

# Etude de la variété hypercubique

William Sarem

2019

## Présentation et remerciements

Ce mémoire a été réalisé sous la direction de Nicolas Bergeron et Nicolas Tholozan, au sein du Département de Mathématiques et Application de l'ENS Paris, dans le cadre de la troisième année de licence du Cycle Pluridisciplinaire d'Études Supérieures (CPES).

Je les remercie tout particulièrement du temps qu'ils ont bien voulu m'accorder, et de leur disponibilité. Je remercie également Guillaume Vigerat pour les précieux conseils qu'il m'a donnés tout au long de l'année.

Nous avons étudié à partir du site <http://analysis-situs.math.cnrs.fr> [1] et du livre Algebraic Topology de Hallen Hatcher [2]

## Introduction

La variété hypercubique a été introduite en tant qu'exemple par Henri Poincaré dans l'Analysis Situs, afin de tester les théories de l'homotopie et de l'homologie qu'il était alors en train de développer. Nous avons repris son exemple pour nous exercer à calculer quelques invariants de topologie sur ce cas concret. Cette variété s'étudie de la même façon que la sphère d'homologie de Poincaré, mais les calculs sont plus simples à mener et à présenter. Bien souvent, des résultats théoriques puissants existent qui permettent d'éviter ces calculs, et nous les mentionnerons à plusieurs reprises, mais nous avons pris le parti de ne pas nous en servir.

Nous commençons par présenter la variété hypercubique, d'abord comme un recollement du cube puis comme un quotient de  $\mathbb{S}^3$ . Dans la deuxième partie, nous calculons son groupe fondamental à partir des lacets, et dans la troisième partie nous calculons ses groupes d'homologie via une décomposition en cellules.

## 1 La variété hypercubique $V$

### 1.1 Une première présentation : $V$ vu comme recollement d'un cube

Soit  $\mathcal{P}$  un polyèdre convexe compact. On considère un recollement des faces de ce polyèdre, c'est-à-dire qu'on souhaite étudier l'espace topologique  $\mathcal{P}/\sim$  où  $\sim$  est une relation d'équivalence qui n'identifie un point dans l'intérieur de  $\mathcal{P}$  qu'avec lui-même, et qui identifie des faces deux à deux.

Nous étudions ici un exemple de recollement du cube, la variété hypercubique, notée  $V$  dans tout le document.

**Définition 1.1.** *La variété hypercubique est l'espace topologique obtenu en identifiant deux à deux les faces opposées d'un cube  $C$  par une translation suivie d'une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens direct.*

Essayons de mieux visualiser cette définition. On part d'un cube. Les points qui sont à l'intérieur du cube ne sont pas impactés par ce recollement. Par contre chaque point qui se trouve à l'intérieur d'une face est identifié à un unique point situé sur la face opposée, après rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Sur la figure 1 qui tâche de représenter les recollements, on a représenté en bleu deux points identifiés.

On peut également essayer de se représenter ce que devient un objet qui passe par une des faces. De même que dans le jeu-vidéo Pac-Man, cet objet réapparaît de l'autre côté de l'hypercube, sur la face opposée. Mais la différence est qu'il réapparaît tourné d'un angle  $\frac{\pi}{2}$ .

Enfin, il est possible de visualiser le recollement d'une paire de faces (mais pas des trois en même temps!). Pour le recollement des faces de gauche et de droite par exemple, on peut imaginer que ces deux faces commencent par s'éloigner l'une de l'autre puis dévient vers nous, comme si elles suivaient la trajectoire d'un tore. Mais juste avant de se recoller pour former effectivement un tore (plein), l'une des deux faces se tord d'un angle  $\frac{\pi}{2}$  et les faces se recollent après cette torsion. Il faut ensuite tâcher d'imaginer que le même phénomène se produit pour les trois paires de faces.

On voit que l'espace topologique obtenu est « sans bord » : informellement, on peut toujours avancer dans une direction et rester dans l'hypercube. Par conséquent, la notion de sommet, d'arête ou de face n'a pas de sens intrinsèque pour la variété hypercubique. Mais le recollement qu'on a défini induit naturellement une cellulation de  $V$ , dont on peut compter les éléments :

- Le cube possède une 3-cellule (l'intérieur du cube) qui est envoyée sur une 3-cellule de l'hypercube.
- Il possède également six faces, mais puisqu'on les identifie deux à deux, il n'en reste plus que trois au quotient.
- Le cube a douze arêtes. Ce recollement identifie les arêtes trois par trois, comme le montre la figure, où l'on a représenté dans une même couleur toutes les arêtes qui sont identifiées entre elles. Il en reste donc quatre.
- Le cube a huit sommets, et le recollement identifie les sommets quatre par quatre. Il en reste donc deux.

Cette description d'une cellulation de l'hypercube nous sera très utile par la suite.

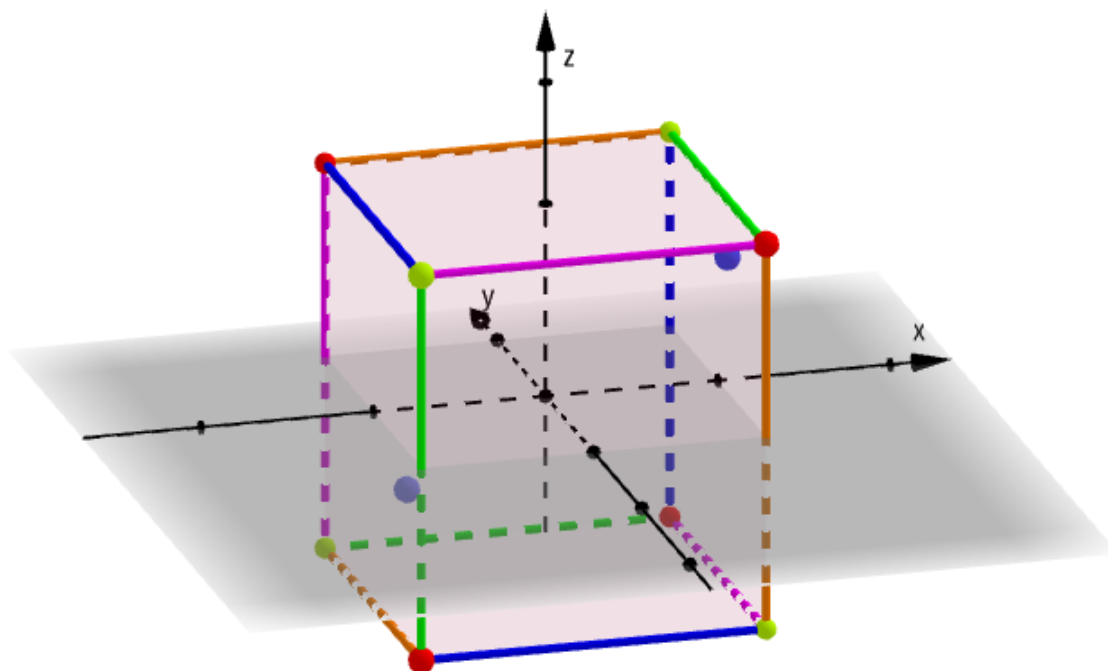


FIGURE 1: La variété hypercubique

On peut écrire algébriquement les identifications de faces, en explicitant la translation suivie de la rotation. On obtient les applications décrites dans les deux premières colonnes de la figure 2 (page 4)

## 1.2 $V$ vu comme domaine fondamental d'une action de $Q_8$

$Q_8$  est le sous-groupe de  $SU(2)$  à huit éléments  $\{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ , où :

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Il vérifie de plus les relations suivantes :

$$\begin{aligned} I^2 &= J^2 = K^2 = -\mathbb{1} \\ IJ &= -JI = K \\ JK &= -KJ = I \\ KI &= -IK = J \end{aligned}$$

Nous allons maintenant proposer un autre point de vue sur  $V$ . Le groupe  $SU(2)$ , donc  $Q_8$ , agit naturellement sur  $\mathbb{S}^3$  (vue comme boule unité de  $\mathbb{C}^2$ ). Nous allons montrer que cette action admet comme domaine fondamental un cube, et que  $\mathbb{S}^3/Q_8 \simeq V$ . Nous allons en fait considérer une action légèrement différente, en « cubulant »  $\mathbb{S}^3$ , c'est-à-dire en considérant une action sur  $\mathcal{K} = \partial([-1, 1]^4)$ , qui lui est homéomorphe. Ceci nous permettra de décrire de façon tout à fait explicite un domaine fondamental.

On identifie dans la suite un élément  $X = (x, y, z, t) \in \mathcal{K}$  avec le vecteur  $\begin{pmatrix} x + iy \\ z + it \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{C}^2$ . On définit alors, pour  $M \in Q_8$ ,  $M \cdot X := MX$ .

Si  $M$  est une matrice de  $SU(2)$ , il n'est pas vrai que  $MX \in \mathcal{K}$  dès lors que  $X \in \mathcal{K}$ . C'est par contre le cas pour  $M \in Q_8$ . Par exemple, si  $X = (1, y, z, t) \in \mathcal{K}$  alors  $I \cdot X = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + iy \\ z + it \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + i \\ t - iz \end{pmatrix} \in \mathcal{K}$  (car  $\begin{pmatrix} -y + i \\ t - iz \end{pmatrix}$  est identifié à l'élément  $(-y, 1, t, -z)$  qui est bien dans  $\mathcal{K}$ ).

Afin d'obtenir un domaine fondamental pour cette action, on écrit

$$\partial([-1, 1]^4) = C_1^{(1)} \cup C_{-1}^{(1)} \cup C_1^{(2)} \cup C_{-1}^{(2)} \cup C_1^{(3)} \cup C_{-1}^{(3)} \cup C_1^{(4)} \cup C_{-1}^{(4)}$$

où  $C_\epsilon^{(l)} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [-1, 1]^4 \mid x_l = \epsilon\}$

On montre facilement les égalités suivantes :

- $I \cdot C_1^{(1)} = C_1^{(2)}$
- $J \cdot C_1^{(1)} = C_{-1}^{(3)}$
- $K \cdot C_1^{(1)} = C_1^{(4)}$
- $(JI) \cdot C_1^{(1)} = (-K) \cdot C_1^{(1)} = C_{-1}^{(4)}$
- $(KI) \cdot C_1^{(1)} = (-J) \cdot C_1^{(1)} = C_1^{(3)}$
- $(KJ) \cdot C_1^{(1)} = (-I) \cdot C_1^{(1)} = C_{-1}^{(2)}$
- $(I^2) \cdot C_1^{(1)} = (-\mathbb{1}) \cdot C_1^{(1)} = C_{-1}^{(1)}$

Par exemple, si  $X = (1, y, z, t) \in C_1^{(1)}$  alors on a vu que  $I \cdot X = \begin{pmatrix} -y + i \\ t - iz \end{pmatrix} \in C_1^{(2)}$  donc  $I \cdot C_1^{(1)} \subset C_1^{(2)}$ .

Réciproquement, si  $Y = (x, 1, z, t) \in C_1^{(2)}$ , alors  $Y = I \cdot X$  où  $X = (1, -x, -t, z) \in C_1^{(1)}$

$C_1^{(1)}$  contient au moins un point par orbite de l'action de  $Q_8$ , et exactement un pour tous les points intérieurs à  $C_1^{(1)}$  (puisque ces points-là n'appartiennent à aucun autre  $C_i^{(j)}$ ). Ceci montre que  $C_1^{(1)}$  est un domaine fondamental pour cette action.

Montrons maintenant que la relation d'équivalence sur  $C_1^{(1)}$  qui identifie les points de la frontière de  $C_1^{(1)}$  appartenant à la même orbite correspond exactement au recollement qui permet d'obtenir  $V$ . La paramétrisation  $C_1^{(1)} = \{(1, x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathcal{C}\}$  permet déjà d'identifier les deux cubes.

Il faut montrer que, si on note  $\sim$  la relation d'équivalence induite par le recollement des faces,  $(\exists M \in Q_8, y = M \cdot x) \Leftrightarrow x \sim y$ .

- A l'intérieur du cube, par définition du domaine fondamental, on a

$$\exists M \in Q_8, y = M \cdot x \Leftrightarrow x = y$$

et le recollement n'identifie aucun point à l'intérieur du cube donc

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y$$

- A la frontière du cube, la figure 2 explicite la correspondance entre les deux relations. Par exemple, pour la première ligne : les deux points  $(-1, y, z)$  et  $(1, z, -y)$  de  $\mathcal{C}$  sont identifiés par la relation  $\sim$ , et les deux points  $(1, -1, y, z)$  et  $(1, 1, z, -y)$  correspondant dans  $C_1^{(1)}$ , qui s'écrivent également comme les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1+i \\ z-iy \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1+ix \\ -1+iz \end{pmatrix}$ , sont identifiés dans  $C_1^{(1)}$  par la matrice  $I$ .

On déduit immédiatement du tableau que  $x \sim y \Rightarrow \exists M \in Q_8, y = M \cdot x$ . Pour la réciproque,  $\{I, J, K\}$  engendre  $Q_8$  et le tableau montre que  $\forall M \in \{I, J, K\}, y = g \cdot x \implies y \sim x$ . Par symétrie de la relation d'équivalence, c'est encore vrai si  $M \in \{I^{-1}, J^{-1}, K^{-1}\}$ . Maintenant si  $y = M_1 \dots M_n \cdot x$  où  $M_l \in \{I, J, K, I^{-1}, J^{-1}, K^{-1}\}$ , alors  $M_n \cdot x \sim x$  puis  $M_{n-1}M_n \cdot x \sim M_n \cdot x$  donc  $M_{n-1}M_n \cdot x \sim x$  etc. jusqu'à  $y \sim x$

Identification des faces	Application correspondante	Relation dans $Q_8$
Gauche - Droite	$(-1, y, z) \mapsto (1, z, -y)$	$\begin{pmatrix} 1+i \\ z-iy \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ y+iz \end{pmatrix}$
Arrière - Avant	$(x, 1, z) \mapsto (z, -1, -x)$	$\begin{pmatrix} 1+iz \\ -1-ix \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} 1+ix \\ 1+iz \end{pmatrix}$
Bas - Haut	$(x, y, -1) \mapsto (y, -x, 1)$	$\begin{pmatrix} 1+iy \\ -x+i \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} 1+ix \\ y-i \end{pmatrix}$

FIGURE 2: Correspondance entre les deux relations

En conclusion, on a montré que la variété hypercubique est homéomorphe au quotient de  $\partial([-1, 1]^4)$  par  $Q_8$ .

## 2 Calcul du groupe fondamental de $V$

Nous avons obtenu que  $V$  est homéomorphe au quotient de  $\mathbb{S}^3$  par  $Q_8$ . De plus l'action de  $Q_8 \subset \text{SU}(2)$  sur  $\mathbb{S}^3$  est libre, car  $\text{SU}(2)$  agit librement sur  $\mathbb{S}^3$ . Elle est de plus proprement discontinue car  $Q_8$  est fini. À partir de ces deux propriétés, en utilisant la théorie des revêtements et la simple connexité de  $\mathbb{S}^3$ , on en déduit immédiatement que :

- $V$  admet pour groupe fondamental  $Q_8$
- Le revêtement universel de  $V$  est  $\mathbb{S}^3$
- $V$  peut s'écrire comme le quotient de  $\mathbb{S}^3$  par un groupe d'isométries de  $\mathbb{S}^3$  (ce qui est important si l'on veut géométriser  $V$ )

Cela permet également de montrer que  $V$  est une variété, ce qui justifie son nom ! On aurait pu le montrer en étudiant la façon dont les voisinages des points du cube se recollent en un voisinage de  $V$ .

La description de  $V$  comme quotient de  $\mathbb{S}^3$  par  $Q_8$  est très puissante, et court-circuite l'approche du groupe fondamental par les lacets. Néanmoins, il nous semble intéressant d'étudier « à la main » la façon dont les lacets se combinent, et de voir comment on peut retrouver  $Q_8$ . C'est ce que nous faisons dans cette section. Nous commençons par trouver un ensemble de générateurs de  $\pi_1(V)$  puis des relations entre ces générateurs. Nous admettrons alors qu'il n'y en a pas d'autres, ce qui se démontre en utilisant le théorème de Van Kampen que nous n'avons pas étudié. Une partie purement algébrique permet ensuite de montrer que le groupe obtenu par générateurs et relations est isomorphe à  $Q_8$ .

### 2.0.1 Une surjection sur $\pi_1(V)$

On place le centre du cube en  $O$ , et on considère le repère orthonormé habituel, comme dans la figure 1. Pour chacun des trois axes  $x, y$  et  $z$  il existe un lacet dans  $V$  de point-base  $O$ , qui suit l'axe, passe par une face et revient par l'autre côté jusqu'au point-base. Définissons  $a$  le lacet qui suit l'axe  $x$  dans le sens de l'axe,  $b$  le lacet qui suit l'axe  $y$  mais en sens inverse (sur la figure, il commence par « se rapprocher de nous ») et  $c$  le lacet qui suit l'axe  $z$  dans le sens de l'axe.

On peut se convaincre que, à homotopie près, tout lacet non trivial peut se décomposer en produit de  $a, b, c$  et leurs inverses. En effet, informellement, l'intérieur du cube étant simplement connexe, la seule façon de n'être pas trivial consiste à passer par une face pour revenir de l'autre côté.

De façon un peu plus rigoureuse, on peut dire que, étant donné un lacet  $\gamma$ , il est possible de décomposer  $I = [0, 1]$  en sous-intervalles  $I_1 = [0 = i_0, i_1], [i_1, i_2], \dots [i_{n-1}, i_n = 1]$  de telle sorte que  $\gamma$  reste dans l'intérieur du cube sur  $]i_{l-1}, i_l[$ . Dans ce cas, le lacet passe par une face  $F_l$  lorsque  $t = i_l$ . Si on note  $x_l \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, c^{\pm 1}\}$  la boucle qui passe par la face  $F_l$ , alors  $\gamma$  est homotope au lacet  $x_1 \dots x_l$ , qui est ce qu'on voulait montrer. Le problème avec cet argument est que rien n'interdit à  $\gamma$  d'osciller une infinité de fois au voisinage d'une face. Par conséquent, la subdivision de  $[0, 1]$  n'est pas tout le temps finie. Il faut alors invoquer un argument de transversalité - que nous admettons - qui consiste à dire qu'il est toujours possible de déformer un peu  $\gamma$  en un lacet  $\gamma'$  qui lui est homotope et qui est transverse, c'est-à-dire qu'il arrive et repart sur les faces orthogonalement à celles-ci. L'argument esquissé ci-dessus fonctionne alors pour  $\gamma'$  ce qui permet cette fois de conclure :

**Proposition 2.1.** *Il y a une surjection de  $\langle a, b, c \rangle$  sur  $\pi_1(V)$ .*

On peut remarquer que le voisinage d'une arête, pour un recollement de polyèdre, est toujours homéomorphe à un cylindre plein : en effet, on peut toujours choisir pour voisinage des arêtes des secteurs angulaires (parts de gâteau) qui se recollent topologiquement en un cylindre. Si l'on tourne autour de chacune des quatre arêtes du cube, on obtient un lacet qui fait le tour de ce cylindre, et qui peut par conséquent se rétracter en le lacet constant. Ainsi, nous disposons, dans  $\pi_1(V)$ , des quatre relations :

arête	relation
bleue	$acb = e$
orange	$ac^{-1}b^{-1} = e$
rose	$ab^{-1}c = e$
verte	$abc^{-1} = e$

Par exemple, pour la première ligne du tableau, on peut suivre le lacet  $acb$  sur la figure 1 et voir qu'il tourne autour des trois arêtes bleues représentées, c'est-à-dire autour de l'unique arête bleue de  $V$ .

Combiné à la proposition précédente, on obtient donc :

**Proposition 2.2.** *Il y a une surjection de  $G = \langle a, b, c \mid acb, ac^{-1}b^{-1}, ab^{-1}c, abc^{-1} \rangle$  sur  $\pi_1(V)$*

Nous admettons qu'il n'y a pas d'autres relations dans  $\pi_1(V)$ , autrement dit que la surjection est un isomorphisme. Il ne saute pas aux yeux que ce groupe est isomorphe à  $Q_8$ , et c'est ce que nous allons montrer dans la suite.

---

1. Nous notons  $G = \langle S \mid R \rangle$  le groupe engendré par  $S$  et qui vérifie les relations  $R$ .

## 2.0.2 Etude du groupe $G \simeq \pi_1(V)$

On veut identifier  $a, b$  et  $c$  dans  $G$  à  $i, j$  et  $k$  dans  $Q_8$ .

Soit  $\phi$  l'application définie de  $\{a, b, c\}$  dans  $Q_8$  qui envoie  $a, b, c$  sur  $i, j, k$ , respectivement <sup>2</sup>.

$\phi$  s'étend en un morphisme  $\Phi$ , car les images des éléments de  $\{a, b, c\}$  satisfont aux relations qui définissent  $G$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\phi(a)\phi(c)\phi(b) &= ikj &= 1 \\ \phi(a)\phi(c)^{-1}\phi(b)^{-1} &= ik^{-1}j^{-1} &= 1 \\ \phi(a)\phi(b)^{-1}\phi(c) &= ij^{-1}k &= 1 \\ \phi(a)\phi(b)\phi(c)^{-1} &= ijk^{-1} &= 1\end{aligned}$$

Comme  $i, j$  et  $k$  engendrent  $Q_8$ , on en déduit en particulier que  $\Phi$  est surjectif.

Montrons que  $\Phi$  est en fait un isomorphisme.  $Q_8$  a huit éléments, donc il suffit de montrer que  $|G| \leq 8$ .

Pour cela, nous commençons par déduire de la présentation de  $G$  quelques formules de calcul supplémentaires. On a les formules suivantes :

- $\diamond a = bc$  car  $ac^{-1}b^{-1} = e$
- $\diamond b = ca$  car  $ab^{-1}c = e$
- $\diamond c = ab$  car  $abc^{-1} = e$
- $\diamond a^{-1} = cb$  car  $acb = e$
- $\diamond b^{-1} = ac$  car  $acb = e$
- $\diamond c^{-1} = ba$  car  $acb = e$
- $a^2 = b^2 = c^2$

Pour la dernière formule :

$$\begin{aligned}a^2 &= a(bc) = (ab)c = c^2 \\ b^2 &= (ca)b = c(ab) = c^2\end{aligned}$$

Montrons maintenant que  $|G| \leq 8$ . Soit  $w$  un mot en  $a, b, c$  et leurs inverses. Posons  $\pi(w)$  sa valeur dans  $G$ , et montrons que  $\pi(w) \in \{a, b, c, ba, ca, cb, a^2, e\}$ . Soit  $E$  ce dernier ensemble.

Quitte à remplacer  $a^{-1}, b^{-1}$  et  $c^{-1}$  par respectivement  $cb, ca$  et  $ba$  pour obtenir un nouveau mot  $w'$  tel que  $\pi(w) = \pi(w')$ , on peut supposer que  $w$  est un mot en  $a, b, c$  sans leurs inverses. Notons alors  $w = v_1 \cdots v_n$  où  $v_l \in \{i, j, k\}$ .

- Si  $n = 1$ , alors  $\pi(w) \in \{e, a, b, c\} \subset E$ .
- Si  $n = 2$ , alors  $\pi(w) \in \{ab = c, ac = b, bc = a, ba, ca, cb, a^2 = b^2 = c^2\} \subset E$
- Si  $n = 3$ , il y a plusieurs cas à considérer :
  - $\diamond$  Si deux lettres consécutives sont égales,  $w = f^2g$  (ou  $w = gf^2$  qui se traite de même) alors comme  $a^2 = b^2 = c^2$  on peut remplacer  $f$  par  $\tilde{f}$  telle que  $\tilde{f}g$  soit dans  $\{bc = a, ca = b, ab = c\}$ . On a alors  $f^2g = \tilde{f}^2g = \tilde{f}(\tilde{f}g)$ . Comme  $\tilde{f}g$  se simplifie un une seule lettre, on obtient un mot en deux lettres, ce qui nous ramène au cas  $n = 2$ .
  - $\diamond$  Si le mot commence ou finit par  $\{bc, ca, ab\}$  alors on peut simplifier ces deux lettres et directement se ramener au cas  $n = 2$
  - $\diamond$  Sinon les seuls mots restants sont  $acb, cba$  et  $bac$  qui sont tous les trois égaux à  $e$  en vertu des formules énoncées plus haut.
- Si  $n > 3$  on écrit  $w = w_1(fgh)w_2$  puis on réduit  $fgh$  comme ci-dessus, et l'on réitère jusqu'à obtenir un mot de longueur  $n = 3$  : on conclut d'après le cas précédent.

On a donc montré que  $\pi_1(V) \simeq Q_8$ .

---

2. Si l'on avait défini  $b$  dans le sens de l'axe  $y$ , il aurait fallu envoyer  $b$  sur  $j^{-1}$

### 3 Calcul des groupes d'homologie de $V$

Nous nous proposons ici de calculer à la main les groupes d'homologie de  $V$ , à travers la théorie de l'homologie cellulaire. Mais avant cela, remarquons qu'il est possible de les obtenir en utilisant des résultats théoriques. Le théorème d'Hurewicz dit que le premier groupe d'homologie est l'abélianisé du groupe fondamental. Un calcul élémentaire sur les générateurs et relations de  $Q_8$  montre que son abélianisé est  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ . On en déduit donc que  $H_1(V) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ . On peut alors déduire de la dualité de Poincaré tous les autres groupes d'homologie. Par exemple, d'une part la partie sans torsion de  $H_2(V)$  est isomorphe à la partie sans torsion de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ , qui est nulle, d'autre part la torsion de  $H_2(V)$  est celle de  $H_0(V)$  qui est également nulle. Donc  $H_2(V) = 0$ .

Pour calculer les groupes d'homologie de  $V$ , nous nommons et orientons comme sur la figure 3 les sommets, arêtes et faces de la cellulation introduite au début du mémoire : Les espaces des chaînes

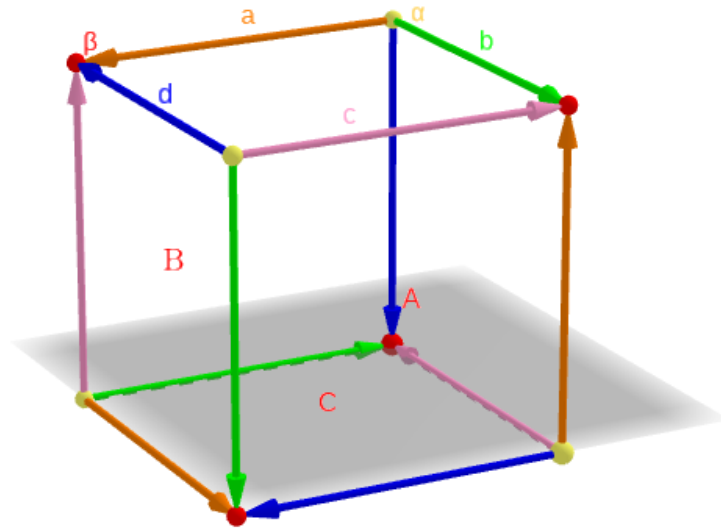


FIGURE 3: Orientation du squelette du cube

sont alors les suivants :

- $C_0 = \mathbb{Z}^2$  engendré par  $\alpha$  et  $\beta$
- $C_1 = \mathbb{Z}^4$  engendré par  $a, b, c$  et  $d$
- $C_2 = \mathbb{Z}^3$  engendré par  $A, B$  et  $C$  (orientées dans le sens de l'arête  $c$ )
- $C_3 = \mathbb{Z}$  engendré par l'unique 3-cellule  $\mathcal{A}$

Et les applications bords sont définies sur les espaces des chaînes par leurs valeurs sur les bases :

$\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$	$\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$	$\partial_3 : C_3 \rightarrow C_2$
$a \mapsto \beta - \alpha$	$A \mapsto c - a + d - b$	$\mathcal{A} \mapsto A + B + C - A - B - C = 0$
$b \mapsto \beta - \alpha$	$B \mapsto c - d + b - a$	
$c \mapsto \beta - \alpha$	$C \mapsto c - b + a - d$	
$d \mapsto \beta - \alpha$		

Une fois toutes ces informations calculées, il devient possible de calculer les groupes d'homologie de  $V$  :

- $H_0(V) = C_0 / \text{Im } \partial_1 = \langle \alpha, \beta \rangle / \langle \beta - \alpha \rangle = \langle \alpha, \beta - \alpha \rangle / \langle \beta - \alpha \rangle \simeq \langle \alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}$
- Déterminons  $\ker \partial_2$  :

$$k_1 A + k_2 B + k_3 C \in \ker \partial_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_3 = k_1 + k_2 \\ k_2 = k_1 + k_3 \\ k_1 = k_2 + k_3 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_3 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc  $\ker \partial_2 = \{0\}$  ce qui implique  $H_2(V) = \ker \partial_2 / \text{Im } \partial_3 = \{0\}$

- $H_3(V) = \ker \partial_3 = C_3 = \mathbb{Z}$
- Le calcul de  $H_1(V)$  est un peu plus complexe. On a  $\ker \partial_1 = \langle a - b, b - c, c - d \rangle$ . Posons  $(m_1, m_2, m_3) = (a - b, b - c, c - d)$  une base de  $\ker \partial_1$ . La matrice de l'application  $\partial_2$  de la base  $(A, B, C)$  de  $C_2$  vers la base  $(m_1, m_2, m_3)$  de  $\ker \partial_1$  est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Par exemple,  $\partial_2(A) = c - a + d - b = -1(a - b) - 2(b - c) - 1(c - d)$ )

Le quotient  $\ker \partial_1 / \text{Im } \partial_2$  est le  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par les générateurs  $m_1, m_2, m_3$  et qui satisfait les relations  $MA = MB = MC = 0$ . Pour déterminer explicitement ce groupe, nous allons mettre cette matrice sous sa forme normale de Smith, en appliquant le pivot de Gauss. Les opérations sur les colonnes de la matrice correspondent à des changement de générateurs, et les opérations sur les lignes à des opérations sur les relations. Nous nous inspirons de la présentation de [3] (p.9).

matrice	générateurs	relations
$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$m_1, m_2, m_3$	$-m_1 - m_2 + m_3 = 0$ $-2m_1 = 0$ $-m_1 + m_2 + m_3 = 0$
$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$m_1, m_2, m_3$	$-m_1 - m_2 + m_3 = 0$ $2m_2 + 2m_3 = 0$ $2m_2 = 0$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$m_1, m_2 - m_1, m_3 - m_1$	$-m_1 = 0$ $2(m_2 - m_1) - 2(m_3 - m_1) = 0$ $2m_2 = 0$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$m_1, m_2 - m_1, m_3 - m_1$	$-m_1 = 0$ $2(m_2 - m_1) - 2(m_3 - m_1) = 0$ $2m_3 = 0$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$m_1, m_2 - m_1, (m_3 - m_1) + (m_2 - m_1)$	$-m_1 = 0$ $2(m_2 - m_1) - 2(m_3 - m_1) = 0$ $2[(m_3 - m_1) + (m_2 - m_1)] = 0$

On en déduit que dans la base  $(e_1, e_2, e_3) = (m_1, m_2 - m_1, (m_3 - m_1) + (m_2 - m_1))$  de  $\ker \partial_1$ , le quotient  $H_1(V) = \ker \partial_1 / \text{Im } \partial_2$  s'écrit :

$$H_1(V) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle / \langle e_1, 2e_2, 2e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle / \langle 2e_2, 2e_3 \rangle = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

Nous pouvons remarquer que la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $V$ , vue comme la somme alternée des nombres de Betti de  $V$  vaut  $\chi(V) = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$ . On retrouve que  $\chi(V)$  est également la somme alternée des nombres de  $k$ -cellules d'une cellulation de  $V$ , qui vaut  $2 - 4 + 3 - 1 = 0$ .

En fait, on peut même directement déduire de ce calcul élémentaire que  $V$  est une variété. Il existe en effet un critère général pour les recollements de polyèdres qui dit que, pour que l'espace recollé soit une variété, il faut et il suffit que sa caractéristique d'Euler-Poincaré soit nulle. La dualité de Poincaré montre que c'est nécessaire. Nous esquissons ici la démonstration de la réciproque :

Un point situé à l'intérieur d'une face ou à l'intérieur d'une boule admet, quelque soit le recollement et le polyèdre  $\mathcal{P}$  de départ, un voisinage homéomorphe à une boule de  $\mathbb{R}^3$ , comme recollement de deux demi-boules ou bien de plusieurs secteurs angulaires. Seuls les sommets du polyèdres peuvent poser problème. Pour qu'ils admettent tous un voisinage homéomorphe à une boule, il suffit de montrer que



pour  $\epsilon$  suffisamment petit, la frontière du recollement des boules  $B(x_i, \epsilon)$  pour tous les  $x_i$  situés dans la classe d'équivalence du sommet est une sphère, ce qui équivaut à dire que sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 2. On sait qu'elle est toujours inférieure ou égale à 2. Par ailleurs, en considérant une triangulation de  $\mathcal{P}$ , on obtient, en notant  $[\mathcal{P}]$  l'espace quotient :

$$\sum_{x \text{ sommet}} \chi(S_x) = 2s - 2\chi([\mathcal{P}])$$

Cette formule permet de montrer que l'espace obtenu après recollement est une variété si et seulement si sa caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle.

## Conclusion

La variété hypercubique est un exemple intéressant sur lequel étudier les notions élémentaires de topologie algébrique, car elle est assez riche, et les calculs à mener restent raisonnables. Plus que les résultats obtenus, nous retenons le plan d'étude de la variété hypercubique, qui se généralise à d'autres exemples de recollements de polyèdres. Durant notre stage, nous avons également étudié la variété dodécaédrique de Poincaré, qui peut se définir comme l'espace obtenu en recollant les faces opposées d'un dodécaèdre après une rotation d'angle  $\frac{2\pi}{5}$ . L'étude se fait selon le même plan, que nous résumons ici en indiquant les résultats obtenus pour cette seconde variété :

- Définition et description d'une cellulation. En particulier, on peut calculer sa caractéristique d'Euler-Poincaré et en déduire que la variété dodécaédrique est bien une variété, d'après le critère que nous venons d'esquisser.
- Un autre point de vue : on peut écrire la variété dodécaédrique comme le quotient de la sphère  $\mathbb{S}^3$  par un sous-groupe de  $SU(2)$ , appelé groupe des icosions et comportant 120 éléments (c'est une extension d'ordre 2 du groupe alterné  $\mathcal{A}_5$ ).
- Calcul du groupe fondamental par l'approche des lacets : on trouve un groupe à 6 générateurs (en passant par les faces du dodécaèdre) et à 10 relations (en tournant autour des arêtes). On peut alors retrouver le groupe des icosions.
- Calcul des groupes d'homologie : on obtient, en effectuant des calculs similaires, mais plus longs, que  $H_0 = H_3 = \mathbb{Z}$  et que  $H_1 = H_2 = 0$ . Ce résultat est remarquable et bien plus intéressant que dans le cas de la variété hypercubique, car il montre que la variété dodécaédrique a les mêmes groupes d'homologie que la sphère  $\mathbb{S}^3$ , alors qu'elle ne lui est pas homéomorphe (puisque les groupes fondamentaux sont différents).

## Références

- [1] Henri Paul de Saint Gervais. Analysis situs. <http://analysis-situs.math.cnrs.fr>, 2016.
- [2] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*.
- [3] Patrick J. Morandi. The Smith normal form of a matrix. <http://sierra.nmsu.edu/morandi/notes/SmithNormalForm.pdf>.