

# Mémoire de recherche CPES

Nicolas Schreuder

Sous la direction de Y. Viossat

5 juillet 2015



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Outils mathématiques</b>	<b>4</b>
2.1	Premières définitions et propriétés . . . . .	4
2.2	Continuité des attracteurs . . . . .	5
2.3	Théorème de Poincaré-Bendixson . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Notations</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Vue d'ensemble de la littérature actuelle</b>	<b>9</b>
4.1	Construction et définition d'une dynamique d'évolution . . . . .	9
4.2	Exemples de dynamiques d'imitation et premiers résultats . . . . .	10
4.2.1	Dynamiques monotones . . . . .	11
4.2.2	Jeu à une population . . . . .	15
4.3	Exemples de dynamiques innovantes . . . . .	15
4.3.1	Dynamique de meilleure réponse . . . . .	16
4.3.2	Dynamique de BNN . . . . .	16
4.3.3	Dynamique de Smith . . . . .	16
4.4	Quelques résultats sur les dynamiques innovantes . . . . .	17
4.4.1	Premier théorème (BNN et Smith) . . . . .	17
4.4.2	Deuxième théorème . . . . .	19
4.5	Conclusions actuelles . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Amélioration des résultats actuels</b>	<b>23</b>

# 1 Introduction

Dans ce mémoire nous nous penchons sur des questions liées à la théorie des jeux d'évolution. Nous considérons un ensemble d'individus qui forment une population, qui interagissent et nous nous intéressons à l'évolution de leurs comportements.

L'évolution de ces comportements est en général modélisée par une équation différentielle et les questions habituelles sont de savoir, dans un tel jeu, quel lien il y a entre ce que l'on peut tirer de la dynamique qui anime ce jeu et les concepts statiques de théorie des jeux ; y a-t-il convergence au fil du temps ? Si oui, est-ce vers un équilibre de Nash ? Les stratégies strictement dominées subsistent-elles ? C'est sur cette dernière question que nous allons nous concentrer.

Après avoir introduit les outils mathématiques et les notations dont nous allons avoir besoin, nous présenterons les avancements actuels sur ces questions puis nous tenterons d'étendre ces résultats.

## 2 Outils mathématiques

Etant donné que les équations différentielles que nous allons considérer ne sont pas linéaires, nous ne pouvons les interpréter que qualitativement. Nous présentons dans cette partie les théorèmes et propositions dont nous aurons besoin plus tard, ils appartiennent tous à la théorie des équations différentielles ordinaires.

Nous renvoyons le lecteur à [6] pour plus de détails sur les outils issus de la théorie des équations différentielles utiles à la théorie des jeux d'évolution.

### 2.1 Premières définitions et propriétés

Pour commencer, considérons une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) \quad (1)$$

avec  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  supposée  $\mathcal{C}^1$  ou Lipschitz pour que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.

**Définition 1.** On appelle flot associé à l'équation (1) la fonction  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui à chaque couple  $(t, X_0)$  associe la valeur au temps  $t$  de la solution de l'équation (1) qui a pour condition initiale  $X_0$ .

**Propriétés.**

- .  $\phi(0, X_0) = X_0$
- .  $\phi(t, \phi(s, X_0)) = \phi(t + s, X_0)$

**Définition 2.** Soit  $U$  un ensemble et  $\phi$  un flot défini sur  $\mathbb{R}^+ \times U$ . On appelle ensemble  $\omega$ -limite de  $U$  l'ensemble :

$$\omega(U) = \bigcap_{t>0} \overline{\phi^{(t,\infty)}(U)}$$

C'est l'ensemble vers lequel converge les solutions partant de  $U$ , ce peut être un cercle par exemple mais aussi des ensembles bien plus compliqués à décrire.

**Définition 3.** On appelle bassin d'attraction pour un ensemble fermé  $A$  l'ensemble  $\{X_0, \omega(X_0) \subseteq A\}$ . Pour tout ouvert  $U$  tel que  $A \subset U \subset \bar{U} \subset B(A)$ .

De plus, si il existe un  $t > 0$  tel que  $\phi^t(\bar{U}) \subset U$  pour un certain ouvert  $U$  alors  $\omega(U)$  est un attracteur (notion que nous définissons en dessous) et  $U$  est appelé zone piège.

**Définition 4.** Un ensemble  $A$  est un attracteur si son bassin d'attraction est un voisinage de  $A$ .

## 2.2 Continuité des attracteurs

On considère maintenant une famille d'équations différentielles  $\dot{x} = V_\epsilon(x)$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $(\epsilon, x) \mapsto V_\epsilon(x)$  est continue. Alors  $(\epsilon, t, x) \mapsto \Phi_\epsilon^t(x)$  est continue. Nous avons besoin du lemme suivant pour énoncer notre premier théorème important :

**Lemme 1.** Soit  $A$  un attracteur pour un flot  $\Phi$  avec pour bassin d'attraction  $B(A)$ . Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux ouverts tels que  $A \subset U_1 \subseteq U_2 \subseteq \bar{U}_2 \subseteq B(A)$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$  assez petit, il existe un attracteur  $A_\epsilon$  de  $\Phi_\epsilon$  admettant  $B(A_\epsilon)$  comme bassin d'attraction tel que  $A_\epsilon \subset U_1$  et  $U_2 \subset B(A_\epsilon)$ .

**Preuve.** Comme  $A$  est un attracteur,  $\omega(\bar{U}_2) = A$  et  $A \subset U_1$ , il existe un  $T > 0$  tel que  $\Phi^t(\bar{U}_2) \subset U_1$  pour tout  $t \geq T$ . Par le fait que le flot dépend continûment de  $\epsilon$  et par compacité de  $\Phi^T(\bar{U}_2)$ , on a  $\Phi_\epsilon^T(\bar{U}_2) \subset U_1 \subseteq U_2$  pour  $\epsilon$  assez petit.

Par conséquent  $U_2$  est une zone piège pour le flot  $\Phi_\epsilon$  et  $A_\epsilon = \omega(U_2)$  est un attracteur pour  $\Phi_\epsilon$ . Finalement, comme  $A_\epsilon = \Phi_\epsilon^T(A_\epsilon) \subseteq \Phi_\epsilon^T(\text{cl}(U_2)) \subset U_1$  on a  $A_\epsilon \subset U_1$  et  $U_2 \subset B(A_\epsilon)$ .<sup>1</sup>

---

1. Cette preuve est tirée de [2].

Une conséquence directe de ce lemme est le théorème suivant :

**Théorème 2.1.** *Soit  $A$  un attracteur pour  $\Phi$  avec comme bassin d'attraction  $B(A)$ . Alors pour  $\epsilon > 0$  assez petit, il existe un attracteur  $A_\epsilon$  de  $\Phi_\epsilon$  de bassin d'attraction  $B(A_\epsilon)$  tel que l'application  $\epsilon \mapsto A_\epsilon$  est semi-continue supérieurement et l'application  $\epsilon \mapsto B(A_\epsilon)$  est semi-continue inférieurement.*

Nous avons besoin d'un dernier théorème classique de la théorie des équations différentielles.

### 2.3 Théorème de Poincaré-Bendixson

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , un champ vectoriel  $\mathcal{C}^1$ .

On considère l'équation différentielle autonome

$$\dot{x}(t) = F(x(t))$$

Soit  $s(\cdot)$  une solution maximale de cette équation.

Informellement, le théorème de Poincaré-Bendixson affirme que si  $s$  est à valeurs dans un compact  $K$  inclus dans  $\Omega$ , alors soit  $s$  converge vers une limite, soit son comportement asymptotique est celui d'une fonction périodique.

Le lecteur pourra trouver un énoncé précis de ce théorème ainsi qu'une preuve dans [1].

### 3 Notations

On considère une population constituée de nombreux agents qui interagissent avec un adversaire non spécifié (cet adversaire peut-être la population elle-même, la nature, une autre population, etc...).

Les agents sont considérés comme étant faiblement rationnels : ils choisissent régulièrement des stratégies pertinentes au niveau du paiement mais ne savent généralement pas dans quel type d'interaction ils sont engagés, l'information dont ils disposent n'est pas forcément totale et ils prennent leurs décisions de façon assez simple.

On note :

- $I = \{1, \dots, N\}$  l'ensemble des stratégies pures.
- $X = \Delta(I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N, \sum_{i \in I} x_i = 1\}$  l'ensemble des stratégies mixtes.
- $x_i(t)$  représente la proportion de joueurs jouant la stratégie  $i$  au temps  $t$  et  $\mathbf{x}(t) = (x_i(t))_{i \in I}$  le vecteur de ces proportions.

Notons que comme les  $x_i$  sont des proportions on a  $\sum_{i \in I} x_i(t) = 1, \forall t$ .

L'adversaire choisit une stratégie  $y(t)$  dans le compact  $S_{opp}$ , l'ensemble des stratégies de l'adversaire.

On note  $U_i(\mathbf{y})$  le paiement de la stratégie pure  $i$  contre la stratégie  $\mathbf{y}$  et  $U_p(\mathbf{y}) = \sum_{i \in I} p_i U_i(\mathbf{y})$  le paiement de la stratégie mixte  $p$ .

On dit que la stratégie  $p$  (pure ou mixte) est dominée<sup>2</sup> si il existe une stratégie  $q$  (pure ou mixte elle aussi) telle que  $U_p(\mathbf{y}) < U_q(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in Y$ .

On dit que la stratégie pure  $i$  est éliminée si  $x_i(t) \rightarrow 0$  et que la stratégie mixte  $p$  est éliminée si  $\min_{\{i \in I: p_i > 0\}} x_i(t) \rightarrow 0$ .

Généralement une dynamique d'évolution est une équation différentielle où la dérivée de  $\mathbf{x}$  est une fonction des vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et du vecteur de paiement. Cette fonction varie selon ce qu'on choisit comme hypothèses sur les modèles de choix des agents, nous en verrons des exemples plus tard.

Après avoir défini ces concepts, nous pouvons nous demander si, sous des dynamiques raisonnables, les stratégies dominées sont éliminées. Avant de présenter nos premiers résultats, nous décrivons comment, à partir d'hypothèse sur les agents de la population considérée, peuvent se construire les dynamiques que nous étudierons.

---

2. Nous parlerons toujours de dominance stricte.



## 4 Vue d'ensemble de la littérature actuelle

### 4.1 Construction et définition d'une dynamique d'évolution

Ce qui suit est inspiré de [3] et [4], le lecteur pourra s'y référer pour plus de détails.

Pour commencer, considérons un jeu à population unique. Une dynamique d'évolution<sup>3</sup> est une application qui associe à chaque jeu  $U$ <sup>4</sup> une équation différentielle ordinaire  $\dot{x} = V^U(x)$ .

En général ce type de dynamique est obtenue à partir d'un modèle construit sur les choix individuels des agents.

On considère une courte durée et on imagine que pendant cette durée une partie de la population se voit offrir la possibilité de changer de stratégie.

Pour modéliser cela on introduit une fonction, qu'on appelle protocole de révision,  $\rho : \mathbb{R}^N \times X \rightarrow \mathbb{R}_+^{N \times N}$  qui à un vecteur de paiement  $U(x)$  et un état  $x \in X$  associe à chaque paire de stratégies  $i$  et  $j$  un nombre positif  $\rho_{ij}(U(x), x)$ .

Ce nombre positif représente le taux d'agents qui jouaient la stratégie  $i$  et changent pour la stratégie  $j$ .

Un jeu  $U$  et un protocole  $\rho$  génèrent une équation différentielle  $\dot{x} = V^U(x)$ . On appelle l'équation qui en résulte dynamique moyenne ou 'mean dynamic' pour  $U$  et  $\rho$ , on a :

$$\dot{x}_i = V_i^U(x) = \sum_{j \in I} x_j \rho_{ji}(U(x), x) - x_i \sum_{j \in I} \rho_{ij}(U(x), x) \quad (2)$$

---

3. Nous parlerons toujours de dynamiques d'évolution déterministes.

4. On identifie un jeu à sa fonction de paiement.

On peut interpréter cette équation simplement : pour une stratégie  $i$  donnée, la première somme représente la proportion d'agents qui se mettent à jouer la stratégie  $i$  et la deuxième la proportion d'agents qui jouaient la stratégie  $i$  et qui ont changé de stratégie.

La littérature actuelle distingue deux types de dynamiques : les dynamiques dites d'imitation/sélection et celles dites d'innovation. La différence entre ces dynamiques réside dans le fait que pour un jeu basé sur une dynamique imitative, une stratégie qui n'est jamais jouée ne peut pas apparaître, alors que cela est possible si le jeu est basé sur une dynamique innovante.

## 4.2 Exemples de dynamiques d'imitation et premiers résultats

Pour ce type de dynamique, on donne l'opportunité à des agents, tirés au hasard, de changer leur stratégie pour une stratégie jouée par d'autres agents.

On peut décrire le processus d'imitation en deux étapes :

1. L'agent qui a la possibilité de changer de stratégie tire un agent au hasard parmi la population.
2. Selon une règle qu'il s'est fixé, il va décider d'imiter ou pas la stratégie de l'agent qu'il a tiré au hasard (par exemple si cette stratégie fait mieux que sa stratégie actuelle).

Ceci nous donne un protocole de révision de la forme  $\rho_{ij} = x_j r_{ij}$  avec  $r_{ij}$  un réel positif qui traduit la règle d'imitation tel que  $r_{ij} - r_{ji} > 0$  si  $u_j > u_i$ .

La plus célèbre des dynamiques imitatives est la dynamique des réplicateurs donnée par :  $\dot{x}_i = x_i(U_i - \bar{U})$  avec  $\bar{U} = \sum_{i \in I} x_i U_i$ . Cette dynamique était très étudiée en biologie, elle est censée modéliser les processus de sélection naturelle et d'imitation.

On peut étendre la dynamique du réplicateur en considérant un fonction du paiement plutôt que le paiement directement, ce qui nous donne  $\dot{x}_i = x_i(f(U_i) - \bar{f})$ .

Plus généralement, les dynamiques imitatives sont de la forme  $\dot{x}_i = x_i(g_i - \bar{g})$  avec  $\bar{g} = \sum_{i \in I} x_i g_i$ .

Notons que  $g_i - \bar{g} = g_i(x, y) - \bar{g}(x, y)$  est le taux d'accroissement de la stratégie  $i$ , qu'on appelle aussi *fitness function*.

#### 4.2.1 Dynamiques monotones

Les dynamiques monotones<sup>5</sup> forment une classe de dynamiques pour laquelle il existe déjà de nombreux résultats, nous en présentons ici quelques-uns. Commençons d'abord par définir ces dynamiques.

Une dynamique imitative  $\dot{x}_i = x_i(g_i - \bar{g})$  est :

- monotone si les taux d'accroissement sont ordonnés selon les paiements :  
 $U_i > U_j \Rightarrow g_i > g_j \forall i, j$
- monotone agrégée si l'implication précédente s'étend aux stratégies mixtes :  
 $U_p > U_q \Rightarrow g_p > g_q \forall p, q$
- monotone convexe si l'implication reste vraie lorsque  $q$  est pure.
- monotone concave si l'implication reste vraie lorsque  $p$  est pure.

---

5. En anglais on dit que ces dynamiques sont de type *monotonic*. Comme il n'existait pas de terme français pour cette expression, nous les appellerons dynamiques monotones.

Ceci vient du fait que pour une fonction  $f$  donnée, la dynamique  $\dot{x}_i = x_i(f(U_i) - \bar{f})$  est de type :

- monotone si  $f$  est croissante.
- monotone agrégée si  $f$  est croissante et linéaire.
- monotone convexe si  $f$  est croissante et convexe.
- monotone concave si  $f$  est croissante et concave.

Intuitivement dans le cas d'une dynamique monotone, si une stratégie pure en domine une autre alors elle aura un taux d'accroissement supérieur et donc la stratégie dominée devrait disparaître.

Dans le cas d'une dynamique monotone convexe si une stratégie mixte a un meilleur paiement qu'une stratégie pure alors elle aura aussi un meilleur taux d'accroissement et devrait l'éliminer, le raisonnement est similaire dans le cas d'une dynamique monotone concave.

Finalement pour une dynamique monotone agrégé, un meilleur paiement implique toujours un meilleur taux d'accroissement.

Nous formalisons ceci dans la proposition suivante.

- Proposition 1.**
1. *Les dynamiques monotones éliminent les stratégies pures dominées par des stratégies pures.*
  2. *Les dynamiques monotones agrégées éliminent les stratégies mixtes dominées par des stratégies mixtes.*
  3. *Les dynamiques monotones convexes éliminent les stratégies pures dominées par des stratégies mixtes.*
  4. *Les dynamiques monotones concaves éliminent les stratégies mixtes dominées par des stratégies pures.*

**Preuve.** Nous faisons la preuve dans le cas d'une dynamique monotone agrégée, les preuves sont similaires pour les autres cas.

Soient deux stratégies mixtes  $p$  et  $q$  telles que  $p$  domine strictement  $q$ . Alors, comme la dynamique est monotone agrégée, on a  $g_p(x, y) > g_q(x, y) \forall (x, y) \in X \times S_{opp}$ .

Par compacité de  $X \times S_{opp}$  et par continuité de  $g_p - g_q$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$g_p(x, y) - g_q(x, y) > \epsilon \forall (x, y) \in X \times S_{opp} \quad (3)$$

Fixons une solution  $x(\cdot)$ , posons  $w(t) = \sum_{i \in I} (p_i - q_i) \ln x_i(t)$  et observons que  $\dot{w}(t) = \sum_{i \in I} (p_i - q_i) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = \sum_{i \in I} (p_i - q_i) g_i(x, y) = g_p(x, y) - g_q(x, y)$ .

D'après (3),  $\dot{w}(t) > \epsilon \forall t$  et donc  $w(t) \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

Or  $\sum_{i \in I} p_i \ln x_i \leq 0$ , donc nécessairement  $\sum_{i \in I} q_i \ln x_i \rightarrow -\infty$  et ceci est équivalent au fait que la stratégie  $q$  est éliminée<sup>6</sup>.

Pour les autres types de dynamique on remplace stratégie pure par stratégie mixte au bon endroit.<sup>7</sup>

Pour une dynamique donnée, on dit que celle-ci n'élimine pas nécessairement les stratégies strictement dominées si il existe un jeu dans lequel une stratégie strictement dominée subsiste (c'est-à-dire que la proportion de joueurs jouant cette stratégie n'est jamais 0 infiniment).

**Proposition 2.** Les dynamiques de la forme  $\dot{x}_i = x_i(f(U_i) - \bar{f})$  n'éliminent pas nécessairement :

1. Les stratégies pures dominées par des stratégies pures si  $f$  n'est pas croissante.
2. Les stratégies pures dominées par des stratégies mixtes si  $f$  n'est pas convexe.

---

6. En effet, sous les conventions  $\ln 0 = -\infty$  et  $0 \ln 0 = 0$ , on a bien que  $\min_{\{i \in I: p_i > 0\}} x_i(t) \rightarrow 0$  pour que  $\sum_{i \in I} q_i \ln x_i \rightarrow -\infty$

7. Cette preuve est tirée de [5].

3. Les stratégies mixtes dominées par des stratégies pures si  $f$  n'est pas concave.
4. Les stratégies mixtes dominées par des stratégies mixtes si  $f$  n'est pas linéaire.

**Preuve.** Si  $f$  n'est pas croissante il est évident que des stratégies pures strictement dominées peuvent subsister. Sous cette hypothèse on a l'existence de deux réels  $a$  et  $b$  (on peut supposer  $a < b$  sans perte de généralité) tels que  $f(a) > f(b)$ . Il suffit de considérer un jeu où il y a deux stratégies de paiement  $a$  et  $b$  par exemple. Alors la dérivée de la proportion de la première stratégie est croissante et celle de la deuxième est décroissante et donc la première stratégie n'est pas éliminée, même si elle est strictement dominée.

Si  $f$  n'est pas linéaire elle n'est ni concave ni convexe donc le dernier point est une conséquence des deux précédents.

Faisons la preuve dans le cas où  $f$  n'est pas convexe<sup>8</sup> : on suppose qu'il existe des réels  $a, b$  et  $\epsilon$  tels que  $\frac{f(a)+f(b)}{2} < f(\frac{a+b}{2} - \epsilon)$ . Considérons le jeu qui a pour matrice de paiement :

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} L & R \\ \left( \begin{array}{cc} a & b \\ \frac{a+b}{2} - \epsilon & \frac{a+b}{2} - \epsilon \\ b & a \end{array} \right) \end{array}$$

La stratégie pure  $M$  est strictement dominée par la stratégie mixte  $p = (1/2, 0, 1/2)$  Supposons que, pour un  $\alpha > 0$  petit et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'adversaire joue la stratégie  $L$  si  $t \in [2k; 2k + 1 - \alpha]$  et la stratégie  $T$  si  $t \in [2k + 1; 2k + 2 - \alpha]$  avec des transitions affines entre les deux intervalles.

Le taux d'accroissement moyen des stratégies  $T$  et  $B$  est de  $\frac{f(a)+f(b)}{2}$  qui est plus petit

---

8. Nous supposons que  $f$  est continue.

que  $f(\frac{a+b}{2} - \epsilon)$ , le taux d'accroissement moyen de la stratégie M. Par conséquent  $x_M \rightarrow 1$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  et donc la stratégie M n'est pas éliminée.

La preuve pour le cas où  $f$  n'est pas concave est similaire.<sup>9</sup>

#### 4.2.2 Jeu à une population

Dans les preuves des propositions précédentes nous nous permettons de choisir le comportement de l'adversaire. Dans cette partie, nous nous intéressons au cas particulier où la population que l'on considère est seule ce qui nous pousse à modifier les preuves, néanmoins nous allons voir que des résultats similaires aux précédents tiennent toujours.

Désormais, dans les jeux que nous étudions nous avons  $S_{opp} = X$  et  $y(t) = x(t)$  et la dynamique du jeu est donnée par :

$$\dot{x}_i = x_i[f(U_i(\mathbf{x})) - \bar{f}] \quad (4)$$

**Proposition 3.** *Si la dynamique d'un jeu à population unique est donnée par (4) avec  $f$  croissante et  $C^1$ , elle n'élimine pas forcément :*

1. les stratégies pures dominées par les stratégies mixtes si  $f$  n'est pas convexe.
2. les stratégies mixtes dominées par les stratégies pures si  $f$  n'est pas concave et de plus strictement convexe sur un certain intervalle et avec une dérivée strictement positive.

**Preuve.** Voir [5].

### 4.3 Exemples de dynamiques innovantes

Nous présentons ici trois dynamiques innovantes classiques, dans le cas des jeux à population unique. Désormais des stratégies qui ne sont pas utilisées peuvent

---

9. Cette preuve est tirée de [5] et le cas où  $f$  n'est pas concave y est aussi détaillé.

apparaître. Nous partons toujours de la dynamique moyenne (2) pour décrire ces dynamiques, qui sont chacune caractérisées par leur protocole de révision  $\rho_{ij}$ .

### 4.3.1 Dynamique de meilleure réponse

Elle a été étudiée par Gilboa et Matsui, elle modélise un jeu dans lequel des agents sont tirés au hasard et se voient proposer l'opportunité de changer leur stratégie pour une stratégie qui est meilleure réponse. Cette dynamique a pour protocole de révision  $\rho_{ij} = B_j^U(x)$  où  $B^U(x) = \operatorname{argmax}_{y \in X} y'U(x)$ <sup>10</sup>. La dynamique de jeu qui en résulte est donnée par :  $\dot{x}_i = B_i^U(x) - x_i$ .

### 4.3.2 Dynamique de BNN

Elle a été étudiée par Brown et von Neumann et s'interprète de la façon suivante : on tire un individu au hasard et celui-ci change pour une stratégie  $j$  selon une probabilité proportionnelle à la différence entre le paiement de la stratégie  $j$  et le paiement moyen de la population, ce qui nous donne le protocole de révision suivant :  $\rho_{ij} = [U_j - \bar{U}]_+$  et la dynamique de jeu  $\dot{x}_i = [U_i - \bar{U}]_+ - x_i \sum_{j \in I} [U_j - \bar{U}]_+$ .

### 4.3.3 Dynamique de Smith

Pour cette dynamique, l'individu tiré, s'il joue la stratégie  $i$ , changera pour la stratégie  $j$  avec une probabilité proportionnelle à la différence entre le paiement de la stratégie  $j$  et celui de sa propre stratégie  $i$ . On a par conséquent le protocole de révision  $\rho_{ij} = [U_j - U_i]_+$  et on en déduit  $\dot{x}_i = \sum_{j \in I} x_j [U_i - U_j]_+ - x_i \sum_{j \in I} [U_j - U_i]_+$ .

---

10. En fait,  $B^U(x)$  peut être un ensemble qui contient plus d'un élément, la dynamique n'est alors pas vraiment une équation différentielle mais plutôt une inclusion différentielle, voir [5] pour plus de précisions.



## 4.4 Quelques résultats sur les dynamiques innovantes

Dans l'article *Survival of dominated strategies under evolutionary dynamics* (2011), [2] Hofbauer et Sandholm énoncent et prouvent deux théorèmes qui, sous certaines conditions, assurent la survie de stratégie strictement dominées dans le cas de dynamiques innovantes dans des jeux à population unique.

### 4.4.1 Premier théorème (BNN et Smith)

On considère deux familles de dynamiques, basées sur les protocoles de révisions de la forme :

$$\rho_{ij} = \phi(U_j - U_i) \quad (5)$$

et

$$\rho_{ij} = \phi(U_j - \bar{U}) \quad (6)$$

Ces dynamiques sont des extensions de la dynamique de BNN et de celle de Smith.

Dans les deux cas,  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction Lipschitz telle que :

$$\text{sgn}(\phi(u)) = \text{sgn}([u]_+) \quad (7)$$

et

$$\left. \frac{d}{du^+} \phi(u) \right|_{u=0} > 0 \quad (8)$$

**Théorème 4.1.** *Soit  $V$  une dynamique d'évolution basée sur un protocole de révision  $\rho$  de la forme (5) ou (6) telle que la fonction  $\phi$  vérifie (7) et (8). Alors il existe un jeu  $U_d$  tel que sous  $V^{U_d}$ , pour les solutions partant de la plupart des conditions initiales, il existe une stratégie strictement dominée qui est jouée par une fraction de la population qui est distante de 0 et dépasse  $\frac{1}{6}$  un nombre infini de fois.*

**Preuve.** Nous allons donner les grandes étapes de la preuve, le détail est disponible dans l'article de Hofbauer et Sandholm.

On part d'un jeu classique Pierre-Papier-Ciseaux auquel on rajoute une quatrième stratégie T, identique à la stratégie ciseaux. Plus tard nous diminuerons le paiement de la stratégie T de  $\epsilon$  pour qu'elle devienne strictement dominée et nous verrons que pour  $\epsilon$  assez petit, cette stratégie survie.

La fonction de paiement est donnée par :

$$F_\epsilon(x) = \begin{pmatrix} 0 & -b & a & a \\ a & 0 & -b & -b \\ -b & a & 0 & 0 \\ -b - \epsilon & a - \epsilon & -\epsilon & -\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

où  $b > a > 0$ .

Prenons tout d'abord  $\epsilon = 0$ . Observons que l'ensemble des équilibres de Nash,  $EN$ , est l'ensemble

$$\{x \in X, x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \alpha, \frac{1}{3} - \alpha) \text{ avec } \alpha \in [0, \frac{1}{3}]\}$$

La première partie de la preuve consiste à montrer que cet ensemble est répulsif : il existe un voisinage  $M$  de  $EN$  tel que toute trajectoire passant par  $M - EN$  quitte  $M$  pour toujours. Ceci se fait au moyen de fonctions de Lyapunov, il faut en trouver une pour chacune des deux familles de dynamiques.

Deuxièmement il faut montrer que les solutions issues de la dynamique  $V^U$  qui commencent en dehors de l'ensemble  $EN$  convergent vers le plan  $P = \{x \in X, x_3 = x_4\}$ .

Après avoir démontré les deux points précédents, nous avons que toutes les solutions autres que celles qui partent de  $EN$  convergent vers un attracteur  $\mathcal{A}$ , un ensemble compact, disjoint de l'ensemble  $NE$ , contenu dans le plan  $P$  et qui entoure l'équilibre de Nash

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ . Donc il existe des portions de  $\mathcal{A}$  où plus de  $\frac{1}{6}$  de la population joue la stratégie  $T$ .

L'idée est ensuite de modifier le jeu en prenant  $\epsilon > 0$  assez petit et d'utiliser le théorème de continuité des attracteurs : l'attracteur  $\mathcal{A}$  change en un attracteur  $\mathcal{A}_d$ , contenu dans un voisinage de  $\mathcal{A}$  et tel que  $B(\mathcal{A}_d)$  contient tous les points en dehors d'un fin tube qui entoure l'ensemble  $EN$ .

#### 4.4.2 Deuxième théorème

Le deuxième théorème est beaucoup plus général et se base sur les 4 conditions suivantes que doit remplir la dynamique étudiée.

On considère que cette dynamique est de la forme  $\dot{x}_i = V_i^U(x) = g_i(U(x), x)$ ,  $\forall i \in I$  avec  $g$  la fonction de taux d'accroissement (absolu) de la stratégie  $i$ .

Pour énoncer le théorème, on doit introduire les quatres conditions suivantes :

(C) Continuité : La fonction  $g$  est Lipschitz continue .

(PC) Corrélation positive : Si  $V^U(x) \neq 0$  alors  $V^U(x)'U(x) > 0$ .

(NS) Stationarité des équilibres de Nash : Si  $V^U(x) = 0$  alors  $x \in EN(U)$ ..

(IN) Innovation : Si  $x \notin EN(U)$ ,  $x_i = 0$  et  $e_i^{11} \in B^U(x)$  alors  $V_i^U(x) > 0$ .

**Théorème 4.2.** Soit  $V$  une dynamique d'évolution qui satisfaisant (C), (PC), (NS) et (IN). Alors il existe un jeu  $U_d$  tel que sous  $V^{U_d}$ , pour les solutions partant de la plupart des conditions initiales, il existe une stratégie strictement dominée telle que la proportion de la population qui la joue est non nulle asymptotiquement.

Commençons par expliquer les quatre conditions nécessaires à ce théorème.

---

11. On note ainsi le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^N$

La continuité requiert qu'une légère variation dans le paiement ou dans l'état de la population n'entraîne pas un grand changement au niveau du champ de vecteur de la dynamique du jeu.

La corrélation positive implique que le taux d'accroissement d'une stratégie et son paiement sont corrélés positivement lorsque le jeu n'est pas à l'équilibre.

La stationnarité des équilibres de Nash fait que la dynamique du jeu est à l'équilibre seulement lorsque l'état de la population est un équilibre de Nash.

Finalement, la condition d'innovation implique que, dans le cas d'un état de la population qui n'est pas un équilibre de Nash, si une stratégie est meilleure réponse et qu'elle n'est pas jouée alors son taux d'accroissement doit être strictement positif.

**Preuve.** *Comme pour le théorème précédent, nous ne détaillons pas la preuve mais en donnons l'idée.*

*La preuve repose sur la construction d'un jeu particulier, l'hypnodisk. La construction du jeu est expliquée dans l'article, c'est un mélange entre un jeu de coordination et un jeu d'anti-coordination à 3 stratégies. Le champ de vecteur qui représente la projection du vecteur de paiement est le suivant :*

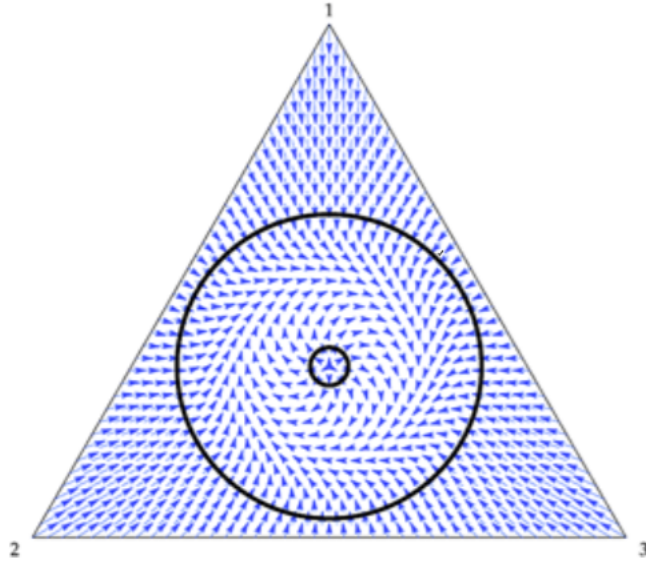


FIGURE 1 – Champ de vecteur du projeté du paiement pour l’hypnodisk

*On montre que dans ce jeu, toute solution qui n’est pas stationnaire entre dans l’anneau (celui de la figure) et ne le quitte jamais. Etant donné que les équilibres sont dans le cercle central, le théorème de Poincaré-Bendixson implique que toute solution non stationnaire converge vers un cycle limite, inclus dans cet anneau.*

*Comme précédemment, on introduit une 4ème stratégie, jumelle de la 3ème stratégie. L’ensemble des équilibres de Nash EN est alors l’ensemble*

$$\{x \in X : x_1 = x_2 = x_3 + x_4 = \frac{1}{3}\}$$

*Notons*

$$I = \{x \in X : (x_1 - \frac{1}{3})^2 + (x_2 - \frac{1}{3})^2 + (x_3 + x_4 - \frac{1}{3})^2 \leq r^2\}$$

*et*

$$O = \{x \in X : (x_1 - \frac{1}{3})^2 + (x_2 - \frac{1}{3})^2 + (x_3 + x_4 - \frac{1}{3})^2 \leq R^2\}$$

où  $r$  et  $R$  sont respectivement les rayons du plus petit et du plus grand cercle de la figure.

On doit montrer que, sous les conditions du théorème, toutes les solutions autres que les solutions stationnaires entrent dans la région  $D = O - I$  et ne la quittent jamais : elles restent dans

Ensuite on peut prouver que toute solution qui part en dehors d'un voisinage de  $EN$  converge vers un attracteur  $\mathcal{A}$ , un ensemble compact inclus dans  $D$  et invariant sous  $V^U$ .

Par l'absurde on suppose que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{Z} = \{x \in X : x_4 = 0\} \neq \emptyset$  et on trouve une contradiction.

## 4.5 Conclusions actuelles

La littérature actuelle considère que les dynamiques innovantes peuvent permettre aux stratégies dominées de subsister alors que celles ci sont éliminées dans le cas de dynamiques imitatives. Bill Sandholm appelle les dynamiques monotones, dynamiques imitatives.

Néanmoins il semble que les dynamiques imitatives étudiées jusqu'ici n'étaient qu'un cas particulier qui permettaient d'avoir de bons résultats.

## 5 Amélioration des résultats actuels

De nouvelles dynamiques imitatives laissent à penser que la dichotomie entre dynamique imitative et dynamique innovante, pour les résultats d'élimination, n'est pas la bonne. La conjecture de Mr. Viossat est qu'il faut plutôt s'intéresser au fait de savoir si la dynamique considérée avantage ou n'avantage pas les stratégies rares.

Après avoir expliqué en quoi les dynamiques innovantes avantagent les stratégies rares, on présente, en guise d'ouverture, de nouvelles dynamiques imitatives qui avantagent les stratégies rares. Les résultats précédents devraient pouvoir s'étendre pour prouver que sous ces nouvelles dynamiques les stratégies dominées ne sont pas forcément éliminées, mais cela n'a pas encore été fait.

Nous avons vu que, dans le cas des dynamiques innovantes, les protocoles de révision ne dépendent pas des proportions et donc le rapport  $\frac{\dot{x}_i}{x_i}$  peut être extrêmement grand et c'est en ce sens que les dynamiques innovantes avantagent les stratégies rares : relativement aux proportions des stratégies, le taux d'accroissement d'une stratégie qui est peu jouée peut exploser.

Considérons maintenant le processus suivant :

- 1a) Un individu se voit proposer l'opportunité de changer de stratégie. Il rencontre  $n \geq 3$  agents, tirés au hasard parmi la population, dont les stratégies sont  $\{i, j, j\}$  par exemple.
- 1b) Il dresse alors une liste des stratégies jouées par ces agents. Dans notre exemple ceci donne  $\{i, j\}$ .
- 1c) Il tire au hasard une stratégie parmi la liste qu'il a dressé. Il tirerait  $j$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  dans notre exemple.

2) Il choisit de changer pour la stratégie tirée au hasard selon une règle qu'il s'est fixée, par exemple si elle a un meilleur paiement que sa stratégie actuelle.

Ceci nous donne un protocole de révision  $\rho_{ij} = p_j(x)r_{ij}$  où  $p_j(x)$  est la probabilité de tirer  $j$  dans la première étape. Ce processus génère des dynamiques d'imitation car les agents ne peuvent changer que pour des stratégies qui sont déjà jouées.

De plus, ce processus avantage les stratégies rares dans le sens où  $x_i < x_j \Rightarrow \frac{p_i(x)}{x_i} > \frac{p_j(x)}{x_j}$ .

Il reste maintenant à démontrer proprement que l'idée selon laquelle des dynamiques basées sur ce processus d'imitation n'éliminent pas forcément les stratégies strictement dominées est vraie.



## Références

- [1] Morris W. Hirsch ; Stephen Smale ; Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic Press, 2004.
- [2] Josef Hofbauer ; William H. Sandholm. Survival of dominated strategies under evolutionary dynamics. *Theoretical Economics*, 2011.
- [3] William H. Sandholm. Deterministic evolutionary dynamics. *New Palgrave Dictionary of Economics*, 2005.
- [4] William H. Sandholm. Evolution and learning in games : Overview. 2007.
- [5] Yannick Viossat. Evolutionary dynamics and dominated strategies. *Economic Theory Bulletin*, 2014.
- [6] Jörgen W. Weibull. *Evolutionary Game Theory*. MIT Press, 1997.