$. Alors, pour tout $\alpha > 0$ et $n \geq 1$, on a :

$$\mathbb{P}(\mid M_n - \mathbb{E}[M_n] \mid \geq \alpha) \leq 2 * \exp(-\alpha^2/(2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2))$$

## 2.4 Propriété de Markov

**Definition 2.1** (Propriété de Markov simple)**.** *. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X_0, X_1, ..., X_n, ...$ une suite de variables aléatoires à valeur dans l'ensemble $\chi$ (muni d'une tribu adéquate). On note /mathcal$F_n := \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ou possède la propriété de Markov simple si et seulement si : Pour tout $n$, tout événement $B \in \sigma(X_{n+1})$ :*

$$\mathbb{P}(B \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(B \mid X_n)$$

*ou de manière équivalente :*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_B \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_B \mid X_n)$$

# 3 Comportement asymptotique du degré des sommets

On commence par étudier ici les degrés de sommets donnés. Dans la suite, notons $PA_t(1,\delta) = PA_t$ pour simplifier les notations.

**Théorème 1.** *On fixe $m = 1$, $i \in \mathbb{N}$ et $\delta > -1$. Alors $\frac{D_i(t)}{t^{1/2+\delta}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $\xi_i$ lorsque $t \longrightarrow \infty$, et on a :*

$$\mathbb{E}[D_i(t)+\delta] = (1+\delta)\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(i-1/(2+\delta))}{\Gamma(t+\frac{1+\delta}{2+\delta})\Gamma(i)} \tag{4}$$

*Démonstration.* Fixons $m = 1$ et soit $t \geq i$. On a :

$$\mathbb{E}[D_i(t+1)+\delta \mid D_i(t)] = D_i(t)+\delta+\mathbb{E}[D_i(t+1)-D_i(t) \mid D_i(t)] \tag{5}$$

Pour tout $i$, pour tout $t \geq i$, on a conditionnellement à $PA_t(1,\delta)$
$D_i(t+1) - D_i(t)$ qui vaut :

→ 1 si $v_{t+1}$ se rattache au sommet $v_i$, et ce avec probabilité $\frac{D_i(t)+\delta}{(2+\delta)t+1+\delta}$

→ 0 sinon.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[D_i(t+1)+\delta \mid D_i(t)] =& D_i(t)+\delta+\frac{D_i(t)+\delta}{(2+\delta)t+1+\delta}\\ =&(D_i(t)+\delta)(\frac{(2+\delta)t+1+\delta+1}{(2+\delta)t+1+\delta})\\ =&(D_i(t)+\delta)\frac{(2+\delta)(t+1)}{(2+\delta)t+1+\delta}\end{aligned} \tag{6}$$

Cette formule étant valable pour tout $t \geq i$, on a par induction :

$$\mathbb{E}[D_i(t)+\delta] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[D_i(t)+\delta \mid D_i(t-1)]] \quad = \mathbb{E}[D_i(i)+\delta]\prod_{s=i}^{t-1}\frac{(2+\delta)(s+1)}{(2+\delta)s+1+\delta} \tag{7}$$

(Dans le cas $t = i$, on fait à droite un produit sur l'ensemble vide, égal à 1 par convention. Et le résultat est correct.)

Calculons $\mathbb{E}[D_i(i)+\delta]$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[D_i(i)+\delta] =&\frac{1+\delta}{(2+\delta)(i-1)+1+\delta}*2+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{D_k(i-1)+\delta}{(2+\delta)(i-1)+1+\delta}*1+\delta\\ =&\frac{1+\delta}{(2+\delta)(i-1)+1+\delta}+\sum_{k=1}^{i-1}\frac{D_k(i-1)+\delta}{(2+\delta)(i-1)+1+\delta}+\frac{1+\delta}{(2+\delta)(i-1)+1+\delta}+\delta\\ =&1+\delta+\frac{1+\delta}{(2+\delta)(i-1)+1+\delta}\text{ (par la remarque 2.2)}\\ =&(1+\delta)\frac{(2+\delta)i}{(2+\delta)(i-1)+1+\delta}\end{aligned} \tag{8}$$

Et on obtient bien le résultat du théorème :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_i(t)+\delta] =& (1+\delta)\frac{(2+\delta)i}{(2+\delta)(i-1)+1+\delta} * \prod_{s=i}^{t-1}\frac{(2+\delta)(s+1)}{(2+\delta)s+1+\delta} \\
=& (1+\delta) * \prod_{s=i-1}^{t-1}\frac{(2+\delta)(s+1)}{(2+\delta)s+1+\delta} \\
=& (1+\delta)\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(i-1/(2+\delta))}{\Gamma(t+\frac{1+\delta}{2+\delta})\Gamma(i)}
\end{aligned} \tag{9}$$

De plus, en utilisant de nouveau l'équation ci-dessus, on obtient que la suite $(M_i(t))_{t\geq 1}$ donnée par :

$$M_i(t) = \frac{D_i(t)+\delta}{1+\delta} * \prod_{s=i-1}^{t-1}\frac{(2+\delta)s+1+\delta}{(2+\delta)(s+1)} \tag{10}$$

est une martingale positive de moyenne 1. En effet, en considérant la filtration canonique $(\mathcal{F}_t)_{t\geq i}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_i(t+1) \mid \mathcal{F}_t] =& \mathbb{E}[D_i(t+1)+\delta \mid \mathcal{F}_t] * \prod_{s=i-1}^{t}\frac{(2+\delta)s+1+\delta}{(2+\delta)(s+1)} \\
=& \mathbb{E}[D_i(t+1)+\delta \mid D_i(t)] * \prod_{s=i-1}^{t}\frac{(2+\delta)s+1+\delta}{(2+\delta)(s+1)}
\end{aligned} \tag{11}$$

La relation $\mathbb{E}[D_i(t+1)+\delta \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[D_i(t+1)+\delta \mid D_i(t)]$ provient du fait que la loi de $PA_{t+1}(1,\delta)$ sachant $\mathcal{F}_t$ ne dépend que de $PA_t$ : le graphe présente une propriété de Markov telle que définie dans la **Boite à outils**, la loi de $PA_{t+1}(1,\delta)$ sachant tout ce qui s'est passé jusqu'au temps $t$ ne dépend en fait que de l'état du graphe $PA_t(1,\delta)$ au temps $t$, et ce par définition de la loi de croissance du graphe. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_i(t+1) \mid \mathcal{F}_t] =& (D_i(t)+\delta)\frac{(2+\delta)(t+1)}{(2+\delta)t+1+\delta} * \prod_{s=i-1}^{t}\frac{(2+\delta)s+1+\delta}{(2+\delta)(s+1)} \\
=& (D_i(t)+\delta) * \prod_{s=i-1}^{t-1}\frac{(2+\delta)s+1+\delta}{(2+\delta)(s+1)} \\
=& M_i(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \geq i
\end{aligned} \tag{12}$$

donc par le théorème de convergence des martingales positives, $M_i(t)$ converge presque surement vers une variable aléatoire limite $M_i$, pour $t \to \infty$.

Or on a :

$$\prod_{s=i-1}^{t-1} \frac{(2+\delta)s+1+\delta}{(2+\delta)(s+1)} = \prod_{s=i-1}^{t-1} \frac{s+\frac{1+\delta}{(2+\delta)}}{s+1} = \frac{\Gamma(t+\frac{1+\delta}{2+\delta})\Gamma(i)}{\Gamma(t+1)\Gamma(i-1/(2+\delta))} \tag{13}$$

En exploitant la formule $\frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(t)} = t^a(1+\mathcal{O}(1/t))$, on obtient :

$$\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(i-1/(2+\delta))}{\Gamma(t+1+\frac{-1}{2+\delta})\Gamma(i)} = t^{1/(2+\delta)}(1+\mathcal{O}(1/t)) * \frac{\Gamma(i-1/(2+\delta))}{\Gamma(i)} \tag{14}$$

Et on peut conclure que $D_i(t)/t^{1/(2+\delta)}$ converge presque surement vers la variable aléatoire $\xi_i = (1+\delta) * M_i * \frac{\Gamma(i-1/(2+\delta))}{\Gamma(i)}$.

□

Ce théorème fait apparaitre la loi puissance affectant le degré des différents sommets du graphe. En effet, une conséquence de la convergence présentée dans ce théorème est qu'on peut être presque certain (au sens des probabilités) que $D_i(t)$ est asymptotiquement proportionnel à $t^{1/(2+\delta)}$ pour $t$ qui tend vers l'infini : pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\mid D_i(t)/t^{1/(2+\delta)} - \xi_i \mid \leq \epsilon) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}((\xi_i - \epsilon) * t^{1/(2+\delta)} \leq D_i(t) \leq (\xi_i + \epsilon) * t^{1/(2+\delta)}) = 1.$$

**Et si on n'autorisait pas les boucles ?**

Dans le cadre des attachements préférentiels, un modèle répandu est celui qui consiste à ne pas autoriser de boucles. Conditionnellement à $PA_t^{(b)}(1,\delta)$ [1], la règle de croissance pour obtenir $PA_{t+1}^{(b)}(1,\delta)$ est donnée par :

$$P(v_{t+1}^{(1)} \to v_i^{(1)} \mid PA_t^{(b)}(1,\delta)) = \frac{D_i(t)+\delta}{t(2+\delta)} \ \textit{pour}\ i = 1,..,t \tag{15}$$

On a utilisant la formule ci-dessus, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_i(t+1)+\delta \mid D_i(t)] =& D_i(t)+\delta+\mathbb{E}[D_i(t+1)-D_i(t) \mid D_i(t)] \\
=& D_i(t)+\delta+\frac{D_i(t)+\delta}{(2+\delta)t} \\
=& (D_i(t)+\delta)\frac{(2+\delta)t+1}{(2+\delta)t} \\
=& (D_i(t)+\delta)\frac{t+\frac{1}{2+\delta}}{t}
\end{aligned}$$

Cette formule étant valable pour tout $t \geq i$, on a par induction :

$$\mathbb{E}[D_i(t)+\delta] = \mathbb{E}[D_i(i)+\delta]\prod_{s=i-1}^{t-1}\frac{s+\frac{1}{2+\delta}}{s}$$

Calculons $\mathbb{E}[D_i(i)+\delta]$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_i(i)+\delta] =& \sum_{k=1}^{i-1}\frac{D_k(i-1)+\delta}{(2+\delta)(i-1)} * 1+\delta \\
=& 1+\delta
\end{aligned} \tag{16}$$

Et on trouve donc que :

$$\mathbb{E}[D_i(t)+\delta] = (1+\delta) * \frac{\Gamma(t+1/(2+\delta))\Gamma(i)}{\Gamma(t)\Gamma(i+1/(2+\delta))} \sim (1+\delta) * t^{1/(2+\delta)}\frac{\Gamma(i)}{\Gamma(i+1/(2+\delta))}$$

On vérifie que $N_i(t) = \frac{D_i(t)+\delta}{1+\delta}\prod_{s=i-1}^{t-1}\frac{s}{s+\frac{1}{2+\delta}}$ est une martingale positive de moyenne 1 et donc elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire $N_i$. Comme pour le premier modèle, on conclut que $\frac{D_i(t)}{t^{1/(2+\delta)}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $\zeta_i$.

1. le (b) sert à différencier ce modèle du précédent

# 4 Évolution de la proportion de sommets d'un degré donné pour le modèle d'attachement préférentiel

Dans la partie précédente, on a étudié le comportement asymptotique du degré des différents sommets du graphe. Dans cette partie, on se donne les outils nécessaires pour retrouver le résultat introduit dans la Genèse, c'est-à-dire la propriété d'invariance d'échelle pour les graphes d'attachement préférentiels.

**Théorème 2.** *Soit $m = 1$ et $\delta > -1$. Il existe $C > 0$ tel que lorsque $t \to \infty$, on a :*

$$\mathbb{P}(\max_k \mid P_k(t) - p_k \mid \geq C\sqrt{\tfrac{log(t)}{t}}) = o(1)$$

*on a posé pour tout $k \geq 1$ :*

*- $P_k(t) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} \mathbf{1}_{\{D_i(t)=k\}}$ la proportion de sommets de degré $k$ au temps $t$,*

*- $p_k = (2+\delta)\frac{\Gamma(k+\delta)\Gamma(3+2\delta)}{\Gamma(k+3+2\delta)\Gamma(1+\delta)}$*

Ce théorème est la clé de voute de ce mémoire. En particulier, il implique que $P_k(t)$ converge *uniformément* en probabilité vers $p_k$ lorsque $t \to \infty$. Ainsi, étudier les propriétés de $p_k$ permettrait de décrire le comportement asymptotique de la proportion de sommets de degré $k$ au temps $t$ ($P_k(t)$) et on devrait voir apparaitre la propriété d'invariance d'échelle annoncée dans la genèse.

### Les propriétés de $p_k$

1. **$p_k$ est une fonction de masse de probabilités** : On utilise de nouveau une formule de la boite à outils :
$$\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} = \frac{1}{b-a-1}(\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k-1+b)} - \frac{\Gamma(k+1+a)}{\Gamma(k+b)})$$
Et donc pour $a = \delta$, $b = 3+2\delta$, on a , puisque $b-a-1 = 2+\delta$ :
$$p_k = \frac{\Gamma(3+2\delta)}{\Gamma(1+\delta)}(\frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k+2+2\delta)} - \frac{\Gamma(k+1+\delta)}{\Gamma(k+3+2\delta)})$$
Donc par télescopage,
$$\sum_{k\geq 1} p_k = \frac{\Gamma(3+2\delta)}{\Gamma(1+\delta)} \times \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+2+2\delta)} = 1$$

2. **le comportement asymptotique de $p_k$ pour $k$ qui tend vers $\infty$** :
$$\begin{aligned} p_k =& (2+\delta)\frac{\Gamma(3+2\delta)}{\Gamma(1+\delta)}\frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k+\delta+3+\delta)} \\ =& (2+\delta)\frac{\Gamma(3+2\delta)}{\Gamma(1+\delta)}(k^{-(3+\delta)}(1+\mathcal{O}(1/k)) \end{aligned}$$
On a donc asymptotiquement, $p_k \sim c{*}k^{-(3+\delta)}$, et on voit apparaitre la loi puissance du degré.

# 5 Concentration du nombre de sommets de degré $k$ autour de leur espérance

La preuve du théorème précédent se déroule en deux temps. Dans un premier temps, nous montrerons que la proportion de sommets de degré $k$ se concentre asymptotiquement autour de son espérance puis, nous consacrerons la section suivante à l'étude du comportement de cette espérance. Cette étude fera enfin apparaitre les $p_k$ dont l'origine reste obscure à ce stade.

On note $N_k(t)$ le nombre de sommets de degré k au temps t.
Avec les notations de la partie précédente, on a donc $N_k(t) = tP_k(t) = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{1}_{\{D_i(t)=k\}}$

**Proposition 2.** *Soit $\delta > -1$. alors, pour tout $C > \sqrt{8}$ , lorsque $t \to \infty$*

$$\mathbb{P}(\max_k \mid N_k(t) - \mathbb{E}[N_k(t)] \mid \geq C\sqrt{tlog(t)}) = o(1) \tag{17}$$

Soit $\{M_k\}_{k\geq 0}$ une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_k\}_{k\geq 0}$ telle que
$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 ... \subset \mathcal{F}_n$ et $\mid M_k - M_{k-1} \mid \leq \alpha_k$. Alors, pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\mathbb{P}(\mid M_n - \mathbb{E}[M_n] \mid \geq \alpha) \leq 2 * \exp(-\alpha^2/(2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2))$$

*Démonstration.* La preuve repose sur l'inégalité d'Azuma-Hoeffding.
Fixons $t$ et $k$ et posons $M_n := \mathbb{E}[N_k(t) \mid PA_n]$. Montrons que $\{M_n\}_{n=0}^t$ vérifie les hypothèses qui permettent d'appliquer l'inégalité d'Azuma-Hoeffding, c'est-à-dire :

1. $PA_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ : $PA_0 = \emptyset$, le graphe est vide au temps 0, donc la tribu engendrée par $PA_0$ est $\{\emptyset, \Omega\}$ (par abus de notation on identifie $PA_0$ à la tribu qu'elle engendre. De plus, on a bien $\{PA_s\}_{s=0}^{n-1} \subset \{PA_s\}_{s=0}^{n}$ pour tout $n \geq 1$ et donc il en découle que $\sigma\left(\{PA_s\}_{s=0}^{n-1}\right) \subset \sigma\left(\{PA_s\}_{s=0}^{n}\right)$ pour tout $n \geq 1$ ;

2. $\{M_n\}_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration engendrée par les $\{PA_s\}_{s=1}^{n}$. On a :

   → $\mathbb{E}[\mid M_n \mid] = \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_k(t) \mid PA_n]] = \mathbb{E}[N_k(t)] \leq t < \infty$
   avec l'avant dernière inégalité justifiée par le fait que le nombre de sommets de degré k est majorée par le nombre total de sommets $t$ fixé ;

   → $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid PA_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_k(t) \mid PA_{n+1}] \mid PA_n] = \mathbb{E}[N_k(t) \mid PA_n] = M_n$ .
   En effet, de façon générale pour $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ deux tribus telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on a $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] \mid \mathcal{A}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]$ et ici on a $\sigma(PA_n) \subset \sigma(PA_{n+1})$ .

3. $\mid M_n - M_{n-1} \mid$ **est bornée pour tout** $n \geq 1$ : montrons que $\mid M_n - M_{n-1} \mid \leq 2$ presque sûrement et pour tout $n \in [1, t]$ :

$$M_n = \mathbb{E}[N_k(t) \mid PA_n] = \sum_{i=1}^{t} \mathbb{P}(D_i(t) = k \mid PA_n)$$

$$M_{n-1} = \sum_{i=1}^{t} \mathbb{P}(D_i(t) = k \mid PA_{n-1})$$

On a besoin d'une relation entre les $\mathbb{P}(D_i(t) = k \mid PA_n)$, $\mathbb{P}(D_i(t) = k \mid PA_{n-1})$.

Pour ça, on pose $PA_s^{(1)} := PA_s$ pour $s \leq n-1$ et pour $s \geq n$, $PA_s^{(1)}$ évolue indépendamment de $PA_s$, mais toujours suivant un modèle d'attachement préférentiel. Ainsi :

→ $PA_s^{(1)}$ et $PA_s$ sont égaux jusqu'au temps $n-1$ et ont la même loi marginale jusqu'au temps $n-1$ ;

→ $D_i^{(1)}(t)$ est indépendant de tout ce qui vient se rajouter au graphe $PA_{n-1}^{(1)} = PA_{n-1}$ après le temps $n-1$. Ainsi, conditionner $D_i^{(1)}(t)$ par rapport à $PA_n$ revient à conditionner par rapport à $PA_n$ et donc on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_i(t) = k \mid PA_{n-1}) =& \mathbb{P}[D_i^{(1)}(t) = k \mid PA_{n-1}^{(1)}] \\ =& \mathbb{P}[D_i^{(1)}(t) = k \mid PA_{n-1}] \\ =& \mathbb{P}[D_i^{(1)}(t) = k \mid PA_n].\end{aligned}$$

De fait, on peut réécrire :

$$M_{n-1} = \sum_{i=1}^{t} \mathbb{P}(D_i^{(1)}(t) = k \mid PA_n)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}M_n - M_{n-1} =& \sum_{i=1}^{t} \mathbb{P}(D_i(t) = k \mid PA_n) - \mathbb{P}(D_i^{(1)}(t) = k \mid PA_n) \\ =& \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[\mathbb{P}(D_i(t) = k \mid D_i(n), PA_n) \mid PA_n] - \mathbb{E}[\mathbb{P}(D_i^{(1)}(t) = k \mid D_i^{(1)}(n), PA_n) \mid PA_n]\end{aligned}$$

Or, ce qui influe sur le degré $D_i(t)$ du sommet $i$ au temps $t \geq n$ sachant $PA_n$ est $D_i(n)$ en raison de la propriété markovienne de notre suite de graphes. Ainsi,

$$\mathbb{P}(D_i(t) = k \mid D_i(n), PA_n) = \mathbb{P}(D_i(t) = k \mid D_i(n)).$$

De même,

$$\mathbb{P}(D_i^{(1)}(t) = k \mid D_i^{(1)}(n), PA_n) = \mathbb{P}(D_i^{(1)}(t) = k \mid D_i^{(1)}(n), PA_{n-1}) = \mathbb{P}(D_i^{(1)}(t) = k \mid D_i^{(1)}(n))$$

On a donc :

$$M_n - M_{n-1} = \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[\mathbb{P}(D_i(t) = k \mid D_i(n)) - \mathbb{P}(D_i^{(1)}(t) = k \mid D_i^{(1)}(n)) \mid PA_n]$$

Puisqu'on a construit $PA_n^{(1)}$ de sorte à ce qu'il ait la même loi marginale que $PA_n$, à partir du temps $n$, on a :

- $\rightarrow$ si $D_i^{(1)}(n) = D_i(n)$ alors $\mathbb{P}(D_i(t) = k \mid D_i(n)) = \mathbb{P}(D_i^{(1)}(t) = k \mid D_i^{(1)}(n))$ puisque $PA_n$ et $PA_n^{(1)}$ ont la même règle de croissance.
- $\rightarrow$ sinon $\mid \mathbb{P}(D_i(t) = k \mid D_i(n)) - \mathbb{P}(D_i^{(1)}(t) = k \mid D_i^{(1)}(n)) \mid$ est la distance entre deux réels compris entre 0 et 1 et est donc plus petite que 1.

On en déduit :

$$\mid \mathbb{P}(D_i(t) = k \mid D_i(n)) - \mathbb{P}(D_i^{(1)}(t) = k \mid D_i^{(1)}(n)) \mid \leq \mathbf{1}_{D_i^{(1)}(n) \neq D_i(n)}$$

$$\Rightarrow \mid M_n - M_{n-1} \mid \leq \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{D_i^{(1)}(n) \neq D_i(n)} \mid PA_n] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{t} \mathbf{1}_{D_i^{(1)}(n) \neq D_i(n)} \mid PA_n]$$

Mais on rappelle que par construction, $D_i^{(1)}(n-1) = D_i(n-1)$ et on n'ajoute qu'une seule arête au temps $n$ dans les deux graphes donc au plus deux éléments se rajoutent à l'ensemble des $\{i; D_i^{(1)}(n) \neq D_i(n)\}$ : $\sum_{i=1}^{t} \mathbf{1}_{D_i^{(1)}(n) \neq D_i(n)} \leq 2$.

On peut donc appliquer l'inégalité de Azuma-Hoeffding à $M_n$.
D'une part, pour tout $k > t+1$, $N_k(t) = 0$ car le degré maximal dans un graphe de $t$ sommets est $t - 1 + 2 = t + 1$, à supposer qu'il est relié aux $t-1$ autres sommets et à lui-même.
D'autre part, on a $M_t = \mathbb{E}[N_k(t) \mid PA_t] = N_k(t)$ car $PA_t$ détermine les $N_k(t)$ . Et on écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq t+1} \mid N_k(t) - \mathbb{E}[N_k(t)] \mid > C\sqrt{tlog(t)}) &\leq \sum_{1 \leq k \leq t+1} \mathbb{P}(\mid N_k(t) - \mathbb{E}[N_k(t)] \mid > C\sqrt{tlog(t)}) \\
&= \sum_{1 \leq k \leq t+1} \mathbb{P}(\mid M_t - \mathbb{E}[M_t] \mid > C\sqrt{tlog(t)})) \\
&\leq (t+1) * 2\exp(-C^2 * t\log(t)/(2 * t * 2^2)) \\
&= 2 * \frac{t+1}{t^{C^2/8}} = o(1/t) \ \textit{dès que}\ C > \sqrt{8}
\end{aligned}$$

□

# 6 Comportement asymptotique de l'espérance du nombre de sommets de degré k

On a montré dans la partie précédente que la proportion de sommets de degré $k$ est concentrée autour de son espérance. Ainsi, comprendre comment se comporte l'espérance c'est comprendre le comportement asymptotique de la proportion de sommets d'un degré donné. Montrons que l'espérance $\mathbb{E}[N_k(t)]$ converge en probabilité vers $p_k$.

**Proposition 3.** *Soit $\delta > -1$. Alors, il existe $C$ tel que pour tout $t \geq 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :*

$$\mid \mathbb{E}[N_k(t)] - tp_k \mid \leq C$$

Le théorème 2 se déduit alors des deux propositions précédentes. On a, quitte à remplacer $C$ par $C' = C \times \sqrt{8}$, d'une part,

$$\mid P_k(t) - p_k \mid = \frac{1}{t} \mid N_k(t) - tp_k \mid$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\max_k \mid N_k(t) - tp_k \mid \geq C(1 + \sqrt{tlog(t)}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\max_k \mid \mathbb{E}[N_k(t)] - N_k(t) \mid \geq C\sqrt{tlog(t)}\right) \\
&= o(1)
\end{aligned}$$

car la proposition implique $\max_k \mid \mathbb{E}[N_k(t)] - tp_k] \mid \leq C$.
On en déduit bien,

$$\mathbb{P}\left(\max_k \mid P_k(t) - p_k \mid \geq C\sqrt{\frac{log(t)}{t}}\right) = o(1)$$

### Origine (intuitive ?) des $p_k$

On cherche "avec les mains" une équation de récurrence satisfaite par les $p_k$ justifiant l'expression tout sauf venant de soi des $p_k$ :

$$p_k = (2+\delta)\frac{\Gamma(k+\delta)\Gamma(3+2\delta)}{\Gamma(k+3+2\delta)\Gamma(1+\delta)}$$

$$\mathbb{E}[N_k(t+1) \mid PA_t] = N_k(t) + \mathbb{E}[N_k(t+1) - N_k(t) \mid PA_t]$$

Là, conditionnellement à $PA_t$, comment varie $N_k(t+1)$ par rapport à $N_k(t)$ lorsqu'on rajoute $v_{t+1}$ ?

→ Soit $v_{t+1}$ se relie à un sommet qui était de degré $k-1$ au temps t, ce qui augmente de 1 $N_k(t+1)$ par rapport à $N_k(t)$ : cela arrive avec probabilité $\frac{k-1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)} * N_{k-1}(t)$

→ Soit $v_{t+1}$ se relie à un sommet qui était de degré $k$ au temps t, ce qui diminue de 1 $N_k(t+1)$ par rapport à $N_k(t)$ : cela arrive avec probabilité $\frac{k+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)} * N_k(t)$

→ dans le cas particulier où $k=2$, puisqu'on autorise les boucles, si $v_{t+1}$ se relie à lui-même, il augmente de 1 le nombre de sommets de degré 2 : cela arrive avec probabilité $\frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)}$

→ dans le cas particulier où $k=1$, $v_{t+1}$ viendra augmenter le nombre de sommets de degré 1 s'il se relie à un sommet différent de lui-même : cela arrive avec probabilité $1-\frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)}$

On obtient ainsi en prenant l'espérance dans l'égalité ci-dessus, la relation de récurrence :

$$\mathbb{E}[N_k(t+1)] = \mathbb{E}[N_k(t)] + \frac{k-1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)}\mathbb{E}[N_{k-1}(t)] - \frac{k+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)}\mathbb{E}[N_k(t)]$$
$$+\frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)}\mathbf{1}_{k=2} + (1-\frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)})\mathbf{1}_{k=1}$$

Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, $\frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)} \longrightarrow 0$ et $\frac{t}{t(2+\delta)+1+\delta)} \longrightarrow \frac{1}{2+\delta}$. Ainsi, avec les "mains", si on considère que $N_k(t) \approx tp_k$ et $N_k(t+1) - N_k(t) \approx p_k$, alors l'équation précédente se réécrit :

$$p_k = \frac{k-1+\delta}{2+\delta}p_{k-1} - \frac{k+\delta}{2+\delta}p_k + \mathbf{1}_{k=1}$$

Et on a, puisque $p_0 = 0$, $p_1 = -\frac{1+\delta}{2+\delta}p_1 + 1$ i.e. $p_1 = \frac{2+\delta}{3+2\delta}$, pour tout $k \geq 2$ :

$$p_k = \frac{k-1+\delta}{2+\delta}p_{k-1} - \frac{k+\delta}{2+\delta}p_k \Leftrightarrow \frac{k+2+2\delta}{2+\delta}p_k = \frac{k-1+\delta}{2+\delta}p_{k-1} \Leftrightarrow p_k = \frac{k-1+\delta}{k+2+2\delta}p_{k-1}$$

Et donc,

$$p_k = \frac{k-1+\delta}{2+\delta} \times \frac{k-2+\delta}{k-1+2+2\delta} ... \times \frac{1-2+\delta}{1-1+2+2\delta} p_1$$

$$p_k = \frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k+3+2\delta)} \times \frac{\Gamma(1+3+2\delta)}{\Gamma(1+\delta)} \times \frac{2+\delta}{3+2\delta} = (2+\delta) * \frac{\Gamma(k+\delta)\Gamma(3+2\delta)}{\Gamma(k+3+2\delta)}$$

Montrons le résultat de la proposition.

### Preuve de la proposition

On cherche à majorer la quantité $N_k(t) - tp_k =: u_k(t)$ indépendamment de $t$ et de $k$. On procède par double récurrence sur k et t.

**Commençons par trouver une relation de récurrence entre les $u_k(t)$ .**
On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_k(t+1)] = \mathbb{E}[N_k(t)] + \frac{k-1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)}\mathbb{E}[N_{k-1}(t)] - \frac{k+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)}\mathbb{E}[N_k(t)] \\ + \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)}\mathbf{1}_{k=2} + (1 - \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)})\mathbf{1}_{k=1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(t+1)p_k =& tp_k + p_k = tp_k + \frac{k-1+\delta}{2+\delta}p_{k-1} - \frac{k+\delta}{2+\delta}p_k + \mathbf{1}_{k=1} \\ =& tp_k + (k-1+\delta)(\frac{t}{t(2+\delta)+1+\delta} + \frac{1}{2+\delta} - \frac{t}{t(2+\delta)+1+\delta})p_{k-1} \\ &- (k+\delta)(\frac{t}{t(2+\delta)+1+\delta} + \frac{1}{2+\delta} - \frac{t}{t(2+\delta)+1+\delta})p_k + \mathbf{1}_{k=1}\end{aligned}$$

En soustrayant la première équation à la seconde, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}u_k(t+1) =& u_k(t) + \frac{k-1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta}u_{k-1}(t) - \frac{k+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta}u_k(t) \\ &+ (\frac{1}{2+\delta} - \frac{t}{t(2+\delta)+1+\delta})((k-1+\delta)p_{k-1} - (k+\delta)p_k) \\ &+ \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta}(\mathbf{1}_{k=2} - \mathbf{1}_{k=1})\end{aligned}$$

**Contrôle des termes résiduels de cette relation de récurrence :**

- $\rightarrow$ $\beta_k(t) := \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)}(\mathbf{1}_{k=2} - \mathbf{1}_{k=1})$
  On a pour tout $k > 2$, , $\beta_k(t) = 0$ et sinon
  $\mid \beta_k(t) \mid = \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta)} \leq \frac{1}{t(2+\delta)+1+\delta)} \leq \frac{1}{t+1}$
- $\rightarrow$ $\gamma_k(t) := \left(\frac{1}{2+\delta} - \frac{t}{t(2+\delta)+1+\delta}\right)((k-1+\delta)p_{k-1} - (k+\delta)p_k)$
  Or on a, par la relation de récurrence satisfaite par les $p_k$, pour tout $k > 1$,
  $(k-1+\delta)p_{k-1} = (k+2+2\delta)p_k$. Ainsi, d'une part,
  $\mid \gamma_0(t) \mid = \frac{1+\delta}{(2+\delta)(t(2+\delta)+1\delta)}(1+\delta)p_1$ et pour tout $k > 1$,
  $\mid \gamma_k(t) \mid = \frac{1+\delta}{(2+\delta)(t(2+\delta)+1\delta)} \mid (1+\delta)p_k \mid$
  Donc $\mid \gamma_k(t) \mid \leq \frac{(1+\delta)}{t+1} * \sup_{k\geq 1} p_k = \frac{(1+\delta)}{t+1}p_1 = \frac{1}{t+1}\frac{(2+\delta)(1+\delta)}{3+2\delta} =: \gamma \times \frac{1}{t+1}$

**Preuve par récurrence**

- **Initialisation** k=1

  — **Initialisation** En t=1, $\mathbb{E}[N_1(1)] = 0$ car $PA_1$ est constitué d'une boucle sur le sommet $v_1$ qui est donc de degré 2, et le seul sommet dans le graphe à cet instant.
  On a alors, puisque $p_1 \leq 1$, $\mid u_1(1) \mid = \mid p_1 \mid \leq 1$.
  **Donc en $t = 1$, pour $k = 1$, $u_1(1)$ est bornée par n'importe quelle constante plus grande que 1.**

  — **Hérédité** Supposons qu'il existe $t \geq 1$ tel que $u_1(t)$ est borné. Alors on a, étant donné que $u_0(t) = N_0(t) - p_0 = 0$ :

$$\begin{aligned}
\mid u_1(t+1) \mid = \mid & (1 - \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta})u_1(t) + \beta_1(t) + \gamma_1(t) \mid \\
\leq & (1 - \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta}) \mid u_1(t) \mid + \mid \beta_1(t) \mid + \mid \gamma_1(t) \mid \\
\leq & C_1(1 - \frac{1+\delta}{(2+\delta)(t+1)}) + \mid \beta_1(t) \mid + \mid \gamma_1(t) \mid \\
\leq & C_1(1 - \frac{1+\delta}{(2+\delta)(t+1)}) + \frac{1}{t+1} + \frac{\gamma}{t+1}
\end{aligned}$$

  Le dernier membre de ces inégalités est inférieur ou égal à $C_1$ si et seulement si :
  $-C_1 \frac{1+\delta}{(2+\delta)(t+1)} + \frac{1}{t+1} + \frac{\gamma}{t+1} \leq 0 \Leftrightarrow C_1 \geq (1+\gamma)\frac{2+\delta}{1+\delta}$

  **Donc, pour tout $C_1 \geq (1+\gamma)\frac{2+\delta}{1+\delta}$, on a bien $\sup_{t \geq 1} u_1(t) \leq C_1$**

- **Hérédité** $k \geq 2$

  — **Initialisation** En t=1, $\mathbb{E}[N_k(1)] = \mathbf{1}_{k=2}$ car $PA_1$ est constitué d'une boucle sur le sommet $v_1$ qui est donc de degré 2, et le seul sommet dans le graphe à cet instant.
  On a alors, puisque $p_k \leq 1$, $u_k(1) = \mid \mathbb{E}[N_k(1)] - p_k \mid \leq \max\{N_k(t), p_k\} \leq 1$ car la distance entre deux réels compris entre 0 et 1 est plus petite que la distance du plus grand de ces réels à 0.
  **Donc en $t = 1$, pour tout $k \geq 1$, $u_k(1)$ est bornée par n'importe quelle constante plus grande que 1.**

  **Hérédité** Supposons qu'il existe $t \geq 1$ tel que pour tout $k \geq 1$ $u_k(t)$ est borné par un certain $C$. Alors, pour tout $k \geq 2$

$$\begin{aligned}
\mid u_k(t+1) \mid = \mid (1 - \frac{k+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta}) u_k(t) + \frac{k-1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta} u_{k-1}(t) \\
+ \frac{1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta} + \beta_k(t) + \gamma_k(t) \mid \\
\leq \mid 1 - \frac{k+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta} \mid u_k(t) \mid \\
+ \mid \frac{k-1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta} \mid\mid u_{k-1}(t) \mid + \mid \beta_k(t) \mid + \mid \gamma_k(t) \mid \\
\leq C \mid 1 - \frac{k+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta} \mid + C \mid \frac{k-1+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta} \mid + \frac{1}{t+1} + \frac{\gamma}{t+1}
\end{aligned}$$

Mais, $k \geq 2$ implique $k - 1 + \delta \geq 0$, Ainsi,

— Si : $1 - \frac{k+\delta}{t(2+\delta)+1+\delta} \geq 0$ ie $t(2+\delta)+1+\delta \geq k+\delta$ ie $t \leq \frac{k-1}{2+\delta}$ alors

$$\mid u_k(t+1) \mid \leq C(1 - \frac{1}{t(2+\delta)+1+\delta}) + \frac{1}{t+1} + \frac{\gamma}{t+1}$$

Puisque $t(2+\delta)+1+\delta \leq (t+1)(2+\delta)$ , on réécrit :
$\mid u_k(t+1) \mid \leq C(1 - \frac{1}{(t+1)(2+\delta)}) + \frac{1}{t+1} + \frac{\gamma}{t+1}$ Et ce dernier membre est plus petit que C dès que $-\frac{C}{(t+1)(2+\delta)} + \frac{1}{t+1} + \frac{\gamma}{t+1} \leq 0$ ie dès que $C \geq (2+\delta)(1+\gamma)$

— Sinon $t > \frac{k-1}{2+\delta}$ ie $k > t(2+\delta)+1$ ie $k \geq t(2+\delta)+2 \geq t+2$ : Mais le degré maximal d'un sommet dans $PA_{t+1}$ est obtenu lorsque ce sommet est relié à tous les autres sommets et lui même, et il a donc degré $(t+1)-1+2 = t+2$. Donc pour tout $k \geq t(2+\delta)+2$, $u_k(t+1) = \mathbb{E}[N_k(t+1)] - (t+1)p_k = -(t+1)p_k$.

Mais on a montré lorsqu'on a étudié le comportement asymptotique des $p_k$ que $p_k = C_2 k^{-3-\delta}(1+\mathcal{O}(1/t)) \leq C_2 * (t+1)^{-3-\delta}$ puisqu'on est dans un cas où $k > t+1$. Ainsi, $\mid u_k(t+1) \mid \leq C_2 * (t+1)^{-2-\delta} \leq C_2$

**Donc en posant $C = \max\{\frac{2+\delta}{1+\delta}(\gamma+1), (2+\delta)(\gamma+1), C_2\}$, on peut conclure la récurrence.**

## Conclusion

Les processus d'attachement préférentiel permettent de faire apparaitre les propriétés d'invariance d'échelle présentes dans les réseaux *naturels*. En effet, les modèles d'attachement préférentiel permettent de générer des lois puissance et sont apparus comme un modèle susceptible d'expliquer l'apparition de ces lois dans les phénomènes observés empiriquement, qu'ils soient biologiques (avec l'évolution du nombre d'espèces portant un gène donné dans un taxon par exemple) ou anthropologiques (avec la tendance d'un article d'un scientifique reconnu à être plus souvent cité) ou lié à une question spécifique comme celle de la croissance du Word Wide Web qui intéressait Barabási et Albert.

Dans ce papier, on a ainsi décrit les lois puissance et d'invariance d'échelle auxquelles sont soumis les modèles d'attachement préférentiel. Dans un premier temps, nous avons montré la convergence des degrés des divers sommets du graphe et avons vu apparaitre *naturellement* la loi puissance annoncée dans la Genèse. Nous avons ensuite présenté un second résultat sur le comportement asymptotique de la proportion de sommets d'un degré donné et mis en exergue la propriété d'invariance d'échelle des modèles d'attachement préférentiel. On notera l'importance des résultats sur les martingales qui, plus d'une fois, ont permis à la preuve de se "dérouler".

Cependant, il faut reconnaitre l'humilité des résultats présentés tout au long de ce papier qui est loin de recouvrir l'étendue des différents modèles d'attachement préférentiels. Dans tout ce qui précède, nous avons fait le choix d'étudier l'évolution d'un modèle d'attachement préférentiel très particulier. En effet, nous avons choisi de ne traiter que le cas où la règle de croissance est linéaire et de nous limiter à un processus ne faisant intervenir que des graphes non-orientés. En réalité, il existe de nombreuses variantes de cette construction. Une par exemple consiste à, au lieu de rajouter un nouveau sommet auquel est rattaché une arête, consiste à rajouter une arête entre des sommets existants déjà ; une autre alternative encore consiste en une combinaison des deux processus ; une autre encore consiste en une règle de croissance pour laquelle les probabilités d'attachement n'ont plus une dépendance linéaire vis-à-vis du degré.

Enfin, pour le second résultat présentant la convergence de la proportion de sommets d'un degré donné, nous nous sommes limités au cas où on n'ajoute un sommet à laquelle n'est rattachée qu'*une* seule arête et nous n'avons pas traité le cas où on ajoute un sommet auquel sont rattachés $m$ arêtes. Cela ne relève pas tant de la nécessité d'introduire de nouveaux outils mais plutôt de la volonté de susciter l'intérêt du lecteur. De plus, les outils impliqués dans la généralisation du cas traité ici relèvent également d'une manipulation de la théorie des martingales. Ce serait presque leur faire outrage d'exploiter les résultats puissants qu'elles induisent sans les appréhender pleinement.

## Bibliographie


- Remco van der Hofstad, Random Graphs and Complex Networks. Vol. I, Eindhoven University of Technology , 2014
- Jean-François Le Gall, Intégrales, Probabilités et Processus Aléatoires, Département Mathématiques et Applications Ecole normale supérieure de Paris, 2006
- Scale-Free Networks : A Decade and Beyond Albert-Laszlo Barabasi, et al. Science 325, 412 (2009) ; DOI : 10.1126/science.1173299
- Wilensky, U. (2005). NetLogo Preferential Attachment model. http ://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/PreferentialAttachment. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.