

Cascades informationnelles, "Comportements
moutonniers", aversion au risque et efficience
des marchés financiers

EYROLLE Nicolas

July 1, 2019

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Mme. Ben Tahar pour la patience et la compréhension qui ont pu m'être accordés lors de l'encadrement de ce mémoire. Le sujet qui m'a été confié m'a permis de mieux envisager la modélisation mathématique des comportements d'agents économiques ce qui m'a ouvert de nouvelles perspectives.

Par ailleurs, je tiens à remercier également Mr. Viossat qui s'est joint à nos multiples discussions concernant l'émergence des comportements moutonniers.

Enfin, je remercie l'ensemble de mes amis et ma mère.

Mention spéciale à Rb et Likmé, qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce mémoire. Rb a pris le temps sur son propre mémoire afin de m'aider à réfléchir avec moi sur certains points de démonstrations.

Likmé quant à lui m'a été d'une aide inestimable dans la rédaction et la motivation d'aller au bout de ce mémoire. Il a su prendre sur son temps de loisir (vacances) pour m'aider à retranscrire quelques points de démonstrations sur LaTeX. Il a aussi été là pour m'épauler lors de mes temps de réflexions en bibliothèque.

Bonne lecture !

Introduction

P-M . Baudonnière [1], considère que l'imitation est la base du processus d'humanisation et le symbole de l'avènement de la culture en opposition au mimétisme comportemental que l'on retrouve aussi chez les animaux. Ainsi il n'est pas étonnant d'observer aussi bien en matière de mode, de santé ou de politique une homogénéité dans le comportement des individus. Sushil Bikhchandani, David Hirshleifer, and Ivo Welch (BHW) dans [6] ont identifié quatre éléments favorisant l'uniformisation des comportements:

1. La sanction: Tout comportement déviant, différent de la norme, est passible de sanctions de la part de ses pairs. Il n'est donc pas toujours désirable de se distinguer des membres de son groupe d'appartenance.
2. La gratification sociale que l'on tire suite au respect des normes: Un enfant sera toujours récompensé pour sa capacité à respecter les codes enseignés par ses parents. Il en tire un bien-être qui le pousse à reproduire les mêmes schèmes de pensées.
3. La communication: vecteur de transmission des normes sociales, il participe à la reproduction des comportements et donc au mimétisme.
4. Le désir de se conformer: chaque être humain dispose d'un désir naturel à copier ses pairs.

La science économique est un terrain favorable d'illustrations de ces phénomènes d'imitation mieux connus sous la dénomination de "comportements moutonniers". En effet, les agents économiques étant supposés rationnels, ils cherchent à maximiser leur bien-être. Or, ces agents disposent rarement de toute l'information nécessaire pour prendre des décisions sans risques. Il n'est donc pas rare d'observer chez les agents un comportement mimétique pouvant même aller à l'encontre de l'intuition initiale pensant ainsi à pallier le manque d'information par celle des autres.

Cette tendance est notamment observable sur les marchés financiers de manière exacerbée à l'image du Krach boursier de 2008. On observe parallèlement à l'émergence de ce cataclysme économique une période de surréactions de la part des agents, amplifiée par les comportements imitatifs. Le climat anxiogène provoqué par ces changements prompts d'attitudes provoque une variation sensible de la valeur des actifs et altère la capacité des agents économiques à prendre les bonnes décisions, menant progressivement à une situation de crise.

Étant donné l'ampleur des conséquences que de tels comportements peuvent provoquer, comme en témoigne l'exemple susmentionné, nous étudierons l'impact de ceux-ci sur le fonctionnement des marchés financiers.

Pour ce faire, avec l'aide de la modélisation mathématiques, nous nous attacherons dans un premier temps à étudier les conditions d'émergence ainsi que la fragilité des comportements moutonniers. Ce sera l'occasion d'introduire des concepts clés nécessaires à la compréhension de ces phénomènes tels que celui de cascade informationnelle dans un cadre dépassant celui des marchés financiers.

Par la suite, nous focaliserons notre étude sur les marchés financiers. Nous verrons que la principale cause d'apparition des comportements moutonniers réside dans la différence de degrés d'aversion au risque entre les traders et teneurs de marché. Il sera nécessaire d'adapter nos résultats de la première partie au cadre formel propre à la finance.

Enfin, on étudiera l'impact de ces phénomènes sur le fonctionnement de marché. On constatera alors le potentiel nocif des cascades informationnelles sur l'efficacité de marché.

1 Cascades informationnelles et formation des comportements moutonniers

L'étude de l'émergence des comportements moutonniers en société présente un enjeu clé. Elle permet notamment d'étudier comment l'interaction entre individus peut mener à prendre des décisions sur ou sous optimales au sens de Pareto. À titre d'exemple, elle permet de mieux cerner les raisons qui poussent un individu, conscient de la nocivité des drogues sur sa santé à en consommer en soirée, dans un milieu où ses pairs peuvent être sous son emprise. Inversement, ils donnent des schèmes d'explication sur la grande mobilisation qui a eu lieu lors de l'incendie de Notre-Dame de Paris. Le relais médiatique concernant l'évolution du montant des dons dédiés à la reconstruction de la cathédrale lors de la quête lancée par le gouvernement a sans doute eu un effet incitatif sur les citoyens n'ayant pas encore passé le cap.

L'enjeu politique de l'étude des comportements moutonniers réside dans la capacité dont dispose les pouvoirs publics d'orienter les comportements à une situation optimale. C'est pourquoi dans cette première partie nous tacherons d'étudier, à l'aide de nouveaux concepts tel que les "cascades informationnelles", les conditions d'émergence ainsi que les caractéristiques de ces vagues d'imitations.

Cascades informationnelles

La **cascade informationnelle** est un concept clé dans l'appréhension des comportements moutonniers. Une cascade informationnelle a lieu lorsqu'un individu décide de conformer sa décision à celle des autres en dépit de son information privée.¹ En particulier, elles traduisent l'absence d'émission d'informations par l'agent en question. Étant donné que l'agent en question s'est conformé, il est impossible pour un observateur, sans communication, de savoir quel était l'état de l'information dont il disposait au départ. L'action de l'individu en question n'apporte aucune information supplémentaire dans la prise de décisions des agents suivants; elle n'est que le reflet des décisions antérieures. Ainsi, si le prochain individu dispose d'un signal identique et indépendant au sien, il va effectuer le même arbitrage et ignorer son signal pour se conformer aux autres.

Le concept de cascade informationnelle est un artefact permettant de conceptualiser les comportements mimétiques à l'aide de la modélisation mathématique. Comme nous allons voir, en plus de décrire l'émergence de comportements imitatifs, la cascade informationnelle permet d'expliquer la fragilité de ces tendances.

Modèle Basique

Pour commencer notre étude des cascades informationnelles et ainsi des comportements moutonniers nous allons modéliser le comportement aléatoire des individus de la manière la plus simple qui soit selon BHW [6]:

- Soit n individus qui agissent de manière séquentielle.
- L'ordre fixé entre les agents est exogène.
- On note $D_i \in \{\text{accepter}, \text{rejeter}\}$ la décision du joueur i . Accepter a un coût égal à C . Ici $C=1/2$.
- Avant d'effectuer son action l'agent i reçoit de manière indépendante un signal. $X_i \in \{L(ow), H(igh)\}$ tel que $P(X_i = H|V = 0) = P(X_i = L|V = 0) = p_i > \frac{1}{2}$. On étudie le cas particulier selon lequel les agents disposent tous de la même information et ce de manière indépendante (i.e les X_i sont i.i.d) on a donc $p_i = p \forall i \in \mathbb{N}$

¹On peut se référer de nouveau à l'exemple de la consommation de drogue cité plus haut. L'individu sait très bien que sa consommation est nocive pour lui (i.e information privée), néanmoins il n'hésite pas à suivre la conduite de ses pairs.

- La récompense V liée à la décision d'accepter suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
- Les agents sont rationnels ils cherchent donc à maximiser leur gain (i.e ils adoptent ssi $E[V|X_i] > \frac{1}{2}$, rejettent ssi $E[V|X_i] < \frac{1}{2}$)
- Dans le cas où l'agent est indifférent entre adopter et rejeter (i.e $E[V|X_i] = \frac{1}{2}$) il tire à pile ou face pour prendre sa décision.
- Dans ce modèle les agents ne peuvent pas voir l'information privée des autres individus. Seules les actions leurs sont accessibles.

1.1 Quelques Résultats

Munis d'un cadre théorique cohérent nous pouvons dorénavant étudier la formation des cascades informationnelles ainsi que leurs propriétés.

Formation des cascades informationnelles

Dans cette section nous nous attacherons dans un premier temps à expliciter le processus de formation des cascades. Néanmoins la quête de formation d'une cascade n'est pas une fin en soi. Il peut être intéressant d'affiner notre raisonnement afin de calculer la probabilité de se trouver dans une cascade "correcte" ou "incorrecte". Cette démarche nous permettra en particulier de voir l'impact de la qualité du signal sur la prise de décision des individus et donc l'importance d'agir sur l'information des individus pour les conduire à une meilleure prise de décision.

Une cascade "correcte" est une cascade qui maximise le gain des individus. C'est-à-dire une situation dans laquelle à partir d'un certain rang n^2 tous les agents adoptent (resp. rejettent) de sorte que le gain procuré par leur décision soit de 1 (resp. de 0). En effet, dans ce cas, les agents réalisent une plus value suite à leur décision de se conformer: on a $\forall i \geq n \mathbb{E}[V | H_i, D_{i+1}] > \frac{1}{2}$. (H_i représente l'historique des décisions prises jusqu'au rang $i-1$, cette notation sera introduite ultérieurement lors de l'étude d'autres modèles). À l'inverse, une cascade incorrecte est composée d'une succession d'individus dans laquelle tous les individus qui adoptent (resp. rejettent) perçoivent un gain égal à 0 (resp. 1). Dans ce cas on a $\forall i \geq n \mathbb{E}[V | H_i, D_{i+1}] < \frac{1}{2}$, les agents réalisent une perte suite à leurs actions.

Cette section est particulièrement calculatoire, ainsi nous omettrons les preuves dont l'explication est intuitive.

²Les agents agissent de manière séquentielle, on parlera indifféremment de rang ou d'individu

Dans le cas du jeu à 3 agents, l'agent 1 accepte si et seulement si $X_1 = H$ et rejette sinon. En effet:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V | X_1 = H] &= \mathbb{P}[V = 1 | X_1 = H] \\ &= \frac{\mathbb{P}[X_1 = H | V = 1] \mathbb{P}[V = 1]}{\mathbb{P}[X_1 = H]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Or, } \mathbb{P}[X_1 = H] &= \mathbb{P}[X_1 = H, V = 1] + \mathbb{P}[X_1 = H, V = 0] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = H | V = 1] \mathbb{P}[V = 1] + \mathbb{P}[X_1 = H | V = 0] \mathbb{P}[V = 0] \\ &= \frac{1}{2}(p + 1 - p) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}[V = 1] = \frac{1}{2}$ on obtient $\mathbb{E}[V | X_1 = H] = p > \frac{1}{2}$ par hypothèse.

L'action du deuxième agent dépend de son prédécesseur. Il sait que si son prédécesseur a accepté alors $X_1 = H$ et inversement s'il a refusé cela signifie que $X_1 = L$. En effet, à la première étape il n'y a aucune distinction entre l'information reçue par le joueur 1 et son action. Observer l'action du joueur 1 équivaut à observer son signal ce qui ne sera pas le cas pour les cas suivants qui en plus de leur signal, prendront en compte l'historique des actions. Montrons ce résultat à partir du cadre théorique établi à cet effet. Supposons $X_1 = H$. Le joueur 2 fait face à deux possibilités:

1. Si $X_2 = H$ alors le joueur 2 accepte. On a:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V | D_1 = A, X_2 = H] &= \mathbb{E}[V | X_1 = H, X_2 = H] \\ &= \mathbb{P}[V = 1 | X_1 = H, X_2 = H] \\ &= \frac{\mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = H | V = 1] \mathbb{P}[V = 1]}{\mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = H]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[X_1 = H | V = 1] \mathbb{P}[X_1 = H | V = 1] \mathbb{P}[V = 1]}{\mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = H]}\end{aligned}$$

Car les $p_i = \mathbb{P}[X_i = H | V = 1] = \mathbb{P}[X_i = L | V = 0]$ sont i.i.d.

Or,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = H] &= \mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = H | V = 1] \mathbb{P}[V = 1] + \\ \mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = H | V = 0] \mathbb{P}[V = 0] &= \frac{1}{2}(1 - 2p + 2p^2)\end{aligned}$$

En définitive, on obtient: $\mathbb{E}[V | D_1 = A, X_2 = H] = \frac{p^2}{\frac{1}{2}(1-2p+2p^2)} > 1/2$
car $p > \frac{1}{2}$

2. Si $X_2 = L$ Alors le joueur 2 est indifférent entre adopter ou rejeter, il s'en remet au hasard. Par des calculs similaires au premier cas on a:

$$\mathbb{E}[V | D_1 = A, X_2 = L] = \frac{\mathbb{P}[D_1 = A, X_2 = L | V = 1] \mathbb{P}[V = 1]}{\mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = L]} = \frac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \frac{1}{2}$$

On voit que le joueur 2 tient compte de son information dans sa prise de décision. Les éventuelles cascades informationnelles commencent à se former à partir du troisième agent. Le 3ème agent peut faire face à quatre possibilités:

1. Les deux agents ont accepté (resp. rejeté) et il perçoit un signal H (resp. L). Dans ce cas l'action des deux premiers agents confortent son intuition, il a tout intérêt à accepter (resp. rejeter) aussi.
2. Les deux agents ont accepté et il perçoit un signal L. Cette situation est moins intuitive à résoudre car les actions des deux premiers individus contredisent le fond de sa pensée. De plus, si l'on connaît avec certitude le signal reçu par le premier joueur, il n'en est pas de même pour le second. A-t-il reçu un signal H et donc adopté avec conviction, ou bien a-t-il reçu un signal L et confié sa décision entre les mains du hasard ? On comprend que si l'agent 3 avait la possibilité d'observer le signal du joueur 2 il aurait accepté lorsque le joueur 2 reçoit le signal H et refuser autrement. En effet, dans le premier cas le joueur 3 soutient une position minoritaire, il semble moins risqué de se conformer. Dans le second, cas le joueur 3 confirme son signal par celui du joueur 2 et prend la décision de refuser avec une plus grande confiance que s'il avait accepté³. À défaut d'avoir accès de manière certaine au signal du joueur 2, le joueur 3 peut s'appuyer sur la probabilité qu'en ayant accepté, le joueur 2 ait reçu un signal H. (i.e $\mathbb{P}[X_2 = H | D_2 = A]$). Si $\mathbb{P}[X_2 = H | D_2 = A] > \frac{1}{2}$ alors il accepte et une cascade informationnelle se produit car son signal de départ ne coïncide pas avec cette prise de décision.

Après avoir effectué des calculs similaires à ceux explicités plus haut, on obtient : $\mathbb{P}[X_2 = H | D_2 = A] = 1 - p + p^2$. Soit $g: p \mapsto 1 - p + p^2$ g est quadratique donc différentiable. On cherche

$$\frac{dg}{dp} > 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$$

³De tels raisonnements sont viables uniquement parce que la qualité du signal, p_i perçue par les agents est i.i.d pour tous les agents. Si l'un des joueurs avait bénéficié d'un signal de meilleure qualité il serait nécessaire d'affiner le raisonnement.

elle admet un point critique en $p^* = \frac{1}{2}$, $g(p^*) = 3/4$ et est strictement croissante pour tout $p > 1/2$. On a donc bien $\mathbb{P}[X_2 = H | D_2 = A] > \frac{1}{2}$. Donc le troisième agent adopte.

3. Le cas selon lequel les deux premiers agents rejettent et que le 3ème reçoive le signal H est identique. Il se produit une cascade informationnelle, le joueur 3 rejette.
4. Un agent a adopté (resp. rejeté) et l'autre non. Dans ce cas précis l'action des deux premiers joueurs ne donne aucune information exploitable étant donné qu'elles sont contradictoires et que les agents disposent de la même qualité d'information. Ainsi, le joueur 3 se retrouve dans une situation semblable au premier individu: il agit en fonction de son signal privé.

En résumé, lorsque les deux premiers agents effectuent la même action, le 3ème ne considère plus son signal privé et calque son comportement sur celui des autres, une cascade apparaît. Tous les agents disposant de la même information vont effectuer le même calcul et reproduire les mêmes décisions en dépit de leur signal. Dans notre modèle il suffit donc que 2 joueurs prennent une même décision pour produire une cascade.

Lorsque les deux premiers agents prennent une décision contradictoire le 3ème agent considère son signal privé. Il se retrouve dans la posture du 1er, le 4ème agent dans celle du 2ème etc. Voici un arbre pour synthétiser l'ensemble des informations.

À présent calculons la probabilité de se retrouver dans une cascade au bout de N joueurs.

On vient de voir que l'éventualité de se retrouver dans une cascade d'information dépend en grande partie de la décision des 2 joueurs: Si ceux-ci effectuent la même action alors une cascade se forme pour tous les agents suivants. Si aucune cascade ne se forme au bout des 2 joueurs, on revient à la situation initiale. Ainsi, étudier la probabilité d'être dans une cascade au rang N revient à considérer la probabilité de la formation d'une cascade des N agents par paquets de deux. Il est donc nécessaire, pour l'étude de l'émergence des comportements moutonniers de passer par l'analyse du cas avec 2 joueurs.

Lemme 1.1. *Pour $N=2$ on a les résultats suivants:*

1. $\mathbb{P}[\text{Pas de cascade}] = p(1 - p)$
2. $\mathbb{P}[\text{Cascade Adopter}] = \mathbb{P}[\text{Cascade Rejeter}] = \frac{1-p(1-p)}{2}$

On déduit donc de ce lemme la proposition suivante:

Proposition 1.1. *Soit N joueurs, on a:*

1. $\mathbb{P}[\text{Pas de cascade}] = p(1 - p)^n$
2. $\mathbb{P}[\text{Cascade Adopter}] = \mathbb{P}[\text{Cascade Rejeter}] = \frac{1 - (p(1-p))^n}{2}$

On peut remarquer que plus le nombre d'agents est important, plus la probabilité d'être dans une cascade est grande. Néanmoins, il s'agit de se demander si la cascade en question est profitable pour les agents qui s'y trouvent. La proposition suivante nous permet de répondre à cette interrogation dans le cas où nous nous situons dans un état du monde où $V=1$.

Proposition 1.2. *Soit N un nombre pair:*

1. $\mathbb{P}[\text{Cascade correcte}] = \frac{p(1-p)(1-(p(1-p))^{\frac{n}{2}})}{2(1-p+p^2)}$
2. $\mathbb{P}[\text{Cascade Incorrecte}] = \frac{(p-2)(p-1)(1-(p(1-p))^{\frac{n}{2}})}{2(1-p+p^2)}$
3. $\mathbb{P}[\text{Pas de cascade}] = p(1 - p)^{\frac{n}{2}}$

Pour rappel, dans cette configuration une cascade correcte est une cascade dans laquelle les agents adoptent.

On peut remarquer par une étude de fonction que plus le signal est informatif (i.e loin de $\frac{1}{2}$) plus la probabilité de tomber dans une cascade est grande. En outre, plus le signal est précis (i.e p tend vers 1), plus la probabilité de se retrouver dans une cascade correcte est grande(cf.1). En effet, un signal plus précis conforte les agents à prendre la bonne décision. Étant donné qu'il est i.i.d il y a une grande chance que les agents adoptent si $V = 1$ (resp.rejettent si $V = 0$).

Ainsi, on peut remarquer que la précision du signal joue un rôle important dans la formation des cascades informationnelles. Elle conforte les individus à prendre la bonne décision. Néanmoins nous raisonnons dans un modèle à information égale et indépendamment distribuée entre les agents, regardons les changements de décisions qu'engendrent la présence d'une asymétrie d'informations entre individus, comme pour le cas des leaders d'opinions.

Les leaders d'opinions

Jusqu'ici nous raisonnions dans un modèle où tous les agents disposent de la même information. Qu'en est-il lorsqu'un groupe d'individus dispose d'une meilleure information ? Quel impact cela a-t-il sur la formation des comportements moutonniers ?

L'essentiel de notre propos se résume en deux propositions:

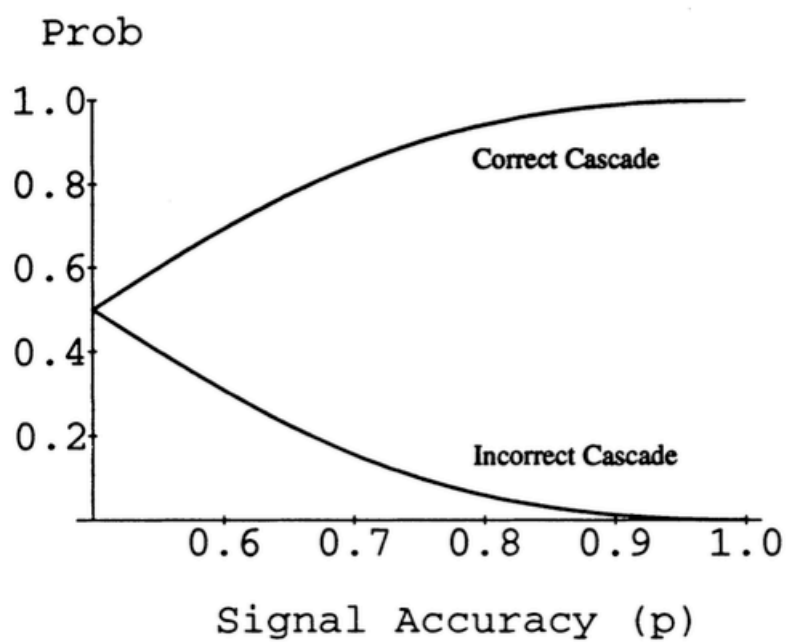


Figure 1: Il s'agit de la figure tirée de [6], le graphe représente les variations de la probabilité d'être dans une cascade informationnelle au bout de N (pair) décisions. Plus p s'approche de 1 (i.e le signal est précis) plus la probabilité d'être dans une cascade correcte augmente

Proposition 1.3. 1. *L'individu qui dispose d'une plus grande information décide en premier; il est suivi par tous les autres.*

2. *Supposons que $n > 1$ individus observent un signal de précision identique et que les individus sont classés par ordre décroissant de précision du signal, alors ils se retrouvent dans une meilleure situation.*

Le premier résultat permet de mettre en exergue deux caractéristiques des cascades. Premièrement, il nous montre qu'une petite perturbation concernant les hypothèses sur la précision des signaux peut entraîner d'importantes différences en ce qui concerne la date à laquelle apparaît une cascade. Dans le premier modèle, l'apparition d'une cascade pouvait être différée. Dans le cas d'une asymétrie d'informations l'agent qui dispose d'une meilleure information agit en premier. En effet, pour lui s'engager dans une prise de décision représente moins de risque et donc un coût moins élevé contrairement aux agents dont la précision est moins accrue. Le leader d'opinion est donc plus enclin à prendre des initiatives tandis que les seconds auront tendance à être plus attentistes pour profiter de la réponse du leader.

Par exemple, si un enseignant sollicite simultanément les élèves pour répondre à une question sous peine d'un point en moins dans la moyenne en cas d'une mauvaise réponse. Le bon élève aura une plus grande facilité à lever la main tandis que le mauvais attendra la réponse de ce premier pour le suivre même si son intuition le guidait vers une réponse différente.

Deuxièmement, le résultat 1, révèle la fragilité des cascades informationnelles. En effet, étant donné que les individus ont une tendance à se conformer à sa décision, la cascade informationnelle ne dépend que d'un individu. Il suffit de relâcher une information suffisamment informative à destination du leader d'opinion afin de modifier le comportement de l'ensemble de la société. Ce fut le cas lors de l'épidémie de grippe H1N1, une contre-enquête a été révélée mettant en cause le bienfait de ce vaccin, ce qui a entraîné un conflit entre les médecins le préconisant ou non. Si dans un premier temps la majorité de la société se faisait vacciner, quelque mois plus tard on a assisté à un mouvement contre la vaccination.

Le second résultat démontre le bienfait⁴ de pouvoir différer l'apparition d'un agent disposant d'une meilleure information dans l'ordre de prise de décisions. Dans ce cas un individu peut renverser une cascade car il est plus enclin à utiliser son information que ceux qui l'ont précédé. En effet, comme les agents interviennent par ordre décroissant de qualité d'information, ils disposent à chaque tour de l'action des autres auquel s'ajoute leur informa-

⁴Le bienfait en terme de quantité d'informations dont dispose pour prendre leur décision

tion personnelle leur permettant ainsi de mieux ajuster leur décision. Il s'agit d'une situation contraire au cas précédent où tous ignorent leur information pour suivre le leader d'opinion. D'un point de vue social il peut donc être intéressant de se retrouver dans ce cas de figure.

Fragilité des Cascades informationnelles

Nous avons pu voir que la formation de cascades est très sensible à la qualité de l'information que l'on reçoit. Quels peuvent être les effets d'un relâchement d'information soudain à l'ensemble des agents comme lors d'une campagne de sensibilisation par exemple ?

La proposition suivante démontre l'impact que peut avoir le relâchement d'une petite quantité d'information sur une cascade déjà formée.

Proposition 1.4. *Le relâchement d'une petite quantité d'information publique peut renverser une cascade déjà bien établie.*⁵

Le fait qu'une petite quantité d'information puisse renverser une cascade en cours est très important. cela signifie que l'État par exemple peut contrôler l'action des individus pour permettre de garantir un meilleur optimum social entre les agents. Ainsi une campagne de sensibilisation destinée aux fumeurs quant aux risques de la consommation de tabac peut comme nous le montre la proposition suivante dissuader certains individus de: 1) se lancer, 2) persister dans leur conduite:

Proposition 1.5. *Face à plusieurs relâchements d'information*⁶

1.2 Vers une généralisation

Les propriétés d'émergence des cascades informationnelles n'ont été évoquées que dans le cadre d'un modèle simplifié où V ne prenait que deux valeurs. En réalité V peut prendre une multitude de valeurs. Qu'en est-il sur la formation de cascades ? Nous allons qu'elles sont aussi valables dans un modèle plus général qui est régi selon les hypothèses suivantes:

- Soit V , un actif, qui prend S valeurs arrangées dans l'ordre croissant $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_s$. $\mathbb{P}(V = v_s) = \mu_s$

⁵Une petite quantité d'information signifie une information qui est de moins bonne qualité que celle que reçoivent les agents

⁶La démonstration de la preuve est omise. elle repose sur une simulation effectuée dans [6] pp.1007

- N agents qui agissent de manière séquentielle.
- On note $D_i \in \{accepter, rejeter\}$ la décision du joueur i. Accepter a un coût égale à C.
- L'agent i fonde sa décision en fonction d'un signal X_i avec $X_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_R\}$ tel que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_r$
- Il n'y a pas de cas trivial au sens que: $v_1 < C < v_s$
- Comme dans l'ancien modèle, la probabilité de recevoir un signal est conditionnelle à la distribution de V. On a:
 $p_{ql} = \mathbb{P}[X_i = x_q | V = v_l]$ et $P_{ql} = \mathbb{P}[X_i \leq x_q | V = v_l] = \sum_{i=1}^q p_{il}$
- Soit \mathcal{J}_i l'ensemble des réalisations qui ont mené l'individu i à prendre une décisions. L'action du joueur i est non informative si $\mathcal{J}_i = \{x_1, \dots, x_r\}$ ou $\mathcal{J}_i = \{\emptyset\}$

Un agent prend une décision en fonction de la valeur espérée de V sachant l'historique des décisions prises jusqu'au temps i (A_i) et le signal qu'il reçoit: Soit

$$V_{n+1}(x_q, A_n) = \mathbb{E}[V | X_{n+1} = x_q, X_i \in \mathcal{J}_i(A_{i-1}, a_i) \forall i \leq n]$$

On a donc:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{n+1}(A_n, adopte) &= \{x_q \text{ tel que } V_{n+1}(x_q, A_n) \geq C\} \\ \mathcal{J}_{n+1}(A_n, rejet) &= \{x_q \text{ tel que } V_{n+1}(x_q, A_n) \leq C\} \end{aligned}$$

On impose deux conditions de régularités supplémentaires , la première est que les lois conditionnelles $\mathbb{P}(X_i | V = v_l)$ sont ordonnées selon la propriété du rapport de vraisemblance monotone; Pour tout $l < s$ on a:

$$\frac{p_{q,l}}{p_{q+1,l}} \geq \frac{p_{q,l+1}}{p_{q+1,l+1}} \quad \forall q < R$$

avec l'inégalité stricte pour au moins un q .

Cette condition assure que l'esperance conditionnelle de chaque individu augmente en fonction du signal qu'il a reçu. Donc si un individu qui n'est pas dans une cascade adopte, les autres individus peuvent déduire que $X_i \geq x_q$ pour quelques q. Si l'agent i n'adopte pas, alors $X_i < x_q$. La deuxième condition: $v_l \neq C$ pour tout l, assure que si un individu apprend suffisamment d'information concernant la valeur de l'actif en observant l'action des précédents agents, alors il ne peut être indifférent entre adopter et rejeter.

Proposition 1.6. *Si les deux conditions de régularités sont réalisées, alors la probabilité qu'une cascade émerge tend vers 1 au fur et à mesure que le nombre d'agents augmente.*⁷

Nous avons déjà montré ce résultat lorsque V prend deux valeurs. La proposition est aussi vérifiée dans un cas plus général. On remarque donc que la probabilité qu'une cascade se forme augmente lorsque le nombre d'individu s'accroît. Il s'agit d'un phénomène que l'on peut confronter à la réalité. Il semble bien intuitif que des groupes d'appartenance et donc comportements mimétiques émergent lorsque le nombre d'individus est grand.

2 Effets de l'aversion au risque dans la formation des comportements moutonniers sur les marchés financiers

Dans la première partie, nous avons pu étudier l'émergence ainsi que les caractéristiques des cascades informationnelles dans un cadre théorique très abstrait et selon des hypothèses relativement fortes.

Étant donné l'impact des comportements moutonniers sur les marchés financiers et donc sur l'économie réelle, il peut être intéressant d'étudier leur émergence sur les marchés. Nous montrerons notamment comment l'écart de sensibilité face au risque entre les agents peut susciter une vague de comportement moutonniers.

Le cadre théorique employé est emprunté par une grande majorité de la littérature à Milgrom et Glosten dans leur article de 1985 [4].

Modélisation et déroulement des échanges

Sur le marché s'échangent des actifs financiers dont la valeur est $v = V + \epsilon$ où ϵ est un bruit blanc (i.e une variable aléatoire symétrique de moyenne nulle) et V une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre π_0 et prend les valeurs \bar{V} et \underline{V} avec $\bar{V} \geq \underline{V}$. Les deux variables aléatoires sont indépendantes.

Fonctionnement du marché: Sur le marché interagissent deux types d'agents: les traders et les teneurs de marché. Ces derniers proposent un Ask price (A_t) et un Bid price (B_t). Le Ask price est le prix que le faiseur de

⁷La démonstration de la preuve est bien détaillée dans [6]

prix requiert pour vendre une quantité d'actif tandis que le Bid price est le prix qu'il offre au trader pour acheter une quantité d'actif. Les échanges ont lieu séquentiellement. Durant chaque période d'interactions, il peut y avoir au maximum un échange. Dès qu'un trader a eu l'opportunité d'échanger, il quitte le marché.

Les traders: Les traders disposent d'un portefeuille (x, m) où x et m représentent respectivement la quantité d'actifs et de monnaie dont ils disposent. Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ et $F(\Sigma) = \mathbb{P}[(x, m) \in \Sigma]$ la loi de distribution de portefeuille de l'agent à l'instant t .

Le trader reçoit un signal $s \in \{l, h\}$. Comme dans le modèle précédent les signaux sont i.i.d entre les traders, indépendants de la réalisation de ϵ et de loi $p = \mathbb{P}[s = h | V = \bar{V}] = \mathbb{P}[s = l | V = \underline{V}] \in (1/2, 1)$. À partir de son portefeuille, de la valeur de l'actif et du signal qu'il reçoit, le trader cherche à maximiser sa fonction d'utilité $U_T(v, x, m)$.

Teneurs de marché: Les teneurs de marché disposent aussi d'une fonction d'utilité $U_M(v, x, m)$. Ils connaissent aussi la distribution de v et s , mais ils ne reçoivent aucun signal privé.

Croyance publique: On appelle H_t l'historique des échanges passés jusqu'au temps $t - 1$. Tous les agents observent H_t , mais ils ne connaissent pas l'identité des traders ayant effectués les échanges.

On appelle $\mathbb{P}[V = \bar{V} | H_t]$ la croyance publique au temps t . Suite à l'action des traders \mathcal{A} la croyance publique évolue au cours du temps selon la règle de Bayes: $\pi_{t+1} = \mathbb{P}[V = \bar{V} | H_t, \mathcal{A}] := \prod(\pi_t, \mathcal{A})$.

On dit que l'action \mathcal{A} influence l'information publique si $\pi_{t+1} \neq \pi_t$. On appelle $v(\pi_t) = \mathbb{E}[v | H_t] = \mathbb{E}[V | H_t]$ la valeur espérée de v étant donné l'information publique π_t . On parle d'histoire positive (resp. négative) si $\pi_t > \pi_0$ (resp. $\pi_t < \pi_0$)

Croyance privé: Un trader appréhende l'information publique à partir du signal qu'il reçoit. On appelle $\pi_t^s = \mathbb{P}[V = \bar{V} | H_t, s]$ l'information privée du trader au temps t . On définit ainsi $v(\pi_t)^s = v(\pi_t^s)$

Il est important de noter l'importance de ϵ . En effet, l'information privée donne uniquement des informations sur V et non v car la réalisation de ϵ garantit le côté aléatoire de la valeur v de l'actif.

Adaptation des définitions

Dans la première partie, nous avons défini les concepts de comportements moutonniers et cascades informationnelles. Il est nécessaire pour les étudier d'adapter leur définition à notre nouveau cadre. On emprunte les définitions suivantes au modèle de Avery et Zemsky [2]

Définition 2.1. 1. Un trader qui dispose de son signal privé s achète (resp. vend) par mimétisme si:

- Au départ il ne voulait pas acheter (resp. vendre)
- Après avoir observé une histoire positive (resp. négative) H_t , il préfère acheter (resp. vendre).

2. Une cascade d'information a lieu si et seulement si $\pi_{t+1} = \pi_t$.⁸

2.0.1 Modèle Simple: Faiseurs de prix et traders sont neutres face au risque

Dans cette partie nous allons voir comment une appréciation différente de la valeur v de l'actif entre teneurs de marchés et traders peut entraîner la formation de comportements moutonniers.

Dans cette partie on suppose $U_T(v, x, m) = vx + m$ et $U_M(v, x, m) = (\theta v + C)x + m$.

Les faiseurs de marché établissent leurs prix par principe d'indifférence entre Acheter et ne rien faire (resp. Vendre et ne rien faire) pour le Ask price (resp. pour le Bid price) sachant qu'il a reçu de la part du trader un ordre d'achat (resp. ordre de vente). Ainsi, au temps t , A_t et B_t sont les solutions des équations suivantes:

$$\mathbb{E}[(\theta v + C)(x + q) + m - qB_t | \text{ordre de vente}] - \mathbb{E}[(\theta v + C)x + m | \text{ordre de vente}] = 0$$

$$\mathbb{E}[(\theta v + C)(x - q) + m + qA_t | \text{ordre d'achat}] - \mathbb{E}[(\theta v + C)x + m | \text{ordre d'achat}] = 0$$

⁸Cette nouvelle définition de cascade d'information coïncide avec l'ancienne. Comme au temps t les croyances ne sont pas affectées par le trader, son action ne va diffuser aucune nouvelle information sur la réalisation de V ainsi l'information publique reste inchangée.

Par conséquent, $A_t = \theta v(\prod(\pi_t, buy)) + C$ et $B_t = \theta v(\prod(\pi_t, sell)) + C$. Dans cet exemple $\theta \neq 0$ et $C \neq 0$ représentent la distorsion du prix de l'actif par les teneurs de marché: θ représente la sensibilité du teneur de marché quant au changement de la croyance publique π_t . C introduit un biais dans le calcul de la valuation de l'actif. Ainsi la différence de comportement existante entre traders et teneurs de marché repose sur l'asymétrie d'informations, $v(\pi_t) - v(\pi_t^s)$ et sur la distorsion opérée par les traders en ce qui concerne la valeur de l'actif (θ et C). Ainsi le trader, qui reçoit un signal s , achète si $v(\pi_t^s) \geq A_t$ et vend si $v(\pi_t^s) \leq B_t$.

Plusieurs cas peuvent être identifiés:

- Si $\theta = 0$ et $C \in (\underline{V}, \bar{V}) \rightarrow A_t = B_t = C$:
Nous nous retrouvons dans le modèle BHW étudié en première partie. Des cascades informationnelles peuvent donc se produire selon les modalités détaillées dans la première partie. Si $\pi_0 \in (\pi^*, \pi^{**})$ on a $v^l(\pi_0) < B_0 = C = A_0 < v^h(\pi_0)$. Donc pour $t = 0$ un trader informé va acheter l'actif s'il reçoit le signal l et le vend s'il reçoit un signal h. Ainsi, tant que $\pi_t \in (\pi^*, \pi^{**})$ les décisions des traders sont informatives. Néanmoins, il suffit que l'historique des échanges soit suffisamment déséquilibré à la hausse ou à la baisse pour provoquer une variation de la croyance publique π_t , de sorte que $\pi_t \notin (\pi^*, \pi^{**})$. Dans ce cas soit on a $v(\pi_t^s) \geq v(\pi_t^l) \geq A_t$ soit on a $B_t \geq v(\pi_t^s) \geq v(\pi_t^l)$. Peu importe le signal que les agents reçoivent, ils vont soit acheter, soit vendre.
- Si $\theta = 1$ et $C = 0$: Aucun comportement moutonnier n'est possible. En effet, On a $v^l(\pi_t) = B_t < A_0 = v^h(\pi_t)$. Dans ce cas de figure, le trader achète uniquement lorsqu'il reçoit le signal h et refuse sinon. Son action est toujours informative.

•

Proposition 2.1. *Il existe \underline{C} et \bar{C} tels que si $C \in (\underline{C}, \bar{C})$ et $\theta \in (0, 1)$, alors il existe un niveau de croyance π_0 tel que l'apparition de comportements moutonniers devient possible.*

Le traitement de tous ces cas nous a permis de montrer que dès le moment où les teneurs de marché et les traders apprécient différemment la valeur de l'actif financier il émerge des comportements moutonniers.

En effet, parmi tous les cas étudiés, le seul cas où la formation de comportements moutonniers est impossible est le second. Sachant que $\theta = 1$ et $C = 0$

on a $U_T(v, x, m) = U_M(v, x, m)$; les individus ont la même appréciation de la valeur de l'actif bien que demeure l'asymétrie d'information.

Ainsi quand nous étudierons le cas où les traders sont averses au risque et les teneurs de marché neutres on peut se douter que des comportements moutonniers peuvent se produire. En effet, la différence dans le degré d'aversion entre les deux parties influent sur l'appréciation de l'actif ce qui provoque l'émergence de comportements moutonniers.

2.1 Le rôle de l'aversion au risque dans la formation des comportements moutonniers

À présent étudions l'impact que peut avoir la différence de degré d'aversion au risque entre traders et teneurs de marché dans l'émergence de comportements moutonniers. Dorénavant les hypothèses du modèle seront les suivantes:

- $U_M(\mathbf{v}, x, m) = \mathbf{v}x + m$ et $U_T(\mathbf{v}, x, m) = u(\mathbf{v}x + m)$, avec $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, différentiable, strictement croissante et concave.⁹
- Les conditions d'équilibre dans un marché guidé par la concurrence des prix implique que:

$$\max(B_t = \mathbb{E}[v|H_t, \text{trader sells at } B_t]) \quad (1)$$

$$\min(A_t = \mathbb{E}[v|H_t, \text{trader buys at } A_t]) \quad (2)$$

- On définit le prix de demande (resp. d'offre) de réserve $\beta(\pi, x, m)$ (resp. $\alpha(\pi, x, m)$) comme le prix maximal (resp. minimal) auquel le trader est prêt à acheter (resp. vendre) q quantité d'actifs. Ces prix vérifient les conditions d'indifférence d'utilité:

$$\mathbb{E}[(u(v(x + q) + m - q\beta)) - E[u(vx + m)]] = 0$$

$$\mathbb{E}[(u(v(x - q) + m + q\alpha)) - E[u(vx + m)]] = 0$$

Au temps t, un trader ayant reçu un signal s et disposant d'un portefeuille (x, m) achète (resp. vend) si $\beta(\pi^s, x, m) \geq A_t$ (resp. $\alpha(\pi^s, x, m) \leq B_t$). Autrement il n'échange pas.

Soient

$$\phi(\pi, A) = \{(x, m) | \beta(\pi, x, m) \geq A\}$$

⁹ u vérifie les conditions standards de l'aversion au risque dans la modélisation des comportements en micro-économie.

et

$$\psi(\pi, B) = \{(x, m) | \alpha(\pi, x, m) \leq B\}$$

, L'ensemble des compositions possibles de portefeuille tel qu'un trader disposant d'une croyance π soit prêt à acheter pour un prix A et/ou vendre au prix B.

Lemme 2.2. *Les applications $(\pi, x, m) \mapsto \beta(\pi, x, m)$ et $(\pi, x, m) \mapsto \alpha(\pi, x, m)$ sont continues sur $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus:*

1. *pour tout m , on a :*

$$\text{si } x < -\frac{q}{2} \text{ Alors, } \beta(0, x, m) > \underline{V} \text{ et } \beta(1, x, m) > \overline{V}$$

$$\text{si } x = -\frac{q}{2} \text{ Alors, } \beta(0, x, m) = \underline{V} \text{ et } \beta(1, x, m) = \overline{V}$$

$$\text{si } x > -\frac{q}{2} \text{ Alors, } \beta(0, x, m) < \underline{V} \text{ et } \beta(1, x, m) < \overline{V}$$

2. *si $x < \frac{q}{2}$ Alors, $\alpha(0, x, m) > \underline{V}$ et $\alpha(1, x, m) > \overline{V}$*

$$\text{si } x = \frac{q}{2} \text{ Alors, } \alpha(0, x, m) = \underline{V} \text{ et } \alpha(1, x, m) = \overline{V}$$

$$\text{si } x > \frac{q}{2} \text{ Alors, } \alpha(0, x, m) < \underline{V} \text{ et } \alpha(1, x, m) < \overline{V}$$

Le lemme démontre que le prix de réserve d'un investisseur averse au risque est de manière générale différent de la valeur espérée étant donné l'information dont il dispose et ce même lorsqu'il n'y a plus d'incertitude sur V^{10} (i.e lorsque $\pi_t \in \{0, 1\}$). En effet, dans ce cas, les prix de réserve sont égaux à \overline{V} si et seulement si $x = -\frac{q}{2}$. S'il dispose une quantité $x > -\frac{q}{2}$ (resp. $x < -\frac{q}{2}$) du fait de son aversion au risque le trader est réticent à augmenter (resp. diminuer) son prix de demande de réserve qui est inférieur à la valeur espérée.

Lemme 2.3. *Les solutions des équations 1 et 2 existent toujours. De plus, $A_t \in [v^l(\pi_t), v^h(\pi_t)]$ et $B_t \in [v^l(\pi_t), v^h(\pi_t)]$.*

Le lemme montre que les prix ask et bid sont bornés par les valeurs espérées des traders étant donnée la croyance publique et leur information privée. En particulier, cela signifie que l'information que peuvent tirer les teneurs de marché étant donné l'historique des échanges ne peut être plus précise que celle des traders.

Par ailleurs on déduit que si π_t tend vers 0 ou 1 alors les prix bid et ask tendent vers la même valeur \underline{V} ou \overline{V} respectivement.

D'après J-P.Decamps et S.Lovo dans [5] pour comprendre l'aversion le rôle

¹⁰Il reste néanmoins de l'incertitude sur ϵ . Cette incertitude joue un rôle important dans la décision du trader comme le lemme le montre.

précis de l'aversion au risque dans l'émergence des comportements moutonniers il faut distinguer deux éléments déterminants dans la prise de décision des agents:

- **L'information:** Elle détermine la variation des prix de réserve en fonction de l'information privée que le trader reçoit. Lorsque π tend vers 0 ou 1 l'impact du signal s'atténue. Entre autre on a: $\lim_{\pi \rightarrow 0}(v^h(\pi) - v^l(\pi)) = 0$ et $\lim_{\pi \rightarrow 1}(v^h(\pi) - v^l(\pi)) = 0$. En effet on a $\mathbb{P}[V = \bar{V}|s = h] = \frac{p\pi}{p\pi + (1-p)(1-\pi)}$ et $\mathbb{P}[V = \bar{V}|s = l] = \frac{(1-p)\pi}{(1-p)\pi + (1-p)(\pi)}$. ces deux probabilités convergent respectivement vers 0 et 1 lorsque π tends vers 0 ou 1.
- **L'inventaire (i.e la quantité d'actifs):** caractérise la préférence pour l'agent averse au risque d'un portefeuille non risqué. L'impact de la composition du portefeuille dans la prise de décision de l'agent s'accroît avec le degré d'aversion de l'investisseur qui dépend de l'exposition au risque $|x|$, et l'incertitude qui pèse sur v , la valeur de l'actif qui résulte de la méconnaissance de ϵ .

La proposition suivante montre que lorsque la croyance publique est suffisamment proche de 0 ou 1, le signal du trader affecte ses actions seulement si x est proche de $\frac{q}{2}$ ou $-\frac{q}{2}$ ¹¹. Par conséquent tous les traders ne disposant pas d'une quantité d'actif suffisamment proche de ces deux valeurs, ignorent leur signal.

Proposition 2.2. Soient $\Theta_{buy}^s = \{(x, m) | x < -\frac{q}{2}\} \cap (\Phi(\pi_0^s, A_0))^c$ et $\Theta_{sell}^s = \{(x, m) | x > \frac{q}{2}\} \cap (\Phi(\pi_0^s, A_0))^c$.¹²

Étant données les hypothèses sur u , un trader qui reçoit un signal s et pour qui le portefeuille $(x, m) \in \Theta_{buy}^s$ (resp. Θ_{sell}^s) s'engage dans un achat (une vente) par mimétisme avec une probabilité positive.

Cette proposition démontre qu'en fonction de la composition du portefeuille des agents ceux-ci adoptent un comportement moutonnier avec probabilité positive. Étant donné que l'inventaire reflète la préférence de l'agent pour un portefeuille sans risque, on voit bien que ce qui est à l'origine du comportement moutonnier est l'aversion au risque. Ceci est d'autant plus vrai que le constat est fait lorsque π tend vers 0 ou 1 c'est à dire lorsque le

¹¹Comme π est proche de 1 ou 0 le rôle de l'information est minime comparé à celui de la composition du portefeuille dans la formation de comportements mimétiques

¹²Ces ensembles représentent la composition des traders ayant reçu un signal s qui, au temps $t=0$, préfèrent ne pas acheter (resp. vendre) malgré qu'ils ont l'option d'échanger et que leur quantité d'actif x est inférieure à $-\frac{q}{2}$ (resp. supérieure à $\frac{q}{2}$).

rôle de l'information privée est presque inexistant dans la prise de décision de l'agent. Quel est l'impact de ces comportements moutonniers sur l'efficience de marché ?

3 Efficience de marché

L'étude des comportements moutonniers, au delà de l'intérêt sociologique, prend sens dans les conséquences qu'ils peuvent avoir sur l'efficience de marché. L'efficience de marché caractérise la capacité qu'ont les prix de transmettre une information sur la valeur de l'actif. Si les prix sont représentatifs de la valeur de l'actif les agents sont plus à même de prendre de bonnes décisions. Au contraire si l'information est perturbée alors les agents n'auront plus de difficulté à prendre la bonne décision, celle qui maximise leur utilité étant donné que celle-ci dépend à la fois de leur quantité de monnaie ainsi que de la valeur de l'actif en question. On dira que le marché n'est pas efficient.

D.Diamond et R.E.Verrechia dans [3] mesurent l'efficience de marché par la vitesse de convergence des prix (et croyances) vers la valeur exacte de l'actif. La vitesse de convergence peut être mesurée par le taux auquel le ratio $L_t = \frac{\pi_t}{1-\pi_t}$ tend vers l'infini quand $V = \bar{V}$ ou vers 0 quand $V = \underline{V}$. Les principaux résultats concernant l'impact des comportements mimétiques sur la perturbation qu'ils engendrent concernant la formation des prix et ainsi sur l'efficience de marché sont contenus dans la proposition suivante:

Proposition 3.1. *Toujours selon les hypothèses sur u , on a :*

1. *La présence de traders averses au risque réduit l'efficience de marché par rapport à une situation où les agents seraient neutres au risque*
2. *Si F est telle que la probabilité que l'inventaire d'un trader soit proche de $\frac{q}{2}$ ou $-\frac{q}{2}$ est égale à 0 alors sur le long terme le marché est presque sûrement inefficent.*
3. *Si la loi de F est continue alors la probabilité que le taux de convergence du prix de l'actif tende vers sa réelle valeur tend vers 0.*

L'ensemble des résultats issus de la proposition précédente montre qu'un marché où les traders sont averses au risque présente des caractéristiques moins attrayantes qu'un marché où l'aversion au risque entre teneurs de marchés et traders est semblable. En effet, si les traders sont averses au risque tandis que les teneurs de marchés sont neutres au risque, alors des comportements mimétiques vont émerger empêchant ainsi l'efficience de marché. Les prix ne caractérisent pas la valeur réelle des actifs, les agents ne prennent donc pas les décisions qui leurs sont optimales.

4 Conclusion

Dans cet exposé, nous avons pu montrer, à l'aide d'un formalisme simplifié, comment l'aversion au risque perturbe l'appréciation entre traders et teneurs de marché et donc incite les agents à se fier au comportement d'autrui davantage que sur le sien pour prendre une décision.

La première partie nous a permis d'affiner notre analyse concernant l'émergence de tels comportements. En particulier, l'étude de la fragilité de ceux-ci, nous permet à présent de mieux comprendre la grande instabilité présente sur les marchés financiers lors des différentes crises. La perturbation engendrée par ces changements prompts d'attitude influe sur la capacité qu'ont les prix de refléter la valeur des actifs et donc sur la capacité pour les agents de prendre une bonne décision (i.e sur l'efficience de marché) pouvant entraîner un phénomène d'imitation. Comment justifier l'existence de tels comportements s'ils entravent la régulation du marché ? Peut être la dénomination de comportement "moutonnier" paraît plus péjorative" que ce qu'il n'y paraît. Car elle respecte la rationalité des agents. En effet, on a pu constater dans les différents modèles étudiés que les agents se plient aux décisions des autres car **individuellement** cela leur procure une meilleure utilité. En effet, faute d'information de meilleure qualité, les agents appréhendent les actions des autres à l'aune de leur information privée pour prendre la meilleure décision. Néanmoins, le bien-être social ne saurait être l'agrégation du bien-être de chaque individu.

Étant donné l'impact des comportements mimétiques sur l'efficience de marché, il peut être intéressant d'étudier quelles peuvent être les solutions à apporter. Quelques unes ont été évoquées dans la première partie issue de [6], tels que le relâchement progressif d'une information de qualité. Néanmoins, la spécificité du cadre des marchés financiers implique une analyse plus approfondie du phénomène. Cette réflexion est présente dans [5], article dont l'essentiel des résultats de ce mémoire ont été tirés, vers lequel nous renvoyons le lecteur désireux d'en savoir plus sur le sujet.

A Preuves section: Cascades informationnelles et formation des comportements moutonniers

Preuve du lemme 1.1. 1. La probabilité qu'il n'y ait pas de cascades lorsque $N=2$ est arrivée uniquement si la décision des deux premiers joueurs est différente. Remarquons dans un premier temps que

$$\mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = L] = \mathbb{P}[X_1 = L, X_2 = H]$$

et,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = L] &= \mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = L, V = \bar{V}] + \mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = L, V = \underline{V}] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = L | V = \bar{V}] \mathbb{P}[V = \bar{V}] \\ &\quad + \mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = L | V = \underline{V}] \mathbb{P}[V = \underline{V}] \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

Or la probabilité que le deuxième joueur effectue la même action que le premier est égale à la moitié de la probabilité que ce dernier reçoive un signal différent du joueur 1. car dans ce cas il est indifférent et lance une pièce pour prendre sa décision. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\text{Pas de cascade}] &= \mathbb{P}[D_1 \neq D_2] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}[X_1 \neq X_2] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = L] + \mathbb{P}[X_1 = L, X_2 = H]) \\ &= p(1 - p) \text{ car les } p_i \text{ sont iid} \end{aligned}$$

2. Lors du premier calcul de ce mémoire on a vu $\mathbb{P}[X_i = H] = \mathbb{P}[X_i = L] = \frac{1}{2}$. Il y a donc autant de chance qu'une cascade d'adoption ou de rejet se déclenche. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\text{Cascade d'adoption}] &= \mathbb{P}[\text{Cascade de rejet}] \\ &= \frac{1 - \mathbb{P}[\text{Pas de cascade}]}{2} \\ &= \frac{1 - p(1 - p)}{2} \end{aligned}$$

□

Preuve de la proposition 1.1. 1. Pour $N \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'il n'y ait pas de cascade au bout du N -ième agent est la probabilité qu'en prenant les agents 2 par 2 il n'y ait aucune cascade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\text{Pas de Cascade au bout de } N \text{ agents}] &= \mathbb{P}[\cap_{i=0}^{\frac{N}{2}} (D_{2i} \neq D_{2i+1})] \\ &= \mathbb{P}[D_1 \neq D_2]^{\frac{N}{2}} \\ &= p(1-p)^{\frac{N}{2}}\end{aligned}$$

2. D'après le lemme 1.1 on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\text{Cascade d'adoption au bout de } N \text{ agents}] &= \mathbb{P}[\text{Cascade de rejet au bout de } N \text{ agents}] \\ &= \frac{1 - \mathbb{P}[\text{Pas de cascade}]}{2} \\ &= \frac{1 - p(1-p)^{\frac{N}{2}}}{2}\end{aligned}$$

□

Preuve de la proposition 1.2. Si on se situe dans un état du monde tel que $V=1$, on a:

Lemme A.1. 1. $\mathbb{P}[\text{Cascade Correcte}] = \frac{1}{2}p(1+p)$

2. $\mathbb{P}[\text{Cascade Incorrecte}] = \frac{(1-p)(2-p)}{2}$

Preuve du lemme A.1. 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\text{Pas de cascade}] &= \mathbb{P}[D_1 \neq D_2 | V = 1] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}[X_1 \neq X_2 | V = 1] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = L | V = 1] \\ &\quad + \mathbb{P}[X_1 = L, X_2 = H | V = 1]) \\ &= p(1-p) \text{ car les } p_i \text{ sont iid}\end{aligned}$$

2. Pour qu'il y ait cascade, il y a deux cas de figure, ou bien les agents ont reçu le même signal, ou bien ils ont reçu un signal distinct. dans le second cas l'agent prenant une décision aléatoire en lançant une pièce

adopte la même action du premier argent avec probabilité $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[\text{Cascade d'adoption}] &= \mathbb{P}[D_1 = A, D_2 = A] \\
 &= \mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = H|V = 1] \\
 &\quad + \frac{1}{2}\mathbb{P}[X_1 = H, X_2 = L|V = 1] \\
 &= p^2 + \frac{1}{2}p(1-p) = \frac{1}{2}p(1+p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[\text{Cascade de Rejet}] &= \mathbb{P}[D_1 = R, D_2 = R] \\
 &= \mathbb{P}[X_1 = R, X_2 = R|V = 1] \\
 &\quad + \frac{1}{2}\mathbb{P}[X_1 = R, X_2 = H|V = 1] \\
 &= \frac{(1-p)^2 + \frac{1}{2}(1-p)}{p} = \frac{(1-p)(2-p)}{2}
 \end{aligned}$$

Or, quand $V=1$ une cascade correcte est une cascade d'adoption et une cascade incorrecte est une cascade de rejet.

□

En résumé on a :

- $\mathbb{P}[\text{Pas de cascade au bout de } 2n \text{ joueurs}] = (p(1-p))^n = q_1^n$
- $\mathbb{P}[\text{Cascade correcte au bout de } 2 \text{ joueurs}] = \frac{1}{2}p(1+p) = q_2$
- $\mathbb{P}[\text{Cascade incorrecte au bout de } 2 \text{ joueurs}] = \frac{(1-p)(2-p)}{2} = q_3$

On a donc:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[\text{Cascade correcte au bout de } 2n \text{ joueurs}] &= \mathbb{P}[\text{Cascade correcte avec } 2 \text{ joueurs}] \\
 &\quad + \mathbb{P}[\text{Cascade correcte avec } 4 \text{ joueurs}] + \dots \\
 &\quad + \mathbb{P}[\text{Cascade correcte avec } 2n \text{ joueurs}] \\
 &= q_2 + q_1q_2 + \dots + q_1^{n-1}q_2 \\
 &= \sum_{k=1}^n q_1^{k-1}q_2 \\
 &= \frac{p(1+p)}{2} \left(\frac{1 - (p(1-p))^n}{1 - p(1-p)} \right)
 \end{aligned}$$

On applique le même raisonnement pour les cascades incorrectes et on obtient le résultat demandé. □

- preuve de la proposition 1.3.*
1. L'action du premier individu reflète le signal qu'il a reçu. Le deuxième agent détermine donc le signal du leader d'opinion. Étant donné que le leader d'opinion dispose d'une information de meilleure qualité que la sienne, le deuxième agent ignore sa propre information au profit de celle du leader. Les deux premiers agents ont donc effectué la même action donc d'après les résultats précédents un cascade informationnelle émerge.
 2. Étant donné que les agents sont rangés en ordre décroissant de leur qualité d'information, cela signifie que l'agent $n+1$ dispose d'une plus grande quantité d'information que les n premiers. En effet, il dispose à la fois de l'historique des décisions, car aucun de ses prédécesseurs n'a totalement été influencé par son propre prédécesseur, ainsi que de sa propre information avant de prendre sa décision. Une autre configuration selon laquelle il existerait un agent disposant d'une information de meilleure qualité et qui jouerait avant un des agents disposant d'une information de moins bonne qualité entraînerait une perte d'information pour les agents qui suivent. L'agent disposant de moins d'information se serait plié à l'information du premier, son action n'aurait procuré aucune information supplémentaire. Ainsi les agents qui le succèdent disposent de moins d'informations que si l'ordre entre les deux avait été inversé.

□

Preuve de 1.4. Considérons le cas avec signal binaire que l'on a pu voir lors des sections précédentes. Une cascade d'adoption ou de rejet émerge lorsque le 3ème individu observe que les agents précédents ont effectué la même action. Dans ce cas, soit on se retrouve avec une succession de signaux identiques (HH ou LL), soit une succession de signaux contraires (HL ou LH). Dans le second cas le deuxième joueur tire à pile ou face de sorte que le hasard l'a poussé à effectuer la même action que le premier joueur.

A présent, supposons qu'une quantité d'information publique contraire à la décision des deux premiers agents soit relâchée, même si la séquence de signaux était identique, il suffit que le joueur 3 observe la même information pour reconsidérer sa décision, et donc la conformer à son signal. En effet, si le 3ème agent suppose que les deux signaux précédents étaient identiques, il se retrouve lui aussi en possession de deux signaux identiques (l'information publique et son information privée) mais contraires aux premiers. Il est donc indifférent. Néanmoins il se peut que les deux premiers signaux aient été contradictoire dans ce cas le 3ème joueur se retrouve en position de force et reconsidère son signal dans sa prise de décision.

Enfin, si l'on se trouvait dans une cascade informationnelle bien en place le raisonnement est identique. En effet, étant donné que la décision des agents succédants repose sur celle qui sont au départ de la cascade, leur décision n'est pas informative. On se concentre alors sur l'étude des signaux de ces deux premiers agents, en appliquant un raisonnement identique. \square

B Preuves section: Éffets de l'aversion au risque dans la formation des comportements moutonniers sur les marchés financiers

Preuve proposition 2.1. Pour simplifier les notations, on suppose: $\bar{V} = \underline{V} + 1$, Soient $\underline{C} = \underline{V}(1 - \theta)$ et $\bar{C} = \bar{V}(1 - \theta)$. D'après les hypothèses on a $C \in (\underline{C}, \bar{C})$ et $\theta \in (0, 1)$

Lemme B.1. $\forall \pi \in (0, 1)$ on a $:\pi^l < \pi < \pi^h$ avec $\pi^s = \mathbb{P}[V = \bar{V} | s \in \{l, h\}]$

Preuve du lemme B.1. Montrons, $\pi < \pi^h$ le cas $\pi^l < \pi$ se déduit par un raisonnement symétrique.

$$\begin{aligned} \pi < \pi^h &\Leftrightarrow \pi < \mathbb{P}[V = \bar{V} | s = h] \\ &\Leftrightarrow \pi < \frac{\mathbb{P}[s = h | V = \bar{V}] \pi}{\mathbb{P}[s = h]} \\ &\Leftrightarrow 1 < \frac{p}{\mathbb{P}[s = h]} \end{aligned}$$

Or on a,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(s = h) &= \mathbb{P}[s = h, V = \bar{V}] + \mathbb{P}[s = h, V = \underline{V}] \\ &= p\pi + (1 - p)(1 - \pi) &= \pi(2p - 1) + 1 - p \end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} \pi < \pi^h &\Leftrightarrow \frac{p}{\pi(2p - 1) + 1 - p} > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{p + (1 - p) - (1 - p)}{\pi(2p - 1) + 1 - p} > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2p - 1 + (1 - p)}{\pi(2p - 1) + 1 - p} > 1 \\ &\Leftrightarrow 2p - 1 > 0 \text{ car dans ce cas on a } 2p - 1 > \pi(2p - 1) \\ &\Leftrightarrow p > \frac{1}{2} \text{ qui est vrai par hypothese} \end{aligned}$$

\square

Lemme B.2. Lorsque $\pi = 1$ on a $\pi^h = \pi^l = 1$ et lorsque $\pi = 0$ on a $\pi^h = \pi^l = 0$

Preuve du lemme B.2. On a $\pi^h = \mathbb{P}[V = \bar{V} | s = h] = \frac{p\pi}{p\pi + (1-p)(1-\pi)}$ et

$$\pi^l = \mathbb{P}[V = \underline{V} | s = h] = \frac{(1-p)\pi}{p(1-\pi) + (1-p)\pi}.$$

En remplaçant par $\pi = 0$ et $\pi = 1$ On trouve les resultats demandés. \square

Corollaire B.1 (Corollaire immédiat du lemme B.2). Si $\pi \in \{0, 1\}$ on a $v^l(\pi) = v(\pi) = 0$ si $p < 1$ et $v^l(\pi) = v(\pi) = 1$ sinon

Montrons qu'il existe I un intervalle de $(0, 1)$ tel que $\forall \pi \in I$ on a :

$$v^l(\pi) < A_t = \theta(\pi + \underline{V}) + C < v^h(\pi)$$

Tout d'abord, on remarque que :

$$v(\pi) = \mathbb{E}[V = \bar{V}] = \bar{V}\mathbb{P}[V = \bar{V}] + \underline{V}(1 - \mathbb{P}[V = \bar{V}]) = \mathbb{P}[V = \bar{V}](\bar{V} - \underline{V}) + \underline{V} = \pi + \underline{V}$$

$$\text{et } v^s(\pi) = v(\pi^s) = \pi^s + \underline{V}.$$

Comme conséquence directe du lemme B.1 on a $v^l(\pi) < v(\pi) < v^h(\pi)$.

$\forall \pi \in (0, 1)$ Soit $f : \pi \mapsto \theta(\pi + \underline{V})$ et $g : \pi \mapsto v(\pi) - f[\pi] = (1 - \theta)(\pi + \underline{V})$.

On a $g(0) = \underline{C} = \underline{V}(1 - \theta) < C$ et $g(1) = \bar{C} = (\underline{V} - 1)(1 - \theta) > C$ par hypothèse. De plus, g est affine en π donc continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI): $\exists \pi^* \in (0, 1)$ tel que $g(\pi^*) = C$. On a donc :

$$v^l(\pi^*) < v(\pi^*) = \theta(\pi^* + \underline{V}) + C < v^h(\pi^*)$$

. Par continuité des applications v et f, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\pi \in (\pi^* - \epsilon, \pi^* + \epsilon)$, on appellera dorénavant I cet intervalle. On a donc :

$$\forall \pi \in I, v^l(\pi) < A_t = \theta(\pi + \underline{V}) + C < v^h(\pi)$$

Dans ce cas de figure, l'agent achète s'il reçoit un signal h et vend s'il reçoit un signal l. Il n'y a pas de comportements moutonniers.

Cependant, d'après le corollaire B.1 on a $v^l(1) = v^h(1) = \underline{V} + 1 > \theta(\underline{V} + 1) + C$. En appliquant de nouveau le TVI on déduit qu'il existe un voisinage \mathcal{N} de 1 tel que :

$$\forall \pi \in \mathcal{N} v^h(\pi) \geq v^l(\pi) \geq \theta(\underline{V} + \pi) + C = A_t$$

Cela signifie qu'il existe une région telle que tous les agents achètent peu importe leur signal lorsque la croyance est proche de 1. Un tel cas de figure arrive si et seulement si une histoire suffisamment déséquilibrée a lieu¹³. Ce qui arrive avec probabilité positive étant donné que p n'est pas parfaitement

¹³De sorte que $\pi \in \mathcal{N}$

corrélé avec la réalisation de V (i.e. $p \in (\frac{1}{2}, 1)$)¹⁴.

Un raisonnement symétrique nous permet de montrer qu'avec probabilité positive l'agent s'engage dans un vente par mimétisme. \square

Preuve du lemme 2.2. La continuité de $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$ repose sur la continuité de u qui est par hypothèse différentiable.

Nous n'effectuons que les démonstrations de la partie 1 du lemme en prenant $\pi = 1$, le raisonnement des démonstrations de la partie 2 est identique.

On sait que β est la solution de

$$\mathbb{E}[u(vx + m) - u(v(x + q)) + m - qB_t] = 0 \quad (3)$$

Soient $W_0 = (\bar{V} + \epsilon)x + m$, $W'_0 = vx + m + \epsilon|x|$, $W_1 = (\bar{V} + \epsilon)(x + q) + m - q\bar{V}$ et $W'_1 = \bar{V}x + m + \epsilon|x + q|$

Comme ϵ est une variable aléatoire symétrique. Par conséquent, $\epsilon|x|$ et ϵx suivent la même loi. Ainsi W_0 resp. W_1) et W'_0 (resp. W'_1) ont la même loi.

3 peut se réécrire de la manière suivante:

$$\mathbb{E}[u(W_0) - u(W_1 + q(\bar{V} - \beta))]$$

- **Si $x = -\frac{q}{2}$:** On a $|x| = |x + q|$ et $W'_0 = W'_1$. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(W_0) - u(W_1 + q\bar{V} - \beta)] &= \mathbb{E}[u(W'_0) - u(W'_1 + q(\bar{V} - \beta))] \\ &= \mathbb{E}[u(W'_0) - u(W'_0 + q(\bar{V} - \beta))] \end{aligned}$$

on a donc $\mathbb{E}[u(W'_0) - u(W'_0 + q(\bar{V} - \beta))] \Leftrightarrow \beta(1, x, m) = \bar{V}$

- **Si $x < -\frac{q}{2}$:** On a $|x| > |x + q|$

De plus, soit $f : b \mapsto \mathbb{E}[u(\bar{V}x) + m + b\epsilon]$ est décroissante. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{df}{db} &= \mathbb{E}\left[\frac{du(\bar{V}x + m + b\epsilon)}{db}\right] \text{ par le Theoreme de derivee sous le signe integrale} \\ &= \mathbb{E}[\epsilon u'(\bar{V}x + m + b\epsilon)] \\ &= \text{cov}(\epsilon, u'(a + b\epsilon)) < 0 \text{ par décroissance de } u \text{ qui est concave} \end{aligned}$$

En définitive, on obtient:

$$\mathbb{E}[u(W_0)] = \mathbb{E}[W'_0] < \mathbb{E}[u(W'_1)] = \mathbb{E}[u(W_1)] \Leftrightarrow \mathbb{E}[u(W_0)] - \mathbb{E}[u(W_0)] < 0$$

Ainsi par croissance de u on obtient: $\mathbb{E}[u(W_0) - u(W_1 + q(\bar{V} - \beta))]$ si et seulement si $s(\bar{V} - \beta) > 0$ (i.e $\bar{V} > \beta$).

¹⁴Nous ne démontrons pas cette preuve

- $x > -\frac{q}{2}$: On a $|x| < |x + q|$ et on obtient par raisonnement analogue $\beta(1, x, m) < \bar{V}$

□

Preuve lemme 2.3 . On définit T_{A_t} l'évènement " le Trader achète au prix A_t ". On a:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v|H_t, T_{A_t}] &= \mathbb{E}[V + \epsilon|H_t, T_{A_t}] \\ &= \mathbb{E}[V|H_t, T_{A_t}] \\ &= \bar{V}\mathbb{P}[V|H_t, T_{A_t}] + \underline{V}(1 - \mathbb{P}[V|H_t, T_{A_t}]) \in (\underline{V}, \bar{V})\end{aligned}$$

On peut dissocier deux cas: $\mathbb{P}[T_{A_t}] > 0$ et $\mathbb{P}[T_{A_t}] = 0$

$\mathbb{P}[T_{A_t}] > 0$:

Alors les probabilités de l'expression ci-dessus sont biens définies. On a:

$$\mathbb{P}[V|H_t, T_{A_t}] = \frac{\mathbb{P}[V = \bar{V}, H_t, T_{A_t}]}{\mathbb{P}[H_t, T_{A_t}]}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[V = \bar{V}, H_t, T_{A_t}] &= \mathbb{P}[T_{A_t}|V = \bar{V}, H_t]\mathbb{P}[V = \bar{V}, H_t] \\ &= (\mathbb{P}[T_{A_t}, s = h|V = \bar{V}, H_t] + \mathbb{P}[T_{A_t}, s = h|V = \bar{V}, H_t])\mathbb{P}[V = \bar{V}, H_t] \\ &= (\mathbb{P}[T_{A_t}, |s = h, V = \bar{V}, H_t]\mathbb{P}[s = h] + \mathbb{P}[T_{A_t}|s = l, V = \bar{V}, H_t]\mathbb{P}[s = l])\pi_t\mathbb{P}[H_t] \\ &= \pi_t\mathbb{P}[H_t][pF(\Phi(\pi_t^h, A_t)) + (1 - p)F(\Phi(\pi_t^l, A_t))]\end{aligned}$$

De la même manière on obtient:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[H_t, T_{A_t}] &= \mathbb{P}[H_t][\pi_t[pF(\Phi(\pi_t^h, A_t)) + (1 - p)F(\Phi(\pi_t^l, A_t))]] \\ &\quad + (1 - \pi_t)[(1 - p)F(\Phi(\pi_t^h, A_t)) + pF(\Phi(\pi_t^l, A_t))]\end{aligned}$$

On ne traitera que le sous-cas F continue:¹⁵ Si F continue on a $g : \xi \mapsto \mathbb{E}[v|H_t, traderbuysat\xi]$ satisfaisant $g(\underline{V}) \geq \underline{V} > 0$ et $g(\bar{V}) \leq \bar{V}$. Posons $h : \xi \mapsto g(\xi) - \xi$ qui est aussi continue. On a donc $h(\underline{V}) \leq 0$ et $h(\bar{V}) \geq 0$ d'après le TVI $\exists \xi^*$, $h(\xi^*) = 0 \Leftrightarrow g(\xi^*) = \xi^*$. donc la solution au problème 2 existe.

Si $\mathbb{P}[T_{A_t}] = 0$: pour certains $A_t \in [\underline{V}, \bar{V}]$ alors on pose $\mathbb{E}[v|H_t, T_{A_t}] = \mathbb{E}[v|H_t]$. Ce qui signifie qu'il existe un ensemble négligeable de traders qui achètent à

¹⁵Pour le cas F discret on se referera à la preuve dans [5] pp. 25-26

n'importe quel prix, et donc l'action ne produit aucune information supplémentaire.

À présent, montrons que: $A_t \in [v^l(\pi_t), v^h(\pi_t)]$.

$$v^l(\pi_t) \leq A_t \leq v^h(\pi_t) \Leftrightarrow \pi_t^l \leq \mathbb{P}[V = \bar{V} | H_t, T_{A_t}] \leq \pi_t^h.$$

Or $\mathbb{P}[V = \bar{V} | H_t, T_{A_t}]$ est maximale quand $F(\Phi(\pi_t^h, A_t)) = 1$ et $F(\Phi(\pi_t^l, A_t)) = 0$ et atteint $v^h(\pi_t)$. Inversement, elle est minimale quand $F(\Phi(\pi_t^h, A_t)) = 0$ et $F(\Phi(\pi_t^l, A_t)) = 1$ et atteint $v^l(\pi_t)$. On raisonne de manière analogue sur B_t . \square

Preuve de la proposition 2.2. On ne fournit la preuve que pour le cas d'ordre achats issus de la formation de comportements mimétiques:

Soit un trader, qui a reçu un signal et dont la composition de son portefeuille est telle que $(x, m) \in \Theta_{buy}^s$. Tout d'abord, notons que si $x \notin \Theta_{buy}^s$ cela signifie qu'au départ le trader ne souhaite pas acheter. À présent, supposons qu'une histoire positive se produit sans qu'aucune cascade informationnelle ne se soit produite, cela signifie que la croyance publique π_t tend vers 1. Une telle configuration est probable étant donné que p n'est pas parfaitement corrélée avec la valeur de V . Sachant que

$$\bar{V} = v(1) = \beta(1, -\frac{q}{2}, m) < \beta(1, x, m)$$

d'après le premier résultat du lemme 2.2. De plus, d'après le lemme 2.3 on sait que $A_t \leq v(\pi_t^h)$. Par continuité de β et $v(\cdot)$ par rapport à π_t on a donc $\lim_{\pi_t \rightarrow 1} v(\pi_t^h) < \lim_{\pi_t \rightarrow 1} \beta(\pi_t^s, x, m)$. En effet, d'après le lemme B.2 on a

$$\lim_{\pi_t \rightarrow 1} \pi_t^h = \lim_{\pi_t \rightarrow 1} \pi_t^l = 1$$

Par conséquent on a: $A_t \leq (\pi_t^h) < \beta(\pi_t^s, x, m)$ pour π_t suffisamment proche de 1.

Ainsi peu importe le signal que le trader reçoit il décide d'adopter. On se trouve dans une situation de mimétisme. \square

C Preuves section: Efficience de marché

Preuve de la proposition 3.1. SI nous avons défini $L_t = \frac{\pi_t}{1-\pi_t}$, dans [3] Diamond et Verrechia montrent que $L_t = \prod_{i=1}^{i=t} r(\mathcal{A}_i, \pi_i)$ où $r(\mathcal{A}_i, \pi_i) = \frac{\mathbb{P}[\mathcal{A}_i | V = \bar{V}, H_t]}{\mathbb{P}[\mathcal{A}_i | V = \underline{V}, H_t]}$. Si le ratio $r(\mathcal{A}_i, \pi_i) > 1$ alors l'action \mathcal{A}_i fournit une "bonne nouvelle" concernant la valeur de V . Inversement, $r(\mathcal{A}_i, \pi_i) < 1$ l'action du joueur i fournit une "mauvaise nouvelle" concernant V . Enfin, si $r(\mathcal{A}_i, \pi_i) = 1$ l'action du joueur i ne procure aucune information sur la valeur de V . La proposition 3 est une conséquence directe du lemme que nous allons à présent démontrer:

Lemme C.1. Soit $\mathcal{A}_i \in \{buy, sell, notrade\}$, étant donné les hypothèses sur u on a :

1. $\frac{1-p}{p} < r(\mathcal{A}_i, \pi_i) < \frac{p}{1-p}$
2. S'il existe deux voisinages \mathcal{N} et \mathcal{N}' de $\frac{q}{2}$ et $-\frac{q}{2}$ respectivement, tel que $F((x, m)|x \in w) = F((x, m)|x \in w') = 0$, Alors il existe $\lambda \in (0, 1)$ tel que si $\pi_t \notin (\lambda, 1 - \lambda)$, $r(\mathcal{A}_i, \pi_i) = 1$.
3. Si F est une loi continue, Alors $\lim_{\pi_t \rightarrow 1} r(\mathcal{A}_i, \pi_i) = \lim_{\pi_t \rightarrow 0} r(\mathcal{A}_i, \pi_i) = 1$

Preuve du lemme C.1. Nous montrerons le lemme C.1 exclusivement en considérant des ordres d'achat.

1. Soit $\mathcal{A}_t = buy$, alors par des calculs identiques à ceux effectués dans la preuve du lemme 2.3 on a :

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}_t | V = \bar{V}, H_t] = pF(\Phi(\pi_t^h, A_t)) + (1 - p)F(\Phi(\pi_t^l, A_t))$$

On en déduit

$$r(\mathcal{A}_t, \pi_t) = \frac{pF(\Phi(\pi_t^h, A_t)) + (1 - p)F(\Phi(\pi_t^l, A_t))}{(1 - p)F(\Phi(\pi_t^h, A_t)) + pF(\Phi(\pi_t^l, A_t))} \quad (4)$$

$r(\mathcal{A}_t, \pi_t)$ est maximal quand $F(\Phi(\pi_t^h, A_t)) = 1$ et $F(\Phi(\pi_t^l, A_t)) = 0$ et atteint $\frac{1-p}{p}$. Inversement, elle est minimale quand $F(\Phi(\pi_t^h, A_t)) = 0$ et $F(\Phi(\pi_t^l, A_t)) = 1$ et atteint $\frac{p}{1-p}$. Or si les traders étaient neutres au risque, ils achèteraient uniquement si le signal est positif et refuserait sinon on aurait donc $r(\mathcal{A}_t, \pi_t)$ égal à $\frac{p}{1-p}$. ce la montre que la présence d'agent averses au risque réduit la quantité d'information transmise par l'émission d'un ordre d'achat.

2. Dans le sillage de Lovo et Descamps dans [5] nous donnons l'intuition de la preuve avant de la formaliser rigoureusement. Si la loi de la composition du portefeuille des traders est différente de $\frac{q}{2}$ et $-\frac{q}{2}$ alors pour toute croyance π_t proche de 0 ou 1, les traders agissent sans prendre en considération leur signal. On a donc $A_t = B_t = v(\pi_t) \Rightarrow r(\mathcal{A}_t, \pi_t) = 1$.

Preuve formelle:

Par hypothèse il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{P}[(x, m)|x \in (-\delta - \frac{q}{2}, \delta - \frac{q}{2})] = 0$
Comme $\beta(1, -\frac{q}{2}, m) = \bar{V}$, d'après le lemme 2.2, on déduit qu'il existe $\nu_\delta > 0$ tel que pour tout x ,

$$\beta(1, x, m) \notin (\bar{V} - \nu_\delta, \bar{V} + \nu_\delta)$$

. d'après la continuité de β par rapport à π aussi démontrée dans le lemme 2.2, on déduit qu'il existe $\lambda_\beta > 0$ tel que pour tout $\pi \in (1 - \lambda_\beta, 1)$ on a $\beta(\pi, x, m) \notin (\bar{V} - \nu_\delta, \bar{V} + \nu_\delta)$.

Cela implique soit $\beta(\pi^h, x, m)$ et $\beta(\pi^l, x, m)$ sont inférieurs $\bar{V} - \nu_\delta$ soit $\beta(\pi^h, x, m)$ et $\beta(\pi^l, x, m)$ sont supérieurs à $\bar{V} + \nu_\delta$. En effet, quand π est proche de 1 on d'après le lemme B.1 on a $\pi^h \simeq \pi^l$ et donc par continuité de β on obtient $\beta(\pi^h, x, m) \simeq \beta(\pi^l, x, m)$. On ne peut donc avoir $\beta(\pi^h, x, m) > \bar{V} + \nu_\delta$ et $\beta(\pi^l, x, m) < \bar{V} - \nu_\delta$ ou l'inverse.

À présent, on rappelle que $v(1) = \bar{V}$ et $v(\pi_t^l) < A_t < v(\pi_t^h)$. Ainsi ν_δ peut être choisi de sorte que $A_t \in (\bar{V} - \nu_\delta, \bar{V} + \nu_\delta)$. Ainsi pour presque tout x les agents décident soit d'acheter soit de ne rien faire. Les actions des traders ne sont donc pas informatives et donc $A_t = v(\pi_t)$.

3. Soit $\mathcal{A}_t = buy$. On rappelle que $\phi(\pi, A) = \{(x, m) | \beta(\pi, x, m) \geq A\}$ soit A' tel que $A' \leq A$ on a donc $\phi(\pi, A) \subseteq \phi(\pi, A')$ et . Donc si un agent achète à un prix égale à A , il achète aussi pour un prix égal à A' . De plus, d'après le lemme 2.3 on a $v^l(\pi_t) \leq A_t \leq v^h(\pi_t)$ ainsi en considérant l'équation 4 on a :

$$\begin{aligned} \frac{pF(\Phi(\pi_t^h, v^h(\pi_t))) + (1-p)F(\Phi(\pi_t^l, v^h(\pi_t)))}{(1-p)F(\Phi(\pi_t^h, v^l(\pi_t))) + pF(\Phi(\pi_t^l, v^l(\pi_t)))} &\leq r(\mathcal{A}_t, \pi_t) \\ &\leq \frac{pF(\Phi(\pi_t^h, v^l(\pi_t))) + (1-p)F(\Phi(\pi_t^l, v^l(\pi_t)))}{(1-p)F(\Phi(\pi_t^h, v^h(\pi_t))) + pF(\Phi(\pi_t^l, v^h(\pi_t)))} \end{aligned}$$

Car $F(\Phi(\pi_t^h, x))$ est décroissante en x .

De plus, d'après le lemme 2.2 et par continuité de F on déduit que quand π_t converge vers 0 ou 1, les bornes de $r(\mathcal{A}_t, \pi_t)$ convergent vers

$$\frac{F(\{(x, m) | x < -\frac{q}{2}\})}{F(\{(x, m) | x < -\frac{q}{2}\})} = 1$$

. La prise de décisions des traders ne donnent aucune information sur la valeur de V , limitant ainsi l'effcience de marché.

□

□

References

- [1] Pierre-Marie Baudonnière. *Miétisme et imitation: Un exposé pour comprendre, un essai pour réfléchir*, volume 1 of 1. Flammarion, 3 edition, 1 1998.
- [2] P.Zemsky C. Avery. Multidimensional uncertainty and herd behavior in financial markets. *The American Economic Review*, 88(4), September 1998.
- [3] R.E.Verrechia D.Diamond. Constraints on short-selling and asset price adjustment to private information. *Journal of Financial Economics*, 18(2), Mai 1987.
- [4] P. Milgrom Glosten L. Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders. *Journal of Financial Economics*, 14(5), March 1985.
- [5] S.Lovo J-P.Descamps. Risk aversion and herd behavior in financial markets. *The American Economic Review*, Mai 2002.
- [6] Ivo Welch Sushil Bikhchandani, David Hirshleifer. A theory of fads, fashion, custom, and cultural change as informational cascades. *Journal of Political Economy*, 100, Oct. 1992.