Mémoire : Jeux de cheap talk

Louis Morel de Lachapelle

25 juin 2020

Table des matières

Introduction

La théorie des jeux est une discipline des mathématiques qui s'est développée de manière importante à partir de 1945. Elle étudie les interactions stratégiques entre plusieurs agents rationnels. C'est une discipline qui a des applications dans l'Economie, l'Histoire, les sciences politiques et sociales, la Biologie, la Philosophie,...

Les jeux étudiés peuvent être sous de nombreuses formes. On va s'intéresser dans ce mémoire à un certain type de jeu de communication : les jeux de cheap talk. C'est un type de jeu dans lesquels les joueurs peuvent communiquer, mais comme indiqué dans le nom, les messages n'ont pas de coût, pas d'influence directe (mais peut-être indirecte) sur le paiement. Les messages sont également non vérifiables : un joueur peut mentir s'il le souhaite.

Ce mémoire a pour but de donner une première approche de la notion de cheap talk, de comprendre le type de raisonnement qu'on y utilise, et de maîtriser (intuition, preuve, compréhension, application) quelques théorèmes importants de cette notion. Nous allons développer notre mémoire en deux parties, correspondant à deux modèles. Le premier modèle est, comme on va le voir, une version simplifiée du deuxième, permettant un premier contact plus aisé avec la notion. Le deuxième permettra d'aller plus loin dans la compréhension. Il est important de préciser que les jeux de cheap talk est une notion assez vaste, et qu'on ne pourra pas tout aborder dans ce mémoire.

On ne va donc pas utiliser le même modèle dans les deux parties. On va cependant garder, dans la mesure du possible, les mêmes notations et le même vocabulaire. Ces deux modèles ont cependant plusieurs caractéristiques communes. C'est premièrement dans les deux cas un modèle à deux joueurs. On les appellera joueur 1 et joueur 2. Le jeu peut avoir plusieurs types, c'est à dire plusieurs matrices de paiement. Les paiements dans la matrice s'écriront toujours (α, β), avec α le paiement du joueur 1 et β celui du joueur 2. Le jeu, dans les deux modèles, a trois phases. Une première phase, phase d'information, dans laquelle la nature choisit le type, soit la matrice du jeu, et dans laquelle le joueur 1 est informé du type. Le joueur 2, lui, n'en a aucune connaissance. La deuxième phase est la phase de communication, durant laquelle les joueurs communiquent (de manière différente selon le modèle). Il n'y a pas de médiateur, ni de bruit : les messages sont reçus comme ils ont été envoyés. De plus, l'ensemble des messages possibles ne dépend pas du type. Enfin, il y a la phase d'action, dans laquelle les joueurs jouent le jeu matriciel qui correspond au type choisi (on rappelle que seul le joueur 1 le connaît).

Cela permet de modéliser de nombreuses situations, par exemple un particulier qui demande conseil à un commercial bien informé, mais dont les intérêts ne sont pas les mêmes que ceux du particulier ; la communication entre l'Etat et les citoyens ; les situations qui demandent des compromis qui peuvent être réglés en ajoutant une phase de communication,...

Il y aurait également des applications en Biologie, dans la théorie évolutive des jeux, qui est l'application de la théorie des jeux à l'étude de l'évolution des populations. Le cheap talk aurait une influence sur ces jeux, permettant de modéliser des signaux entre animaux.

Nous allons donc, comme dit précédemment, séparer notre mémoire en l'étude de deux modèles. La première partie s'inspire de *Transmission stratégique de l'information et certification* de Frédéric Koessler et Françoise Forges, la deuxième s'inspire de l'article d'Aumann et Hart de 2003 *Long cheap talk*. Le mémoire reprendra à certains moments la structure de ces articles (à d'autres non), et dans ce cas le but sera : d'expliciter pas à pas des raisonnements qui, dans ces articles, sont difficiles ; de montrer ce qui est implicite et non expliqué ; de faire les calculs proposés et non effectués ; parfois de corriger des imprécisions ou des coquilles. Enfin, on y ajoute des analyses personnelles pour comprendre l'intuition derrière certains théorèmes.

NB : On placera des "IMPORTANT" ou des "ATTENTION" avant des paragraphes permettant de mieux appréhender l'intuition des théorèmes et l'importance de certaines subtilités.

Chapitre 1

Premier modèle

1.1 Exemples introductifs

Nous allons donc étudier dans ce chapitre le premier modèle. Il reprend ce qui a été dit en introduction, avec certaines spécificités. Premièrement le joueur 1, que l'on appellera dans ce chapitre "l'expert", est le seul qui a le droit de communiquer, et il ne peut le faire qu'une seule fois. La phase de communication consiste donc en un seul message. De plus, dans la phase d'action, seul le joueur 2, qu'on appellera "le décideur" peut agir. Dans les deux modèles, les lignes représentent le joueur 1 et les colonnes le joueur 2. On est donc confrontés dans ce chapitre à des matrices à une seule ligne.

On rappelle qu'une stratégie mixte est une stratégie ou le joueur joue chaque action avec une certaine probabilité, alors qu'une stratégie pure est une stratégie ou le joueur joue une action de manière certaine. On a en particulier qu'une stratégie pure est une stratégie mixte (mais pas l'inverse).

Dans ce chapitre, le joueur 1 a deux types possibles : k_1 (de probabilité p) et k_2 (de probabilité 1-p), et on note J l'ensemble des actions possibles du joueur 2 (décideur). On note $Y(p) \equiv argmax_{y \in \Delta(J)}[pB^1(y) + (1-p)B^2(y)]$ l'ensemble des actions optimales du joueur 2 dans le jeu sans communication (jeu où on enlève la phase de communication), avec $B^1(y)$ le paiement du joueur 2 s'il joue la stratégie mixte $y \in \Delta(J)$ et que le type est k_1, et $B^2(y)$ le paiement du joueur 2 s'il joue la stratégie mixte $y \in \Delta(J)$ et que le type est k_2. $Y(p)$ est donc l'ensemble des actions mixtes ou non qui maximisent l'espérance de gain du joueur 2 dans le cas où il n'y a pas de communication. En effet, s'il y a communication les croyances du joueur 2 sur le type k_1 peuvent comme on le verra changer et ne plus être p. On rappelle que seul le joueur 1 connaît le type.

Avant de commencer les exemples introductifs, permettant de mieux saisir l'enjeu, on va introduire certaines notions. On appelle équilibre (de Nash) une situation dans laquelle aucun joueur n'a de déviation profitable. Dans le modèle de ce chapitre, cela signifie donc que le joueur 1 ne peut augmenter son paiement s'il change sa stratégie de messages, et que le joueur 2 ne peut augmenter son paiement espéré s'il change sa stratégie dans la phase d'action. On raisonne dans le cas du joueur 2 en terme de paiement espéré, puisqu'on rappelle qu'il n'a pas connaissance du type.

On rappelle que lorsqu'on raisonne en terme de déviation profitable d'un joueur, donc en terme d'équilibre de Nash, on fixe la stratégie de l'autre joueur, et l'on regarde si une autre stratégie du joueur dont on considère la déviation contre la stratégie de l'autre joueur serait plus profitable. On considère donc dans ce cas que le joueur dont on considère la déviation a connaissance de la stratégie de l'autre joueur. On appelle équilibre complètement révélateur (ou ECR) un équilibre du jeu de communication où le joueur 1 révèle toujours son type sans mentir au joueur 2 durant la phase de communication. On appelle équilibre non révélateur (ou ENR) un équilibre du jeu de communication où le joueur 1 ne révèle rien au joueur 2 (par exemple le joueur 1 envoie le même message quel que soit le type, de sorte que le message n'apporte aucune information). Ce genre d'équilibre est donc assimilable au jeu sans communication : tous les paiements d'équilibre du jeu sans communication sont des paiements d'équilibre du jeu de communication (l'inverse n'est pas vrai), et sont représentés dans le jeu de communication par les ENR. Enfin, on appelle équilibre partiellement révélateur (ou EPR) un équilibre du jeu de communication dans lequel le joueur 1 révèle le bon type la plupart du temps, mais pas toujours (c'est à dire le joueur 1 joue en mixte). Par exemple, le joueur 1 peut envoyer 3 fois sur 4 a quand le type est k_1, sinon b, et 3 fois sur 4 b quand le type est k_2, sinon a. Ainsi, quand le joueur 2 reçoit a, il peut se douter que le type est k_1, mais n'est pas certain. Cette explication est une première approche et sera évidemment bien plus développée, et de manière rigoureuse, dans les exemples qui suivront.

Exemple 1 (Révélation crédible de l'information)

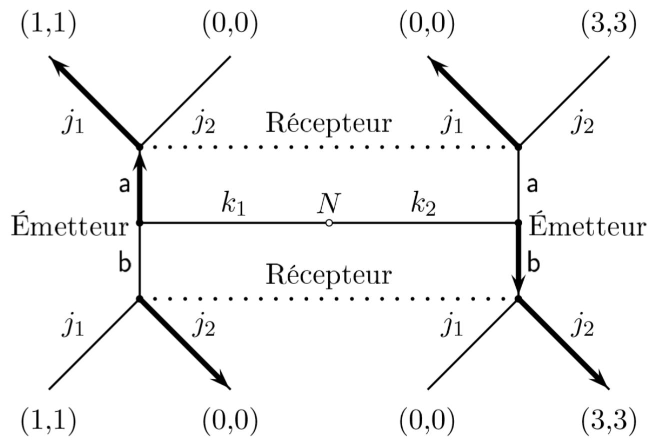
	j_1	j_2	
k_1	1,1	0,0	p
k_2	0,0	3,3	$(1-p)$

On étudie le jeu ci-dessus, pour l'instant sans communication (le joueur 1 ne peut donc rien faire). On étudie les actions optimales du joueur 2 selon les valeurs de p. On rappelle que dans la matrice, les paiements s'écrivent dans les deux chapitres (α, β), avec α le paiement du joueur 1 et β celui du joueur 2. Le joueur 2 préfère jouer j_1 si son espérance de gain est strictement supérieure à quand il joue j_2 (on raisonne en espérance car le joueur 2 ne connaît jamais le type). Cela s'écrit : $1 \times p + 0 \times (1-p) > 0 \times p + 3 \times (1-p)$. Ce qui équivaut à $4 \times p > 3$ soit $p > \frac{3}{4}$. Inversement, le joueur 2 préfère jouer j_2 si $p < \frac{3}{4}$. Enfin, si $p = \frac{3}{4}$, il est indifférent entre les deux actions, et toute action, mixte ou non, lui convient. On obtient donc :

$$Y(p) = \begin{cases} \{j_1\} & \text{si } p > 3/4, \\ \{j_2\} & \text{si } p < 3/4, \\ \Delta(J) & \text{si } p = 3/4. \end{cases}$$

Le joueur 1, ayant exactement les mêmes paiements que le joueur 2 dans la matrice, et souhaitant lui aussi maximiser son gain, s'il pouvait décider, choisirait comme le décideur, le joueur 2. Les préférences du joueur 1 sont donc les mêmes que celles du joueur 2. Le joueur 1 a donc intérêt à transmettre toute la vérité au joueur 2. On dit que les préférences du joueur 1 sont corrélées avec la vérité. On s'attend donc logiquement à l'existence d'un équilibre complètement

révélateur (ECR), car le joueur 1 désire donner toutes les informations au joueur 2 pour qu'il prenne la meilleure décision, étant donné le fait que leurs intérêts convergent.
On suppose que le joueur 1 a la stratégie suivante : " message a si le type est k_1, message b si le type est k_2". On suppose que le joueur 2 choisit j_1 si le message reçu est a, j_2 si le message reçu est b. le profil d'actions représenté par ces deux stratégies est en gras sur l'arbre suivant :



On peut vérifier facilement que ce profil d'actions est un équilibre de Nash. Premièrement le joueur 2 n'a pas intérêt à dévier car il joue en maximisant son gain (on rappelle que dans ce raisonnement on fixe la stratégie du joueur 1). En effet, en fixant la stratégie du joueur 1, cela signifie donc qu'il connaît les types, car la stratégie du joueur 1 est complètement révélatrice. On voit bien que sa stratégie est celle qui maximise son profit quand il est mis au courant des types. On voit bien de même sur l'arbre que si le joueur 1 dévie (ici on fixe donc la stratégie du joueur 2), son paiement diminue : s'il est de type k_1 et envoie le message b, le joueur 2, comme sa stratégie est fixée, jouera j_2, et le joueur 1 passera donc d'un paiement de 1 à un paiement de 0. De la même manière, s'il est de type k_2 et envoie le message a, le joueur 2 jouera j_1, et le joueur 1 passera d'un paiement de 3 à un paiement de 0. On a donc qu'aucune déviation n'est profitable : c'est bien un équilibre de Nash complètement révélateur.

Exemple 2 (Révélation non crédible de l'information)

On considère le jeu suivant :

	j_1	j_2	
k_1	5,2	1,0	p
k_2	3,0	1,4	$(1-p)$

On étudie premièrement, dans le jeu sans communication, les actions optimales du joueur 2. Il cherche à maximiser son espérance de gain. Il préfère donc jouer j_1 si :
$2 \times p + 0 \times (1-p) > 0 \times p + 4 \times (1-p)$. cela équivaut à $6 \times p > 4$, soit $p > \frac{2}{3}$. Si $p < \frac{2}{3}$, il préfère donc jouer j_2, et si $p = \frac{2}{3}$, il est indifférent entre jouer j_1 ou j_2, et toute action mixte ou non est donc optimale. On obtient donc :

$$
Y(p) = \begin{cases} \{j_1\} & \text{si } p > 2/3, \\ \{j_2\} & \text{si } p < 2/3, \\ \Delta(J) & \text{si } p = 2/3. \end{cases}
$$

Cependant, si l'on se place avant le début du jeu, quand le joueur 1 ne sait pas encore son type, le joueur 1 lui aussi cherche à maximiser son espérance de gain. Or,

$$
\forall p \in [0,1], 5 \times p + 3 \times (1-p) > 1 = 1 \times p + 1 \times (1-p)
$$

Donc, quelle que soit la valeur de p, le joueur 1 préférerait que le joueur 2 choisisse j_1 . Les préférences du joueur 1 ne sont donc pas les mêmes que celles du joueur 2.
Les préférences du joueur 1 sur les croyances du joueur 2 ne sont donc pas corrélées avec la vérité. On peut donc clairement supposer qu'il n'y a pas d'équilibre complètement révélateur, car les intérêts peuvent diverger.
En effet, supposons qu'il existe un équilibre complètement révélateur. La stratégie du joueur 1 est donc du type :" message a si le type est k_1, message b si le type est k_2". On a donc à cet équilibre supposé que le joueur 2 choisit j_1 si le message reçu est a, j_2 si le message reçu est b. Cependant, si le joueur 1 dévie et adopte la stratégie : " message a si le type est k_1, message a si le type est k_2". Alors, comme on a fixé la stratégie du joueur 2, puisqu'on étudie une déviation du joueur 1, le joueur 2 fidèle à sa stratégie choisira toujours j_1, ce qui est plus profitable pour le joueur 1 que la situation précédente. Ce n'est donc pas un équilibre de Nash car il existe une déviation profitable. On a ainsi montré que cette situation n'admet pas d'ECR.
Nous verrons plus tard (théorème 1) qu'il existe une méthode pour montrer facilement que le seul équilibre de ce jeu est non révélateur.

Exemple 3 (Révélation non crédible de l'information)

On considère le jeu suivant :

	j_1	j_2	
k_1	3,2	4,0	p
k_2	3,0	1,4	$(1-p)$

On commence par étudier les actions optimales du décideur dans le jeu sans communication. Il préfère jouer j_1 si : $2 \times p + 0 \times (1-p) > 0 \times p + 4 \times (1-p)$. Cela équivaut à $6 \times p > 4$, soit $p > \frac{2}{3}$. Si $p < \frac{2}{3}$, il préfère donc jouer j_2, et si $p = \frac{2}{3}$, il est indifférent entre jouer j_1 ou j_2, et toute action mixte ou non est donc optimale. On obtient donc :

$$
Y(p) = \begin{cases} \{j_1\} & \text{si } p > 2/3, \\ \{j_2\} & \text{si } p < 2/3, \\ \Delta(J) & \text{si } p = 2/3. \end{cases}
$$

Mais on remarque que les préférences du joueur 1 sur l'action du joueur 2 sont opposées à celles du joueur 2. En effet, le joueur 1, avant de savoir son type, préfère que le joueur 2 joue j_1 si : $3 \times p + 3 \times (1-p) > 4 \times p + 1 \times (1-p)$. Cela équivaut à $3 \times p < 2$, soit $p < \frac{2}{3}$.

On est donc dans un cas encore plus fort que dans l'exemple précédent. Dans l'exemple 3, les préférences du joueur 1 sur les croyances du joueur 2 étaient non corrélées avec la vérité, ici les préférences sont corrélées négativement avec la vérité (préférences opposées).

On s'attend donc à ce qu'il n'existe pas d'ECR. Ici aussi, on pourra montrer plus tard que le seul équilibre de Nash associé est non révélateur.

Nous pouvons, comme dans l'exemple 3, prouver par l'absurde qu'il n'existe pas d'ECR. Supposons qu'il existe un ECR. Ainsi, le joueur 1 joue une stratégie du type :" message a si le type est k_1, message b si le type est k_2". Le joueur 2, lui, pour que le profil d'actions soit un équilibre de Nash, joue donc j_1 si le message reçu est a, et joue j_2 si le message reçu est b, car il cherche à maximiser son profit, en supposant que la stratégie du joueur 1 soit fixée. Connaissant cette stratégie du joueur 2, l'expert possède donc une déviation profitable, et change sa stratégie pour la suivante : " message b si le type est k_1, message a si le type est k_2". Comme on étudie une déviation du joueur 1, la stratégie du joueur 2 est fixée, ce qui permet au joueur 1 de passer si le type est k_1 d'un paiement de 3 à un paiement de 4, et si le type est k_2, d'un paiement de 1 à un paiement de 3. Il existe donc une déviation profitable pour le joueur 1. Par l'absurde, ce jeu de communication n'admet donc pas d'ECR.

Exemple 4 (Révélation partielle de l'information)

On considère le jeu de base suivant, pour l'instant sans communication :

	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	
k_1	1,10	3,8	0,5	3,0	$1,-8$	1/2
k_2	$1,-8$	3,0	0,5	3,8	1,10	1/2

On remarque que la probabilité de chaque type est fixée, à 1/2.
Montrons premièrement qu'il admet un ECR et un ENR.

Montrons qu'il admet un ECR :
On considère le profil d'action suivant : Le joueur 1 envoie le message a si le type est k_1, le message b si le type est k_2. Le joueur 2 joue j_1 s'il reçoit a, j_5 s'il reçoit b. Montrons que c'est un équilibre de Nash. Premièrement, le joueur 2 (décideur) n'a pas intérêt à dévier, car il joue en maximisant son profit, la stratégie du joueur 1 étant considérée comme fixée puisqu'on étudie une déviation du joueur 2, et le joueur 2 ayant donc connaissance du type. Le joueur 1 n'a pas non plus intérêt à dévier. En effet,le joueur 2 joue soit j_1 soit j_5, selon le message. Or, que le type soit k_1 ou k_2, l'action j_1 ou j_5 du joueur 2 confère le même paiement (=1) au joueur 1. Donc, n'importe quelle déviation du joueur 1 ne changerait pas son paiement qui resterait égal à 1. Le joueur 1 n'a donc pas non plus de déviation profitable. Ce profil est donc un équilibre de Nash, et

est donc un ECR. Le paiement de l'expert est alors toujours égal à 1.

Montrons qu'il admet un ENR :
On considère le profil d'action suivant : Le joueur 1 envoie le message a quel que soit son type. Le joueur 2 joue toujours j_3. Montrons que ce profil d'action est un équilibre de Nash.
Premièrement le joueur 2 n'a pas de déviation profitable. En effet, les messages de l'expert n'ont aucune valeur pour lui, car il sait qu'ils ne dépendent pas du type (en l'occurrence le message est toujours a). Il fait donc abstraction des messages et joue comme dans le jeu sans communication, en maximisant son espérance de gain. Il a par exemple un gain espéré de
$10 \times \frac{1}{2} - 8 \times \frac{1}{2} = 5 - 4 = 1$ s'il joue j_1. De la même manière, il a un gain espéré de 4 s'il joue j_2, de 5 s'il joue j_3, de 4 s'il joue j_4 et de 1 s'il joue j_5. Comme il cherche à maximiser son espérance de gain, il devrait donc jouer j_3, qui lui confère un paiement espéré de 5. Le joueur 2 n'a donc pas de déviation profitable, car sa stratégie maximise son profit espéré.
De même, le joueur 1 n'a pas de déviation profitable. En effet, la stratégie du joueur 2 ne dépendant pas du message reçu, le joueur 1 n'a pas d'influence sur la décision finale. Ainsi, quelle que soit la déviation, elle n'aura aucune incidence sur la décision du joueur 2, et donc sur le paiement final. Le joueur 1 n'a donc pas de déviation profitable.
Aucun joueur n'a de déviation profitable. C'est donc bien un équilibre de Nash, et donc un ENR car le joueur 1 a une stratégie non révélatrice (toujours le même message quel que soit le type).
Le paiement de l'expert est alors toujours égal à 0.
ATTENTION : Un jeu dans notre modèle admet toujours un ENR, qui correspond à la maximisation de l'espérance de gain du joueur 2 dans le jeu sans communication.

Cependant, ce jeu admet également un équilibre partiellement révélateur (EPR), qui confère à l'expert un paiement plus important que les autres équilibres, quel que soit son type. La stratégie de l'expert (mixte car on considère un EPR) est la suivante : "$\frac{3}{4} \times a + \frac{1}{4} \times b$ si k_1 et $\frac{1}{4} \times a + \frac{3}{4} \times b$ si k_2".

On commence par expliquer l'intuition qui conduit l'expert à choisir cette stratégie. Le joueur 2 cherche à maximiser son gain. Cependant, si l'expert utilise une stratégie complètement révélatrice, le joueur 2 choisira la stratégie lui conférant un paiement de 10. Cependant, cela confère au joueur 1 un paiement de 1. Ce que veut l'expert, c'est que le joueur 2 joue j_2 ou j_4, ce qui lui confère le paiement maximal : 3. Cela n'est pas possible dans le cas d'une stratégie complètement révélatrice. Cependant, si le joueur 1 (expert), instaure un "doute" sur le véritable type, en jouant en mixte, rendant ainsi les croyances du joueur 2 moins certaines, cela change beaucoup pour le joueur 2. En effet, si le joueur 2 est sûr d'être en k_1, il va jouer j_1, mais si le joueur 1 instaure un doute sur le type en jouant en mixte comme la stratégie énoncée plus haut, alors il y a de grandes chances qu'il change d'avis, car si on est en k_2, la perte pour le joueur 2 en jouant j_1 est très importante : -8. Le risque est donc bien important pour le joueur 2 dans cette situation. Le joueur 1, quand il joue en mixte, instaure un doute sur le type et joue sur le fait que l'action qui rapporte le plus au joueur 2 pour un certain type peut lui coûter gros dans l'autre. Il pousse donc le joueur 2 vers des stratégies qui lui rapportent un peu moins, mais qui prennent mieux en compte ce risque. Ces stratégies, j2 et j4, rapportent plus au joueur 1.

Maintenant que nous avons expliqué l'intuition derrière cette stratégie du joueur 1, passons aux calculs. On regarde quelle est la meilleure réponse du joueur 2 à la stratégie "$\frac{3}{4} \times a + \frac{1}{4} \times b$ si k_1

et $\frac{1}{4} \times a + \frac{3}{4} \times b$ si k_2" du joueur 1. Calculons premièrement les croyances du décideur sur le type du joueur 1 en fonction du message reçu. On rappelle que comme on étudie une meilleure réponse du joueur 2 à la stratégie du joueur 1, on considère que le joueur 2 a connaissance de la stratégie (fixée) du joueur 1. On a d'après la formule de Bayes :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(k_1|a) = \frac{\mathbb{P}(a|k_1)\mathbb{P}(k_1)}{\mathbb{P}(a)} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \\ \mathbb{P}(k_1|b) = \frac{\mathbb{P}(b|k_1)\mathbb{P}(k_1)}{\mathbb{P}(b)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \mathbb{P}(k_2|a) = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(k_2|b) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Supposons que le décideur reçoive le message a. Il estime alors qu'il est en k_1 avec probabilité 3/4 et en k_2 avec probabilité 1/4 (probabilités conditionnelles juste au-dessus). Il veut maximiser son espérance de gain. S'il joue j_1, son espérance de gain est donc de $3/4 \times 10 + 1/4 \times (-8) = 5,5$. En procédant de la même manière, s'il joue j_2, il obtient un paiement espéré de 6, de 5 s'il joue j_3, de 2 s'il joue j_4, et de $-3,5$ s'il joue j_5. Comme il cherche à maximiser son profit, il joue donc j_2 qui lui confère un paiement espéré de 6.

Supposons que le décideur reçoive le message b. Il estime alors qu'il est en k_1 avec probabilité 1/4 et en k_2 avec probabilité 3/4.Il veut maximiser son espérance de gain. S'il joue j_1, son espérance de gain est donc de $1/4 \times 10 + 3/4 \times (-8) = -3,5$. En procédant de la même manière, s'il joue j_2, il obtient un paiement espéré de 2, de 5 s'il joue j_3, de 6 s'il joue j_4, et de $5,5$ s'il joue j_5. Comme il cherche à maximiser son profit, il joue donc j_4 qui lui confère un paiement espéré de 6.

La meilleure réponse du joueur 2 est donc j_2 s'il reçoit a, et j_4 s'il reçoit b, lorsque le joueur 1 joue la stratégie suivante : "$\frac{3}{4} \times a + \frac{1}{4} \times b$ si k_1 et $\frac{1}{4} \times a + \frac{3}{4} \times b$ si k_2"

Montrons que le profil d'action :
("$\frac{3}{4} \times a + \frac{1}{4} \times b$ si k_1 et $\frac{1}{4} \times a + \frac{3}{4} \times b$ si k_2" , "j_2 si a, et j_4 si b")
est un équilibre de Nash.

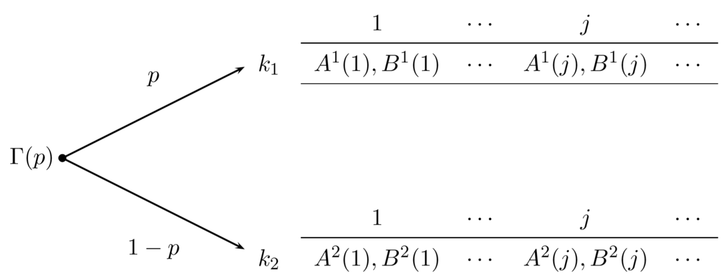
Premièrement, le joueur 2 n'a évidemment pas intérêt à dévier, car il maximise son profit espéré en prenant compte la stratégie du joueur 1. Le joueur 1, lui, puisque le joueur 2 joue soit j_2 soit j_4, aura quel que soit le message envoyé un paiement de 3, qui est le paiement le plus haut qu'il puisse obtenir. Il n'a donc pas non plus intérêt à dévier. C'est donc bien un équilibre de Nash. De plus, comme le joueur 1 joue en mixte, c'est bien un EPR.

De plus, cet EPR confère un paiement espéré(3) plus important que l'ECR(1) et l'ENR(0).

1.2 Caractérisation géométrique des équilibres de Nash

Le but de cette partie est d'avoir un moyen de trouver de manière certaine tous les paiements d'équilibre de tout jeu de communication dans notre modèle étudié. Cette méthode vient d'un théorème pour lequel nous allons devoir introduire certaines notations.

Dans cette partie, on considère un modèle similaire à précédemment. On rappelle les notations, et on en introduit des nouvelles. L'ensemble des types du joueur 1 s'écrit : $K = \{k_1, k_2\}$, avec $\mathbb{P}(k_1) = p$ et $\mathbb{P}(k_2) = 1 - p$, $p \in]0, 1[$. Une action pure du joueur 2 est notée $j \in J$, où J est un ensemble fini. Les utilités des 2 joueurs dépendent du type de l'expert et sont notées $A^k(j)$ pour le joueur 1 et $B^k(j)$ pour le joueur 2. Le jeu sans communication est noté $\Gamma(p)$. On peut résumer ce modèle par l'arbre suivant :



Une stratégie mixte du joueur 2 dans $\Gamma(p)$ est notée $y \in \Delta(J)$. Les paiements des joueurs correspondent alors à l'espérance du paiement :

$$\begin{cases} A^k(y) = \sum_{j \in J} y(j) A^k(j) \\ B^k(y) = \sum_{j \in J} y(j) B^k(j) \end{cases}$$

Dans le jeu sans communication, les équilibres dépendent logiquement uniquement de la stratégie du joueur 2, qui maximise son profit espéré. Ces stratégies s'écrivent donc ainsi :
$Y(p) \equiv argmax_{y \in \Delta(J)}[pB^1(y) + (1-p)B^2(y)]$

On pourrait se demander quel est l'intérêt pour le décideur de jouer en mixte, puisqu'il ne cherche qu'à maximiser son profit espéré en fonction de ses croyances. Cela peut cependant être utile pour rendre indifférent l'expert entre plusieurs messages, et donc pour créer un équilibre de Nash partiellement révélateur. L'étude des stratégies mixtes du joueur 2 peut donc se rendre utile.

On notera dans la suite les paiements d'équilibre de $\Gamma(p)$ ainsi :
$\varepsilon(p) \equiv \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : \exists y \in Y(p), \alpha = A(y) = (A^1(y), A^2(y)), \beta = pB^1(y) + (1-p)B^2(y)\}$

Le paiement du joueur 1 est donc considéré type par type, tandis que celui du joueur 2 est considéré en terme de paiement espéré (car le joueur 2 ne connaît pas le type, il maximise donc son profit espéré en fonction de ses croyances).

On considère ensuite la phase de communication, avant la décision du décideur, où l'expert envoie le message $m \in M = \{a, b, ...\}$, avec $|M| < \infty$. On note le jeu de communication $\Gamma_S^0(p)$.

Dans ce jeu, une stratégie du joueur 1 s'écrit $\sigma : K \mapsto \Delta(M)$ car il prend compte de son type avant d'envoyer un message, et une stratégie du joueur 2 s'écrit $\tau : M \mapsto \Delta(J)$, car il prend en compte le message de l'expert pour prendre une décision.

On note $\varepsilon_S^0(p)$ l'ensemble des paiements d'équilibres de Nash de $\Gamma_S^0(p)$. On a déjà fait et expliqué la remarque que tout jeu de communication gratuite admet un ENR, dans lequel l'expert envoie toujours le même message, et le décideur maximise son espérance de gain, sans tenir compte du message qui n'a pas d'intérêt. On a donc $\varepsilon(p) \subset \varepsilon_S^0(p)$.

Enfin, on note $\varepsilon^+(p)$ l'ensemble des paiements d'équilibre du jeu sans communication, étendus aux cas $p = O$ et $p = 1$, avec modification dans ce cas. $\varepsilon^+(p)$ est l'ensemble des $(a, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ tels qu'il existe y équilibre du jeu sans communication $\Gamma(p)$ avec :
$a^k \geq A^k(y)$ pour tout type k dans K.
$a^1 = A^1(y)$ si $p \neq 0$ et $a^2 = A^2(y)$ si $p \neq 1$, soit (1-p)$\neq 0$
$\beta = pB^1(y) + (1-p)B^2(y)$

On a donc $\varepsilon^+(p) = \varepsilon(p)$ si $p \in]0, 1[$. On note :
$gr\varepsilon^+ \equiv \{(\alpha, \beta, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times [0, 1] : (\alpha, \beta) \in \varepsilon^+(p)\}$.

On expliquera plus loin, dans une preuve du chapitre 2, pourquoi on utilise $\varepsilon^+(p)$ et quel sens a cette modification. On peut cependant remarquer que la modification sur les paiements du joueur 1 a lieu lorsque le type concerné a pour probabilité 0, et est donc impossible. Cette modification n'implique donc pas de différence au niveau technique.

Le théorème ci-dessous donne une caractérisation géométrique de l'ensemble des paiements du jeu de communication :

Théorème 1. *Soit $p \in]0, 1[$. Un paiement (α, β) est un paiement d'équilibre du jeu de communication unilatérale $\Gamma_S^0(p)$ si et seulement si (α, β, p) appartient à $conv_\alpha(gr\varepsilon^+)$, l'ensemble obtenu par convexification de $gr\varepsilon^+$ en (β, p), en fixant α le paiement de l'expert. On a donc :*

$\varepsilon_S^0(p) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : (\alpha, \beta, p) \in conv_\alpha(gr\varepsilon^+)\}$

IMPORTANT (intuition derrière le théorème) :

On ne va pas développer la preuve de ce théorème ici, puisqu'on démontrera un théorème semblable, plus large, dans le chapitre 2. On va maintenant essayer d'expliquer l'intuition derrière ce théorème, qui n'a pas été développée dans les articles étudiés.

On remarque que pour convexifier par rapport à p en fixant α, il faut qu'il y ait au moins deux p (p_1 et p_2 par exemple) pour lesquels on obtient le même paiement d'équilibre α pour le joueur 1. En effet, convexifier en ces points permettra alors de maintenir α à son niveau de départ (car on veut α constant : $\lambda \times \alpha + (1-\lambda) \times \alpha = \alpha$). En convexifiant pour cet α, on obtiendra alors l'ensemble des $p \in [p_1, p_2]$. D'après le théorème, on a donc la chose suivante : s'il existe deux jeux sans communication $\Gamma(p_1)$ et $\Gamma(p_2)$ qui ont un équilibre conférant le même paiement α au joueur 1, alors pour tout p dans $[p_1, p_2]$, le jeu AVEC communication $\Gamma_S^0(p)$ admet un équilibre dont le paiement pour le joueur 1 sera α.

On explique l'intuition derrière cette phrase. On suppose pour simplifier qu'il n'existe que deux p (p_1 et p_2) donnant ce paiement α au joueur 1 (le raisonnement s'il y en a plus que deux se déduira facilement de celui-ci). On suppose sans perte de généralité que $p_1 < p_2$. Il faut premièrement remarquer, comme on l'a vu dans l'exemple 4, que le joueur 1, en jouant en mixte, peut modifier les croyances du joueur 2 par rapport à son type. Comme on l'a vu dans cet exemple, si le joueur 1 envoie finalement le message a, cela donne une certaine croyance sur le type k_1 au joueur 2 ($\mathbb{P}(k_1|a)$). S'il envoie le message b, cela en donne une autre ($\mathbb{P}(k_1|b)$). On peut, après réflexion, comprendre que si le message a augmente la croyance du joueur 2 sur le type k_1 par rapport à la croyance de départ, alors le message b la diminue.

En effet, pour que la révélation partielle ait du sens pour le joueur 2, il faut qu'un des deux messages (par exemple a) ait une plus forte probabilité d'être envoyé quand le type est k_1 que quand le type est k_2. Mais dans ce cas, cela signifie que le message b a une plus faible probabilité d'être envoyé quand le type est k_1 que quand le type est k_2. Ainsi, si le message reçu est a, comme il a plus de chances de sortir quand le type est k_1, la probabilité que le type soit k_1 pour le joueur 2 est supérieure à celle de départ. Mais si le message est b, comme il a moins de chances de sortir quand le type est k_1, la probabilité que le type soit k_1 pour le joueur 2 est plus faible que celle de départ.

Ainsi, on a bien que si le message a augmente la croyance du joueur 2 sur le type k_1 par rapport à la croyance de départ, alors le message b la diminue

Supposons que le jeu de communication auquel on est confronté soit $\Gamma_S^0(p)$, avec p dans $[p_1, p_2]$. Il est facile de comprendre avec ce qu'on vient de dire que le joueur 1, en jouant en mixte, peut avec le message a, faire monter la croyance du joueur 2 sur le type k_1 de p à p_2 et en même temps, avec le message b, faire baisser cette croyance de p à p_1. Supposons qu'il agisse ainsi. Ce qu'il faut maintenant comprendre, c'est que le jeu de communication, une fois la phase d'action passée, peut s'apparenter à un jeu sans communication, mais dont la probabilité a été modifiée : en effet, après la phase de communication, le joueur 1 ne joue pas, et le joueur 2 maximise son espérance de gain compte tenu de ses nouvelles croyances sur le type, modifiées ou non pendant la phase de communication. Pour reprendre l'exemple du paragraphe précédent, si le joueur 1 envoie a, le joueur 2 fera alors face à l'équivalent d'un jeu sans communication $\Gamma(\mathbb{P}(k_1|a))$. Ainsi, le paiement (si on veut un équilibre) obtenu par le joueur 1 s'il envoie le message a sera le paiement d'équilibre de $\Gamma(\mathbb{P}(k_1|a))$=$\Gamma(p_2)$, soit α. De même, le paiement (si on veut un équilibre) obtenu s'il envoie le message b sera le paiement d'équilibre de $\Gamma(\mathbb{P}(k_1|b))$=$\Gamma(p_1)$ soit α. Ainsi, quel que soit le message envoyé, si on veut un équilibre, le joueur 1 a le même paiement : il n'a donc pas de déviation profitable. Le joueur 2 non plus, car il joue en maximisant l'espérance de son profit. On a donc bien un équilibre du jeu de communication, pour p dans $[p_1, p_2]$. Pour le paiement du joueur 2, il faut prendre en compte le paiement en fonction de chaque message. On a en effet que le paiement espéré du joueur 2 sera $\mathbb{P}(a) \times [paiement du joueur 2 dans \Gamma(\mathbb{P}(k_1|a)) = \Gamma(p_2)] + (1 - \mathbb{P}(a)) \times [paiement du joueur 2 dans \Gamma(\mathbb{P}(k_1|b)] = \Gamma(p_1)]$. De plus on a bien que la probabilité p du jeu de communication est :

$p_1 \times \mathbb{P}(a) + p_2 \times +(1 - \mathbb{P}(a))$
$= \mathbb{P}(k_1|a) \times \mathbb{P}(a) + \mathbb{P}(k_1|b) \times +(1 - \mathbb{P}(a))$
$= \mathbb{P}(k_1) = p$, en appliquant la formule de la probabilité conditionnelle et les probabilités totales.

On a donc bien que le paiement du joueur 1, le paiement du joueur 2 et la probabilité p sont le fruit de la convexification d'éléments de ε^+ avec le même coefficient $\mathbb{P}(a)$ (on a bien $\mathbb{P}(a) \times \alpha + (1 - \mathbb{P}(a)) \times \alpha = \alpha$), et on a expliqué pourquoi ce triplet appartient à $\Gamma_S^0(p)$. On a donc bien expliqué l'intuition de ce théorème.

Comme on a prit p quelconque dans $[p_1, p_2]$, ce résultat est généralisable avec tout coefficient $\mathbb{P}(a)$ dans $[0, 1]$. On a donc bien expliqué pourquoi la convexification permettait d'obtenir les paiements d'équilibre du jeu de communication.

Convexifier en fixant α revient à convexifier, comme on l'a fait, entre les deux probabilités donnant le même paiement au joueur 1 dans le jeu sans communication, (car $\lambda \times \alpha + (1 - \lambda) \times \alpha = \alpha$). On remarque que les conditions du théorème étaient respectées, et cela a donc bien fonctionné.

Enfin, on remarque que si l'on prend p qui n'appartient pas à $[p_1, p_2]$, on ne peut plus avoir d'équilibre. Supposons par exemple que $p < p_1$ (le cas $p > p_2$ est analogue). On suppose que le message a fasse monter la croyance sur le type k_1 de p à p_1, et que le message b fasse baisser la croyance. On a alors que le paiement (si on veut un équilibre) du joueur 1, si le message envoyé est a, est α, comme expliqué ci-dessus. Cependant, si le message envoyé est b, le paiement (si on veut un équilibre) est forcément différent de α, puisque on a supposé que les seuls jeux sans communication qui conduisaient à ce paiement d'équilibre pour le joueur 1 et le joueur 2 étaient $\Gamma(p_1)$ et $\Gamma(p_2)$. Ainsi, le joueur 1 aura un paiement différent en fonction de si le message est a ou b. Il aura donc une déviation profitable : toujours jouer le message qui donne le meilleur paiement. Cela ne donne donc pas un équilibre. Ce qu'on a fait revient, en termes mathématiques, à convexifier sans fixer α (seul un des deux paiements valait α). En relisant le théorème, on comprend donc pourquoi ça n'a pas fonctionné, et on comprend la nécessité de convexifier en fixant α.

On a développé le mieux possible l'intuition derrière ce théorème. On rappelle qu'il ne s'agit pas d'une preuve, mais plutôt d'une tentative de comprendre ce théorème, avant de l'appliquer à des exemples.

On va appliquer ce théorème à des exemples, parfois en reprenant des exemples précédents.

Exemple introductif

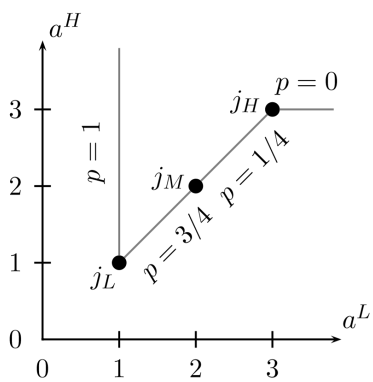
Étudions l'exemple suivant :

	j_H	j_M	j_L	
k_L	$3,-4$	$2,-1$	1,0	p
k_H	3,0	$2,-1$	$1,-4$	$(1-p)$

On calcule les équilibres du jeu sans communication ($\Leftrightarrow$ ENR) :
Si le joueur 2 joue j_H, il obtient un paiement espéré de $(-4)p+0(1-p)=-4p$. S'il joue j_M, il obtient un paiement de -1. Enfin, s'il joue j_L, il obtient $0\times p-4(1-p)=4p-4$. On a $-4p>-1 \Leftrightarrow p<1/4$, $-4p>4p-4 \Leftrightarrow p<1/2$, $-1>4p-4 \Leftrightarrow p<3/4$. On a donc :

$$Y(p)=\begin{cases}\{j_H\} & \text{si } p<1/4,\\ \Delta(\{j_H,j_M\}) & \text{si } p=1/4,\\ \{j_M\} & \text{si } p\in\,]1/4,3/4[,\\ \Delta(\{j_M,j_L\}) & \text{si } p=3/4,\\ \{j_L\} & \text{si } p>3/4.\end{cases}$$

On peut donc, avec ces données, tracer $gr\varepsilon^+$ réduit aux paiements de l'expert :



On explique le graphe (la méthode pour le tracer sera la même dans les autres exemples) :
En effet, quand $p<1/4$, le joueur 2 joue j_H (cf. $Y(p)$) et le paiement de l'expert en k_H et en k_L est 3, sauf en p=0, où k_L n'arrive jamais, et on peut donc prendre, d'après la définition de ε^+, $a^L\geq 3$. Si $p=1/4$, d'après ce qu'on a calculé plus haut, le joueur 2 joue en mixte entre j_H et j_M. Les paiements du joueur 1 prennent donc valeur dans $[2,3]$, ce qui explique que $p=1/4$ correspond sur le graphe au segment $[j_Hj_M]$. Puis $p\in]1/4,3/4[$ correspond au point j_M qui confère au joueur 1 le paiement $(2,2)$, quand $p=3/4$, le joueur 2 joue en mixte entre j_M et j_H, les paiements du joueur 1 sont donc les points sur le segment $[j_Mj_L]$. Enfin, quand $p=1$, la probabilité de k_H est donc nulle, et d'après la définition de ε^+, on autorise a^H à être plus grand que 1.

Pour trouver les paiements d'un ECR ou d'un ENR, il faut un point d'intersection sur le graphe, car cela correspond à un paiement pour le joueur 1 qui existe pour deux probabilités différentes, et cela permet donc, comme on l'a vu dans le théorème et dans son explication, de convexifier sans changer la valeur de α, ce que l'on veut. Sinon, les seuls équilibres sont les ENR décrits par le graphe (les actions optimales du joueur 2) directement (car on ne peut alors convexifier en fixant α, autrement dit la convexification ne modifie rien dans ce cas, car on convexifie entre p et p, ce qui signifie qu'il n'y a pas de convexification). En effet, on a expliqué plusieurs fois plus tôt dans la lecture qu'un ENR était équivalent à un équilibre du jeu sans communication.

Il n'y a pas dans cet exemple de point d'intersection. Comme expliqué ci-dessus, on ne peut donc pas obtenir de nouveaux points par convexification. On a donc $\varepsilon_S^0(p) = \varepsilon(p) \forall p \in]0, 1[$ d'après le théorème 1. Ainsi, tous les équilibres du jeu de communication de cet exemple sont non révélateurs.

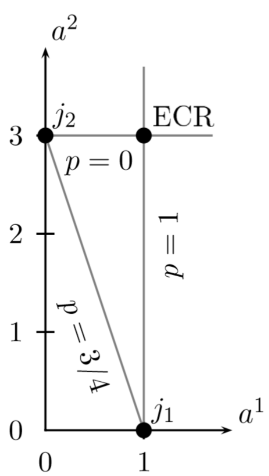
Exemple 1

On rappelle ici le jeu de l'exemple 1 et les stratégies optimales du joueur 2 dans le jeu sans communication.

	j_1	j_2	
k_1	1,1	0,0	p
k_2	0,0	3,3	$(1-p)$

$$Y(p) = \begin{cases} \{j_1\} & \text{si } p > 3/4, \\ \{j_2\} & \text{si } p < 3/4, \\ \Delta(J) & \text{si } p = 3/4. \end{cases}$$

avec la même méthode que l'exemple introductif, on peut donc tracer $gr\varepsilon^+$ réduit aux paiements de l'expert.



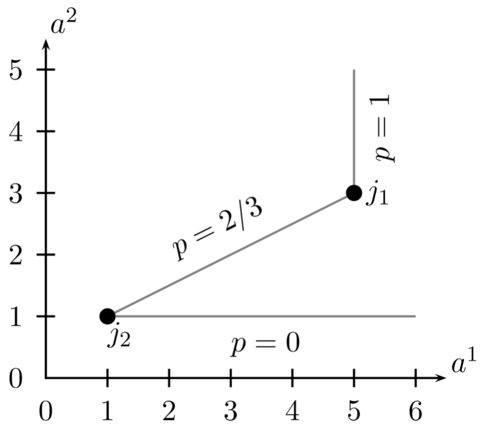
Il y a ici un point d'intersection entre la demi-droite correspondant à $p = 0$ et celle correspondant à $p = 1$ au point $\alpha = (1, 3)$. Ainsi, en convexifiant entre 0 et 1 en fixant $\alpha = (1, 3)$, on obtient que $\forall p \in]0, 1[$ le jeu de communication dispose d'un équilibre autre qu'un ENR, qui confère le paiement $(1, 3)$ au joueur 1. Le paiement $(1, 3)$ signifie on le rappelle 1 si le type est k_1, 3 si le type est k_2. On voit bien que cela correspond à l'ECR qu'on avait trouvé dans l'exemple 1.

Exemple 2

On rappelle le jeu et les actions optimales du joueur 2 dans le jeu sans communication :

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & j_1 & j_2 & \\
\hline
k_1 & 5{,}2 & 1{,}0 & p \\
k_2 & 3{,}0 & 1{,}4 & (1-p)
\end{array}
\qquad
Y(p) = \begin{cases} \{j_1\} & \text{si } p > 2/3, \\ \{j_2\} & \text{si } p < 2/3, \\ \Delta(J) & \text{si } p = 2/3. \end{cases}
$$

On peut donc tracer $gr\varepsilon^+$ réduit aux paiements de l'expert, avec la même méthode que dans l'exemple introductif :



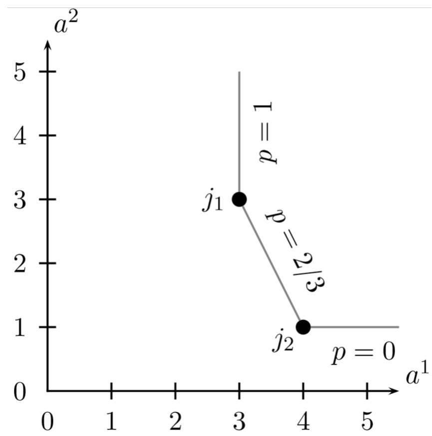
On voit ici qu'il n'y a pas de points d'intersection. Il n'y a donc que des paiements d'ENR dans les équilibres de ce jeu de communication, car la convexification par rapport au paiement du joueur 1 de $gr\varepsilon^+$ donne $gr\varepsilon^+$, c'est à dire que tous les paiements d'équilibre sont des paiements d'équilibre du jeu sans communication.

Exemple 3

On rappelle le jeu et les actions optimales du joueur 2 dans le jeu sans communication :

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & j_1 & j_2 & \\
\hline
k_1 & 3{,}2 & 4{,}0 & p \\
k_2 & 3{,}0 & 1{,}4 & (1-p)
\end{array}
\qquad
Y(p) = \begin{cases} \{j_1\} & \text{si } p > 2/3, \\ \{j_2\} & \text{si } p < 2/3, \\ \Delta(J) & \text{si } p = 2/3. \end{cases}
$$

On peut donc tracer $gr\varepsilon^+$ réduit aux paiements de l'expert :



On voit ici qu'il n'y a pas de points d'intersection. Pour les mêmes raisons que dans l'ex 2, il n'y a donc que des paiements d'ENR dans les équilibres de ce jeu de communication.

Exemple 5

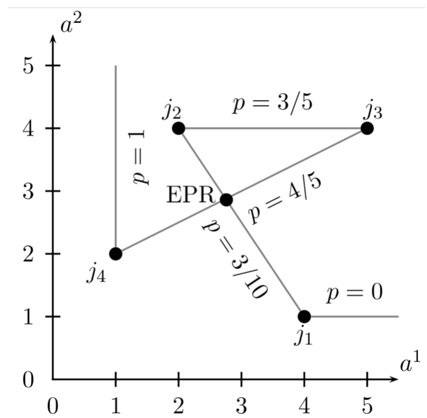
On considère un nouvel exemple qui permet d'illustrer le théorème 1 dans le cas d'un équilibre partiellement révélateur (EPR). Le jeu sans communication est défini ci-dessous :

	j_1	j_2	j_3	j_4	
k_1	4,0	2,7	5,9	1,10	p
k_2	1,10	4,7	4,4	2,0	$1-p$

Comme dans tous les jeux sans communication précédents, le joueur 2 maximise son espérance de gain. Après calculs, on obtient les actions optimales :

$$Y(p) = \begin{cases} \{j_1\} & \text{si } p < 3/10 \\ \{j_2\} & \text{si } p \in]3/10{,}3/5[\\ \{j_3\} & \text{si } p \in]3/5{,}4/5[\\ \{j_4\} & \text{si } p > 4/5, \end{cases}$$

Avec la même méthode que précédemment, on peut donc tracer $gr\varepsilon^+$ réduit aux paiements de l'expert :



On remarque l'existence d'un point d'intersection entre le segment $[j_1 j_2]$ et le segment $[j_3 j_4]$. On peut donc convexifier $gr\varepsilon^+$ en fixant α à ce point d'intersection. Il s'agit donc d'après le théorème 1 d'un paiement d'équilibre du jeu de communication (pour le joueur 1). On veut trouver les coordonnées de ce point α :

On cherche premièrement l'équation de la droite qui passe par j_1 et j_2. Son coefficient directeur est : $\frac{4-1}{2-4} = \frac{-3}{2} = -1,5$. L'équation de la droite $(j_1 j_2)$ s'écrit donc : $a^2 = -1,5a^1 + b$, avec b l'ordonnée à l'origine. En évaluant cette formule en (a^1,a^2)=(4,1), on obtient : $1 = -6 + b$, soit encore $b = 7$. L'équation de la droite $(j_1 j_2)$ est donc $a^2 = -1,5a^1 + 7$.

On cherche de même l'équation de la droite qui passe par j_3 et j_4. Son coefficient directeur est : $\frac{4-2}{5-1} = \frac{1}{2} = 0,5$. L'équation de la droite $(j_1 j_2)$ s'écrit donc : $a^2 = 0,5a^1 + b$, avec b l'ordonnée à l'origine. En évaluant cette formule en (a^1,a^2)=(5,4), on obtient : $4 = 0,5 \times 5 + b$, soit encore $b = 1,5$. L'équation de la droite $(j_1 j_2)$ est donc $a^2 = 0,5a^1 + 1,5$.

On résout donc :
$-1,5a^1 + 7 = 0,5a^1 + 1,5$
$\Leftrightarrow 2\mathrm{a}_1 = 5,5$
$\Leftrightarrow \mathrm{a}_1 = 5,5/2 = 11/4$
Puis $a^2 = 0,5 \times 11/4 + 1,5 = 11/8 + 12/8 = 23/8$.

Le point d'intersection est donc $\alpha =(a^1,a^2)$=(11/4,23/8). Ce point correspond à l'intersection de la droite des paiements quand $p = 4/5$ et $p = 3/10$.

On peut donc convexifier $gr\varepsilon^+$ par rapport à α=(11/4,23/8). On a donc par le théorème 1 que si $p \in]3/10, 4/5[$, il existe un équilibre autre qu'un ENR dans le jeu de communication.

On sait de plus que cet équilibre est un EPR. En effet, supposons que c'est un ECR. Alors le joueur 2 connaît le véritable type grâce au joueur 1. Or, quel que soit le type, il existe une unique action qui maximise le profit du joueur 2 : j_4 pour le k_1, j_1 pour le k_2 (cf. tableau). Le joueur 2 ne joue donc pas en mixte. Or, le point (11/4,23/8) est sur $[j_1 j_2]$ et sur $[j_3 j_4]$, ce qui signifie que le joueur 2 peut jouer en mixte soit entre j_1 et j_2 soit entre j_3 et j_4 selon le signal reçu (ce qui signifie que plusieurs actions confèrent le même paiement). C'est donc ABSURDE. Ce n'est donc pas un ECR. C'est donc un EPR. De plus, on a déjà dit qu'une stratégie mixte du joueur 2 sert essentiellement à rendre le joueur 1 indifférent entre deux messages, pour qu'il puisse jouer en mixte. On pouvait donc déjà avoir l'intuition du fait que cet équilibre était un EPR. Donc, si $p \in]3/10, 4/5[$, d'après le théorème 1, il existe un EPR qui confère le paiement $11/4p + (23/8)(1-p)$ au joueur 1.

Si $p \notin]3/10, 4/5[$, cela ne correspond pas au point d'intersection, et tous les équilibres du jeu sont donc non révélateurs.

1.3 Jeux monotones

On va maintenant étudier un nouveau type de jeu, toujours dans le modèle décrit depuis le début du chapitre : les jeux monotones.

On définit les jeux monotones de la manière suivante :
Les paiements du joueur 1 sont indépendants du type. On a donc $A^k(j) = A(j)\ \forall j \in J$ et $k \in K$ où K est de cardinal fini.
De plus, les préférences sont strictement monotones si : $A^k(j_i) > A^k(j_{i'}) \Leftrightarrow i > i^{'}, \forall k \in K$, soit aucune action ne confère le même paiement au joueur 1 pour un type donné.

Ce type de préférences peuvent illustrer de nombreuses situations économiques. Par exemple, quand quelle que soit la situation, l'expert cherche à maximiser une donnée : par exemple un travailleur qui désire le salaire le plus élevé indépendamment de ses qualifications. On introduit le théorème suivant sur les jeux de communication monotone. On considère un ensemble quelconque de types K, de cardinal supérieur ou égal à 2.

Théorème 2. *Dans un jeu de communication strictement monotone, tout équilibre de Nash où le décideur (joueur 2) joue en stratégie pure est non révélateur.*

Preuve : On suppose un jeu de communication monotone, et un équilibre de Nash qui n'est pas un ENR, dans lequel le joueur 2 joue en pur. Ainsi, il a une stratégie qui prévoit une seule action pour chaque message reçu. Ces deux actions sont forcément différentes, car si c'était les mêmes, l'équilibre serait un ENR (car le joueur 2 jouerait alors sans prendre en compte le message donné, comme dans un jeu sans communication). Or, les préférences du joueur 1 sont strictement monotones, ce qui signifie que les deux actions différentes ne lui confèrent pas le même paiement. Le joueur 1 aura donc intérêt à toujours dévier vers le message qui engendre l'action qui maximise son profit quel que soit le type. Il y a donc une déviation profitable. Ce n'est donc pas un équilibre. On a donc prouvé par l'absurde que les seuls équilibres de Nash ou le joueur 2 joue en pur sont des ENR dans les jeux de communication monotone.

L'objectif des deux exemples suivants est de montrer l'importance de l'hypothèse "le joueur 2 joue en stratégies pures" dans le théorème 2. On va voir dans l'exemple 6 qu'il peut exister un ECR si le joueur 2 joue en mixtes et que $argmax_{j \in J} B^k(j)$ n'est pas unique pour tout type k. L'exemple 7 montre que même si $argmax_{j \in J} B^k(j)$ est unique pour tout type k, si le joueur 2 joue en mixte, il peut exister un EPR. L'intuition derrière cet exemple 7 est que le fait que le décideur joue en mixte peut permettre de rendre l'expert indifférent entre deux messages, même si ses préférences sont monotones. L'expert, lui, rend le décideur indifférent entre les deux actions grâce à une révélation partielle de l'information, qui modifie les croyances du décideur sur le type.

Exemple 6

On considère le jeu suivant :

	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5
k_1	1,2	2,0	3,3	4,0	5,3

k_2	1,2	2,3	3,0	4,3	5,0

On voit premièrement que le jeu est bien un jeu de préférences strictement monotones : les paiements du joueur 1 ne dépendent pas de son type, et il n'y a pas deux actions différentes qui donnent le même paiement au joueur 1. Ici, $argmax_{j\in J}B^k(j)$ n'est pas unique quel que soit le type k.

Montrons que ce jeu admet un ECR. On va donc chercher un équilibre dans lequel la stratégie σ de l'expert est du type : $\sigma(k_1)$=a, $\sigma(k_2)$=b.

On sait déjà que le joueur 2 doit jouer en mixte. Sinon, d'après le théorème 2, il n'y aurait pas d'ECR. De plus, comme la stratégie du joueur 1 est complètement révélatrice, pour que le joueur 2 n'ait pas de déviation profitable, il doit forcément jouer en mixte sur j_3 et j_5 s'il reçoit a, sur j_2 et j_4 s'il reçoit b, car ce sont les actions qui maximisent le profit du joueur 2 respectivement en k_1 et en k_2.

De plus, pour que le joueur 1 n'ait pas de déviation profitable, il faut que les deux messages lui confèrent le même paiement. On pose τ(a)=$\lambda_1 j_3 + (1-\lambda_1)j_5$ et τ(b)=$\lambda_2 j_2 + (1-\lambda_2)j_4$. Il faut donc d'après ce que l'on vient de dire que : $3\lambda_1 + 5(1-\lambda_1)$=$2\lambda_2 + 4(1-\lambda_2)$
$\Leftrightarrow 5-2\lambda_1 = 4-2\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0.5+\lambda_2$.
En particulier, si on choisit $\lambda_2 = 1/6$, alors on doit prendre $\lambda_1 = 0.5 + 1/6 = 2/3$.

On a donc réuni les conditions pour que les deux joueurs n'aient aucune déviation profitable. On a donc que le profil d'action : ($\sigma(k_1)$=a $\sigma(k_2)$=b,τ(a)=2/3 j_3 + 1/3 j_5 τ(b)=1/6 j_2 + 5/6 j_4) est un ECR.
De plus tout profil :($\sigma(k_1)$=a, $\sigma(k_2)$=b,τ(a)=$\lambda_1 j_3 + (1-\lambda_1)j_5$ τ(b)=$\lambda_2 j_2 + (1-\lambda_2)j_4$), avec $\lambda_1 = 0.5 + \lambda_2$ est un ECR (tant que $(\lambda_1,\lambda_2)\in]0,1[^2$).

On a donc bien que sans l'hypothèse "le joueur 2 joue en pur", il peut exister des équilibres autres que non révélateurs dans les jeux monotones.

Exemple 7

On considère le jeu suivant. On suppose de plus que $\mathbb{P}(k_1) = 3/10$.

	j_1	j_2	j_3
k_1	1,7	2,0	3,4

k_2	1,7	2,10	3,9

On voit premièrement que le jeu est bien un jeu de préférences strictement monotones : les paiements du joueur 1 ne dépendent pas de son type, et il n'y a pas deux actions différentes qui donnent le même paiement au joueur 1. Ici, $argmax_{j \in J} B^k(j)$ est unique quel que soit le type k.

On sait que le jeu n'admet pas d'ECR, car si le joueur 1 utilise une stratégie complètement révélatrice, le joueur 2 maximisera son paiement, et comme $argmax_{j \in J} B^k(j)$ est unique quel que soit le type, le joueur 2 jouerait forcément en pur. D'après le théorème 2, il n'existe donc pas d'ECR dans ce jeu.

Montrons que ce jeu admet un EPR. On sait d'après le théorème 2 que le joueur 2 doit jouer en mixte pour que cet équilibre existe. On fixe donc une stratégie mixte du joueur 2, par exemple : $\tau(a) = 2/3\ j_2 + 1/3\ j_3$ et $\tau(b) = 1/3\ j_1 + 2/3\ j_3$.

On veut de plus que la stratégie de l'expert soit partiellement révélatrice. On pose la stratégie $\sigma(k_1) = 1/3a + 2/3b, \sigma(k_2) = 4/7a + 3/7b$

On commence par calculer les croyances du joueur 2 sur le type du joueur 1 selon le message reçu :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(k_1|a) = \frac{\mathbb{P}(a|k_1)\mathbb{P}(k_1)}{\mathbb{P}(a)} \\ \\ \mathbb{P}(k_2|a) = 1 - \mathbb{P}(k_1|a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(k_1|a) = \frac{1/3 \times 3/10}{1/3 \times 3/10 + 4/7 \times 7/10} = 1/5 \\ \\ \mathbb{P}(k_2|a) = 1 - \mathbb{P}(k_1|a) = 4/5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(k_1|b) = \frac{\mathbb{P}(b|k_1)\mathbb{P}(k_1)}{\mathbb{P}(b)} \\ \\ \mathbb{P}(k_2|b) = 1 - \mathbb{P}(k_1|b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(k_1|b) = \frac{2/3 \times 3/10}{2/3 \times 3/10 + \ 3/7 \times 7/10} = 2/5 \\ \\ \mathbb{P}(k_2|b) = 1 - \mathbb{P}(k_1|b) = 3/5 \end{cases}$$

On calcule maintenant les paiements du joueur 1 et du joueur 2 selon le type et le message envoyé :

1) Si le joueur 1 envoie le message a :
si on est en k_1 : le joueur 2 joue $2/3\ j_2 + 1/3\ j_3$.
$\Rightarrow$ paiement $= (2/3 \times 2 + 1/3 \times 3, 2/3 \times 0 + 1/3 \times 4) = (7/3, 4/3)$

si on est en k_2 : le joueur 2 joue $2/3\ j_2 + 1/3\ j_3$.
$\Rightarrow$ paiement $= (2/3 \times 2 + 1/3 \times 3, 2/3 \times 10 + 1/3 \times 9) = (7/3, 29/3)$

2) Si le joueur 1 envoie le message b :
si on est en k_1 : le joueur 2 joue $1/3\ j_1 + 2/3\ j_3$.
$\Rightarrow$ paiement $= (1/3 \times 1 + 2/3 \times 3, 1/3 \times 7 + 2/3 \times 4) = (7/3, 15/3)$

si on est en k_2 : le joueur 2 joue $1/3\ j_1 + 2/3\ j_3$.
$\Rightarrow$ paiement $= (1/3 \times 1 + 2/3 \times 3, 1/3 \times 7 + 2/3 \times 9) = (7/3, 25/3)$

On voit premièrement que le joueur 1 n'a aucune déviation profitable. En effet, qu'il envoie le message a ou b, il obtient quel que soit son type un paiement de 7/3.

Montrons que le joueur 2, le décideur, n'a aucune déviation profitable.
Supposons qu'il reçoit le message a. S'il joue j_1, il reçoit un paiement de 7. S'il joue j_2, il reçoit un paiement de $\mathbb{P}(k_1|a) \times 0 + \mathbb{P}(k_2|a) \times 10 = 1/5 \times 0 + 4/5 \times 10 = 8$. S'il joue j_3, il reçoit un paiement de $\mathbb{P}(k_1|a) \times 4 + \mathbb{P}(k_2|a) \times 9 = 1/5 \times 4 + 4/5 \times 9 = 8$. Donc le paiement du joueur 2, s'il reçoit a, est maximisé quand il joue soit j_2 soit j_3, et vaut 8. Donc, toute stratégie mixte entre j_2 et j_3 est optimale quand le joueur 2 reçoit a. Donc, quand il reçoit a, le joueur 2 n'a pas de déviation profitable.
Supposons qu'il reçoit le message b. S'il joue j_1, il reçoit un paiement de 7. S'il joue j_2, il reçoit un paiement de $\mathbb{P}(k_1|b) \times 0 + \mathbb{P}(k_2|b) \times 10 = 2/5 \times 0 + 3/5 \times 10 = 6$. S'il joue j_3, il reçoit un paiement de $\mathbb{P}(k_1|b) \times 4 + \mathbb{P}(k_2|b) \times 9 = 2/5 \times 4 + 3/5 \times 9 = 7$. Donc le paiement du joueur 2, s'il reçoit b, est maximisé quand il joue soit j_1 soit j_3, et vaut 7. Donc, toute stratégie mixte entre j_1 et j_3 est optimale quand le joueur 2 reçoit b. Donc, quand il reçoit b, le joueur 2 n'a pas de déviation profitable.

Ainsi, aucun des deux joueurs n'a de déviation profitable : c'est bien un équilibre de Nash et donc un EPR (stratégie de l'expert partiellement révélatrice).

Donc, même si $argmax_{j \in J} B^k(j)$ est unique, si le joueur 2 joue en mixte, il peut exister un équilibre autre qu'un ENR, comme ci-dessus. D'où l'importance de l'hypothèse : "le joueur 2 joue en pur" dans le théorème 2.

On peut maintenant calculer le paiement final espéré, pour le joueur 2, de cet EPR. On commence par calculer les paiements du joueur 2 si le joueur 1 joue a ou b, puis le paiement espéré final :
Si le joueur 1 joue a : paiement$= \mathbb{P}(k_1|a) \times 4/3 + \mathbb{P}(k_2|a) \times 29/3 = 1/5 \times 4/3 + 4/5 \times 29/3 = 8$
On aurait aussi pu dire que le joueur 2 joue en mixte entre j_2 et j_3, qui lui confèrent tous les deux un paiement de 8 quand l'expert joue a (voir plus haut).
Si le joueur 1 joue b : paiement$= \mathbb{P}(k_1|b) \times 15/3 + \mathbb{P}(k_2|b) \times 25/3 = 2/5 \times 15/3 + 3/5 \times 25/3 = 7$
On aurait aussi pu dire que le joueur 2 joue en mixte entre j_1 et j_3, qui lui confèrent tous les deux un paiement de 7 quand l'expert joue b (voir plus haut).
De plus, on a vu en calculant les probabilités conditionnelles que $\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(b) = 1/2$. Le paiement espéré du joueur 2 pour cet EPR est donc $1/2 \times 8 + 1/2 \times 7 = 7.5$.

Pour le joueur 1, que le type soit k_1 ou k_2, il gagnera toujours 7/3. Ainsi, le paiement s'écrit, en respectant les notations de la section précédente, $(7/3, 7/3, 7.5)$.

Chapitre 2

Modèle de Aumann et Hart

On a vu un premier modèle, dans lequel il n'y a qu'un unique message provenant du joueur 1. C'est un modèle simplifié, qui permet de comprendre les bases de la notion. Nous allons maintenant étudier un modèle plus complexe, celui développé par Aumann et Hart dans leur article de 2003 : *Long cheap talk*.

Tout ce qui a été présenté dans l'introduction est valable pour les deux modèles (par exemple on a toujours que seul le joueur 1 est mis au courant du type). Il y a plusieurs différences avec le modèle précédent. Premièrement, il peut y avoir plus de deux types ($|K| \geq 2$). Une deuxième différence, et peut-être la plus importante, est la phase de communication. Premièrement, contrairement au modèle précédent, où il n'y avait de communication que sur un temps, ici la phase de communication, initiée au temps t0=1, a une durée infinie (on peut la rendre finie en dénaturant le sens des messages à partir d'un certain temps. Par exemple à partir du temps T, les deux joueurs envoient toujours un même message quoiqu'il arrive). De plus, le joueur 2 aussi peut communiquer, de manière simultanée avec le joueur 1 (les deux peuvent communiquer sur une même période). Enfin, dans la phase d'action, il est possible que le joueur 1 aussi puisse choisir une action (plusieurs lignes dans chaque matrice de type).

Ce modèle introduit par Aumann et Hart est donc plus large que celui du premier chapitre, mais le contient : on peut rendre la communication finie en dénaturant le sens des messages à partir du temps T=1, ne donner qu'une action possible au joueur 1, ...
Il paraît donc intuitif, et on verra que c'est le cas, qu'il y ait plus de paiements d'équilibres dans ce jeu de communication que dans le chapitre précédent. C'est l'intérêt de l'étude de ce modèle, plus complexe.
On pourrait se demander pourquoi donner au joueur 2 la possibilité de communiquer puisqu'il ne dispose d'aucune information. On verra plus tard que c'est surtout cet aspect du modèle qui permet d'augmenter les paiements d'équilibre. En effet, la communication du joueur 2, comme on le verra, permettra de simuler des loteries, permettant des compromis aux deux joueurs.

Comme pour le premier chapitre, on commence par étudier des exemples pour comprendre le modèle. Nous étudierons ensuite deux théorèmes, et passerons beaucoup de temps sur le deuxième, qui est l'équivalent du théorème 1 (chap 1) dans notre modèle.

2.1 Exemples introductifs

Ces exemples sont sur une période de temps finie. On rappelle, bien que ce point n'ait pas été abordé dans l'article, que cela est possible dans ce modèle où la phase de communication doit être infinie, en décrédibilisant les messages à partir d'un temps T (les deux joueurs envoient toujours un même message quoiqu'il arrive à partir de ce temps). On a alors que c'est assimilable à une phase finie qui s'arrête au temps T.
On a fait la remarque que le modèle de ce chapitre est plus complexe que le premier, mais surtout plus général : les exemples du chapitre 1 fonctionnent parfaitement dans ce modèle, ainsi que la notion d'ECR, EPR et ENR (notions valables dans ce chapitre que quand la phase de communication rentre dans le modèle du chapitre 1).

Exemple 1

	L	R
U	$6,2$	$0,0$
D	$0,0$	$2,6$

Cet exemple est particulier puisqu'il n'y a qu'un seul type, qu'une seule matrice. Le joueur 1 ne dispose donc pas d'information supplémentaire. Pourtant, on va voir que la communication peut amener à des nouveaux paiements. Dans le jeu sans communication, il y a deux équilibres de Nash, UL et DR (dans ces situations, aucun joueur n'a de déviation profitable).

Cependant, comme on l'a expliqué plutôt, la communication simultanée entre deux joueurs peut permettre de faire des compromis. Il existe donc un autre équilibre à ce jeu que l'on peut décrire de la manière suivante : "simultanément, le joueur 1 et le joueur 2 envoient le message a ou b. Si les deux messages envoyés sont les mêmes, on joue UL, sinon on joue DR". On considère que la probabilité d'envoyer le message a ou le message b est la même et vaut 1/2. Ainsi, on arrive à un paiement espéré de (4,4). Cette situation est bien un équilibre, car si l'un des deux joueurs décide ne pas respecter le résultat de la loterie, et de dévier, il obtiendra un paiement de 0, puisque l'autre joueur respecte le résultat de la loterie, car on fixe la stratégie de l'autre joueur, puisqu'on étudie une déviation profitable.
Il faut également, si l'on est rigoureux, faire en sorte qu'aucun des deux joueurs ne décide de ne pas participer à la loterie (ne pas envoyer de message). On peut donc imaginer de plus dans les stratégies, bien que ce n'est précisé dans aucun exemple dans le papier de Aumann et Hart, que si par exemple le joueur 1 décide de ne pas participer à la loterie, soit de ne pas envoyer de message, le joueur 2 le punisse en jouant tout le temps R, ce qui confère au joueur 1 un paiement toujours inférieur à 4 (soit 0 soit 2). Le même raisonnement peut se faire dans le cas symétrique. Ces "menaces non crédibles" permettraient d'assurer le fait que ne pas participer à la loterie ne soit pas une déviation profitable. Il est de toute façon naturel de penser que ne pas participer à la loterie est négatif, car la loterie permet d'éviter les paiements (0,0) en faisant des compromis.

Ce nouveau modèle où les deux joueurs peuvent communiquer apporte donc de nouveaux équilibres possibles, où la finalité de la communication n'est pas forcément de révéler de l'information, mais également de faire des accords.

Exemple 2

$$T \quad \begin{array}{c|c|c|c|} & L & R & A \\ \hline U & 6,2 & 0,0 & 3,0 \\ \hline D & 0,0 & 2,6 & 3,0 \\ \hline \end{array} \quad \frac{1}{2}$$

$$B \quad \begin{array}{c|c|c|c|} & L & R & A \\ \hline U & 0,0 & 0,0 & 4,4 \\ \hline D & 0,0 & 0,0 & 4,4 \\ \hline \end{array} \quad \frac{1}{2}$$

Dans ce jeu, il y a deux types possibles ($K = \{T, B\}$) et les deux joueurs peuvent agir. On voit premièrement ici que dans le cas du type B, les intérêts convergent et les deux joueurs ont intérêt à ce que le joueur 2 joue A, avec un paiement (4,4). Si le type est T, il y a deux équilibres dans le sous-jeu, UL et DR. En informant le joueur 2 si le type est T et en faisant un compromis de la même manière que dans l'exemple précédent, on arrive alors également à un paiement espéré de (4,4) en T, ce qui est optimal.

Montrons donc que le profil d'action suivant est un équilibre : " Le joueur 1 révèle quel est le type. Si le type est B, le joueur 2 joue A et le joueur 1 joue U. Si le type est T, les deux joueurs effectuent une loterie à l'aide de messages simultanés. Si les deux messages sont les mêmes (*aa* et *bb*), ils jouent UL. Sinon, ils jouent DR." Notons que l'action du joueur 1 si le type est B n'a pas d'influence. On a donc également un équilibre si le joueur 1 joue D en B (les deux ont le même paiement).

Premièrement, le joueur 2 n'a pas de déviation profitable. On peut raisonner en terme de types puisque le joueur 1 les révèle au joueur 2 dans sa stratégie. En effet, si le type est B, l'action A maximise le profit du joueur 2 (4 vs 0). Si le type est T, s'il décide de ne pas respecter le résultat de la loterie et de dévier, son paiement espéré baisse et passe de 4 à 0 (s'il ne respecte pas l'accord). De plus, on peut imaginer comme dans l'exemple précédent que dans la stratégie du joueur 1, il existe une "menace non crédible" du type : "si le joueur 2 ne participe pas à la loterie ; c'est-à-dire n'envoie pas de message, je joue toujours U, ce qui donne au joueur 2 un paiement de 0 ou de 2, soit toujours inférieur à 4. Ainsi, le joueur 2 n'a aucune déviation profitable.

De plus, le joueur 1 n'a aucune déviation profitable. En effet, si le type est B, son action ne change rien au profit. Si le type est T, s'il décide de ne pas respecter le résultat de la loterie et de dévier, son paiement espéré baisse et passe de 4 à 0 (s'il ne respecte pas l'accord). De plus, on peut imaginer que dans la stratégie du joueur 2, il existe une "menace non crédible" du type : "si le joueur 1 ne participe pas à la loterie ; c'est-à-dire n'envoie pas de message, je joue toujours R, ce qui donne au joueur 1 un paiement de 0 ou de 2, soit toujours inférieur à 4. De plus, si le type est B et que le joueur 1 annonce que le type est T, que le joueur 1 respecte ou non la loterie et qu'il y participe ou non, il aura toujours un paiement de 0, soit inférieur à 4. Si le type est T et que le joueur 1 annonce B, le joueur 2 jouera A et le paiement du joueur 1 sera 0, soit inférieur à 4. Ainsi, le joueur 1 n'a aucune déviation profitable.

On remarque cependant qu'il faut bien que l'information du type soit donnée avant le compromis. Supposons qu'on inverse les deux phases. Si la loterie donne, par exemple, qu'il faudra jouer DR si le type est T, alors si le type est vraiment T, le joueur 1 à intérêt à dévier (à mentir) et à dire que le type est B. Le joueur 2 jouera alors A, ce qui donnera un paiement de 3 au joueur 1, au lieu de 2 s'il n'avait pas dévié. Il y a donc alors une déviation profitable : l'ordre des phases est important.

Exemple 3

	LL	L	C	R	RR	
T	$1,10$	$3,8$	$0,5$	$3,0$	$1,-8$	$\frac{1}{2}$

	LL	L	C	R	RR	
B	$1,-8$	$3,0$	$0,5$	$3,8$	$1,10$	$\frac{1}{2}$

On reconnaît ici l'exemple 4 du chapitre 1.
On va voir en quoi le modèle du chapitre 2 permet d'apporter de nouveaux paiements, grâce à la faculté du joueur 2 de communiquer.

On remarque que ce jeu a deux types, et que le joueur 1 n'a pas d'action possible, hormis la communication. On sait, en reprenant l'exemple 4 du chapitre 1, que le jeu admet un ENR, où le joueur 2 maximise son espérance de paiement et joue donc C, pour un paiement (0,5).
On sait également (cf ex4 chap 1) qu'il existe un EPR dans lequel le joueur 1 joue $\sigma(T) = 3/4 \times a + 1/4 \times b, \sigma(B) = 1/4 \times a + 3/4 \times b$ et le joueur 2 joue L si le message reçu est a, R si le message reçu est b. Cela donne lieu à un paiement espéré final de (3,6).
On sait enfin (cf ex4 chap 1) qu'il existe un ECR, dont le paiement final est (1,10).

Ici, on voit que l'équilibre le plus profitable au joueur 1 est l'EPR (paiement de 3), et celui le plus profitable au joueur 2 est l'ECR (paiement de 10). On peut donc imaginer un autre équilibre, en utilisant la faculté dans ce chapitre du joueur 2 de communiquer, pour créer un compromis entre ces deux équilibres.

Ainsi, montrons que le profil : "le joueur 1 et le joueur 2 envoient simultanément un message de manière aléatoire entre a et b. Si les deux messages sont identiques, on joue l'ECR décrit plutôt. Sinon, on joue l'EPR." est un équilibre.
On arrive à un paiement espéré de (2,8). Comme précédemment, on peut très bien imaginer des "menaces non crédibles" du joueur 2, forçant le joueur 1 à participer à la loterie et à respecter son résultat. Par exemple, si la loterie désigne l'ECR et que le joueur 1 choisit de jouer de manière partiellement révélatrice, alors le joueur 2 joue C, ce qui confère au joueur 1 un paiement de 0 (donc plus faible que s'il avait respecté le résultat). On peut de même imaginer une "menace non crédible" du joueur 1 forçant le joueur 2 à participer à la loterie, en jouant de manière non révélatrice si le joueur 2 ne participe pas, ce qui conduit à un paiement pour le joueur 2 de 5, soit inférieur à 6 et à 10. Le joueur 1 n'a pas besoin de forcer le joueur 2 à respecter le résultat de la loterie, car cette loterie ne concerne que la manière dont le joueur 1 révèle son information (le joueur 2 maximise ensuite son profit comme dans l'équilibre tiré au sort). Une fois la phase de communication passée, il n'y a pas non plus de déviation profitable car le joueur 2 joue alors en maximisant son profit.

Cette manière de faire des compromis entre plusieurs équilibres est à retenir : elle est importante pour comprendre certaines intuitions dans le dernier théorème que l'on va étudier. Elle donne également une intuition du fait qu'il y a plus de paiements d'équilibre possible dans ce modèle que dans le précédent, où ce genre de compromis n'était pas possible.

Exemple 4

	LL	L	C	R	RR	A	
T	$1,10$	$3,8$	$0,5$	$3,0$	$1,-8$	$2,0$	$\frac{1}{3}$

	LL	L	C	R	RR	A	
B	$1,-8$	$3,0$	$0,5$	$3,8$	$1,10$	$2,0$	$\frac{1}{3}$

	LL	L	C	R	RR	A	
BB	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$2,8$	$\frac{1}{3}$

Ici, on remarque que si on enlève le type BB, on retrouve le jeu précédent, puisque la stratégie "le joueur 2 joue A" y est alors strictement dominée. On peut donc trouver l'équilibre suivant :" le joueur 1 révèle si le type est BB ou non. Si le type est BB, le joueur 2 joue A, ce qui donne un paiement de (2,8). Si le type n'est pas BB, on retrouve l'exemple précédent, car T et B sont équiprobables. Ainsi, on joue l'équilibre de compromis décrit à la fin du dernier exemple qui donne un paiement de (2,8)." Le paiement final est donc (2,8).
En effet, le joueur 2 ne veut pas dévier : dans un cas il se retrouve dans l'équilibre de l'exemple précédent, dans l'autre il maximise son profit en jouant A.
Le joueur 1 ne veut pas dévier : si le type est BB et qu'il annonce que ce n'est pas BB, il obtient un paiement final de 0, car le joueur 2 ne joue alors jamais A. Il n'y a donc pas d'intérêt à mentir. Si le type est T ou B et qu'il annonce que le type est BB, le joueur 2 joue A et le paiement du joueur 1 reste inchangé (=2). Là encore, il n'y a pas d'intérêt à mentir.
On a donc bien un équilibre.

2.2 Premier théorème

Après avoir étudié quelques exemples introductifs, nous allons maintenant étudier deux théorèmes importants de ce modèle.

On rappelle que le temps initial de la phase de communication est t0=1.
On dit qu'une paire de stratégies dans ce modèle est canonique si elle a la forme suivante : dans la phase de communication, les temps pairs sont utilisés pour des loteries (de la même manière que l'on a vu dans les exemples), les temps impairs pour des signaux unilatéraux du joueur 1 au joueur 2. Un équilibre est dit canonique si la paire de stratégies qui le constitue est canonique.

Théorème 3. *Dans le jeu de communication défini par le modèle du chapitre 2, un vecteur (α,β) est un paiement d'équilibre si et seulement si c'est le paiement d'un équilibre canonique.*

Ce théorème montre que la phase de communication peut être vue comme une suite de loteries et de révélations du joueur 1 interposées, comme on a vu dans certains exemples. En interprétant les phases de loteries comme des phases de négociations (issue incertaine), ce modèle induirait que les révélations entrecoupées par des négociations serait quelque chose de naturel en cheap talk. On va maintenant donner une preuve informelle de ce théorème.

Preuve : Supposons, pour simplifier, qu'il n'y a que deux messages possibles, a et b. L'implication "si" est immédiate. Prouvons donc l'implication "seulement si". Soit (σ',τ') un équilibre du jeu représenté par notre modèle, avec σ' la stratégie du joueur 1 et τ' la stratégie du joueur 2. Pour montrer notre implication, on veut donc construire un équilibre canonique (σ,τ) qui donne le même paiement.

Dans notre modèle, pour être rigoureux, on considère qu'à chaque temps de la phase de communication, le joueur 1 et le joueur 2 s'envoient des messages simultanés. Cependant, dans les périodes où le joueur 1 révèle de l'information (on n'est donc pas dans une loterie), le message du joueur 2 n'a généralement pas de sens ou d'utilité, et on ne le considère pas, comme dans les exemples vus plus tôt. Mais de manière rigoureuse, dans le modèle, à chaque période de temps les deux joueurs s'envoient simultanément un message.

Ainsi, à chaque période de la phase de communication de (σ',τ'), le joueur 1 et le joueur 2 s'envoient des messages simultanés. On suppose pour le moment que le joueur 2 choisit a ou b de manière équiprobable (probabilité de 1/2). Les messages du joueur 1 peuvent alors être assimilés à des révélations, alors que ceux du joueur 2, indépendants de la situation, peuvent être assimilés à une loterie avec deux issues équiprobables. Ainsi, on construit donc (σ,τ) de la manière suivante : le message du joueur 1 au temps t dans (σ',τ') devient une révélation unilatérale au temps 2t-1 dans (σ,τ). Le message du joueur 2 au temps t dans (σ',τ') devient une loterie au temps 2t dans (σ,τ). On a bien une correspondance entre les deux paires de stratégies, qui correspondent au même enchaînement de messages unilatéraux et loteries, mais en les séparant d'une unité de temps. Comme le message du joueur 1 dépend des loteries précédentes dans la nouvelle paire de stratégies, on arrive donc au même paiement puisque le premier temps dans (σ,τ) correspond à une révélation unilatérale (le joueur 1 a donc exactement les mêmes ensembles d'information que dans (σ',τ') au moment de faire une révélation unilatérale). Autrement dit, cette modification ne change pas les informations dont dispose le joueur 1 à chaque temps où il doit envoyer un message unilatéral par rapport à la paire de stratégies initiale. On arrive donc bien au même paiement. Comme la phase de communication a la même signification, la modification n'étant que structurelle, on peut donc utiliser pour la phase d'action les mêmes stratégies que dans celle de (σ',τ'). On a donc bien que le profil (σ,τ) est un équilibre puisque la situation est la même pour les deux joueurs (on a supposé (σ',τ') équilibre). Enfin, cet équilibre est par définition bien canonique car les temps impairs donnent des révélations unilatérales et les temps pairs donnent des loteries.

Cependant, on se rappelle qu'on a supposé que le joueur 2 envoyait dans (σ',τ') le message a ou b avec la même probabilité (1/2), ce qui n'est pas du tout le cas général. Le papier de Aumann et Hart propose une méthode pour créer des loteries entre a et b avec λ la probabilité de a quelconque en composant des loteries où la probabilité est 1/2. Cela permet de généraliser le résultat à des probabilités quelconques. Cependant le procédé est complexe et porte sur les nombres binaires. Il ne semble pas enrichissant de s'y attarder dans le cadre de ce mémoire.

2.3 Deuxième théorème

2.3.1 Dimartingales

Pour comprendre l'énoncé du prochain théorème, ainsi que la preuve, il faut premièrement définir certaines notions, certains termes. On définit premièrement le terme martingale : une martingale est une suite $z = (z_0, z_1, z_2, ...)$ de variables aléatoires à valeurs dans un espace euclidien quelconque, telles que pour tout t naturel, l'espérance de z_{t+1} sachant $(z_0, z_1, z_2, ..., z_t)$ est z_t.

On peut retenir un résultat intéressant sur les martingales : le théorème de convergence. Il énonce que toute martingale bornée converge presque-sûrement. On remarque de plus par définition pour une martingale z que l'espérance de z_t est toujours la même quelle que soit t naturel. On appelle espérance de la martingale cette valeur.

On fixe maintenant pour la suite $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{Q}$, trois espaces euclidiens et $\mathbb{Z} = \mathbb{A} \times \mathbb{B} \times \mathbb{Q}$, de telle sorte que tout point de $\mathbb{Z}$ s'écrit (α, β, q). On a maintenant les outils nécessaires pour définir une dimartingale : une dimartingale est une martingale bornée à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc de la forme $((\alpha_0, \beta_0, q_0), (\alpha_1, \beta_1, q_1), ...)$, telle que $\alpha_{t+1} = \alpha_t$ quand t est pair, et $q_{t+1} = q_t$ quand t est impair, et (α_0, β_0, q_0) est une constante. On a donc que (α_0, β_0, q_0) est l'espérance de la dimartingale, d'après la remarque du paragraphe précédent.

L'espace diconvexe d'un sous espace G de $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des espérances de dimartingales dont la limite est presque-sûrement dans G. L'espace diconvexe d'un sous espace G de $\mathbb{Z}$ est inclu dans l'enveloppe convexe de G.

2.3.2 Théorème

On va maintenant pouvoir écrire le théorème, qui est un équivalent du théorème 1, mais pour le modèle de Aumann et Hart (version plus générale). En conservant les notations du chapitre 1, le jeu de communication de ce modèle à k types possibles s'écrit $\Gamma_S^0(p)$ où $p = (p^1, ..., p^k)$ avec p^i la probabilité que le type soit le i-ème type, $i \in \{1, ..., k\}(= K)$. Le jeu sans communication s'écrit toujours $\Gamma(p)$. Les paiements s'écrivent toujours (α,β), où α est un vecteur de taille k, dont les composantes correspondent au paiement du joueur 1 pour les k types, et β est le paiement espéré du joueur 2.

Pour caractériser les équilibres de $\Gamma_S^0(p)$, on ne va pas considérer que p, mais aussi tous les vecteurs de la forme $q = (q^1, ..., q^k)$, car les messages du joueur 1 vont changer, comme on l'a vu dans le chapitre 1, les croyances du joueur 2 sur le type par rapport aux croyances initiales p.

Comme dans le chapitre 1, on note $\varepsilon(q)$ l'ensemble des paiements d'équilibre du jeu sans communication représenté par q.

Comme dans le chapitre 1, quand une des probabilités q^i est nulle, on modifie l'espace des paiement d'équilibre en permettant que le paiement du joueur 1 correspondant au type i soit supérieur au paiement d'équilibre. Ainsi, on définit $\varepsilon^+(q)$ l'espace des paiements modifiés : $(\hat{a}, \beta) \in \varepsilon^+(q)$ ssi $\exists (a, \beta) \in \varepsilon(q)$ avec $\hat{a}^i \geqslant a^i \forall i$ et $\hat{a}^i = a^i$ quand $q^i > 0$. On expliquera dans la preuve du théorème pourquoi on introduit cet ensemble.

Enfin, on note $gr\varepsilon^+$ le graphe de l'ensemble des (α, β, q), tels que $\forall q$, $(\alpha, \beta) \in \varepsilon^+(q)$. On peut donc enfin écrire le théorème :

Théorème 4. *Soit $p = (p^1, ..., p^k)$, avec $p^i > 0 \ \forall i \in \{1, ..., k\}$. Alors (α, β) est un paiement d'équilibre du jeu de communication $\Gamma_S^0(p)$ si et seulement si (α, β, p) est dans l'espace diconvexe de $gr\varepsilon^+$.*

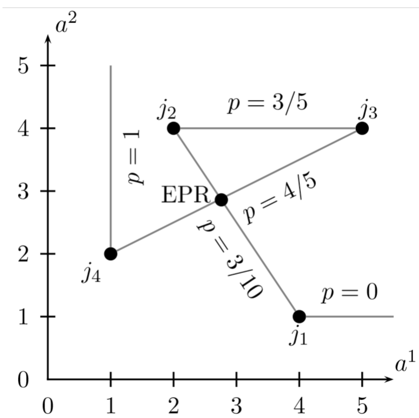
Ainsi, pour trouver les paiement d'équilibre du jeu de communication, il suffit de considérer l'espace diconvexe de $gr\varepsilon^+$. La section de cet espace correspondant à $q = p$ est l'ensemble des paiements de $\Gamma_S^0(p)$.

Nous allons maintenant faire quelques remarques sur le théorème, notamment sur son lien avec le théorème 1 (chap 1) et sur sa preuve, puis nous détaillerons la preuve.

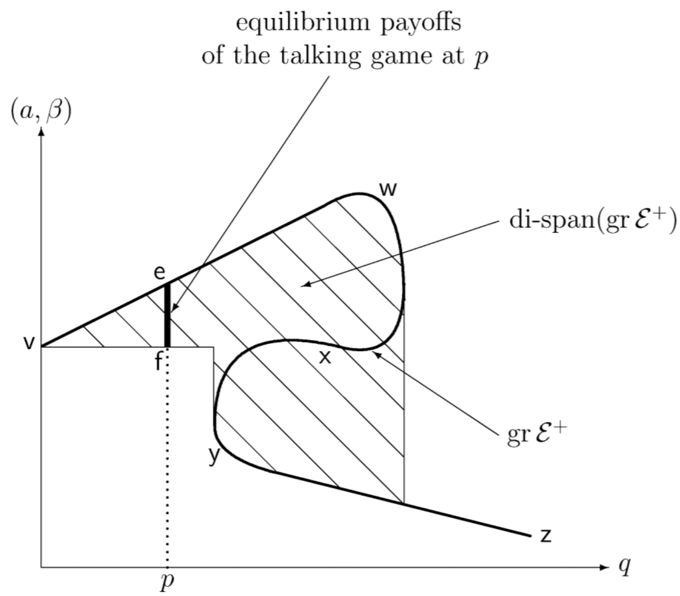
2.3.3 Quelques remarques

IMPORTANT (intuition derrière le théorème et lien avec le théorème 1 du chapitre 1) :

On a vu que le modèle de Aumann et Hart est d'une certaine manière plus large que le modèle du chapitre 1, c'est à dire que les situations du chapitre 1 peuvent être reconstruites dans ce modèle. On a par ailleurs également remarqué que le théorème 4 ressemblait beaucoup au théorème 1. On peut donc supposer que le théorème 4 est une version plus large du théorème 1. Mais alors comment retrouver le théorème 1 à partir du théorème 4 ? C'est ce que nous allons essayer d'expliquer maintenant.
On a premièrement que le "$p^i > 0 \ \forall i \in \{1, ..., k\}$" se retrouve dans le "$p \in]0, 1[$" : c'est juste une application dans le modèle à deux types du chapitre 1. Il faut ensuite montrer que l'espace diconvexe de $gr(\varepsilon^+)$ revient à $conv_\alpha(gr\varepsilon^+)$ dans le modèle du chapitre 1.
On a ensuite que contrairement au théorème 4, le théorème 1 s'applique dans un modèle où la phase de communication est finie. Or, d'après Aumann et Hart (on ne va pas le démontrer), dans la section 9 de l'article, on voit que lorsque la phase de discussion est finie, il faut remplacer dans le théorème l'espace diconvexe $gr(\varepsilon^+)$ par l'enveloppe convexe de $gr(\varepsilon^+)$ par rapport aux directions α et p (enveloppe diconvexe). Cela signifie qu'on convexifie an fixant α comme dans le chapitre 1, mais qu'on ajoute à cela les points obtenus par convexification en fixant p. On se rapproche donc du théorème 1, mais on voit qu'il y a plus de paiements, venant de la convexification des paiements en fixant p. On va expliquer l'intuition derrière cette différence.



Cette figure est issue d'un exemple d'application du théorème 1.
Pour illustrer le théorème 4, on reprend le schéma suivant, issu de Aumann et Hart.



On va expliquer l'intuition derrière les similitudes et des différences entre les deux théorèmes. Il ne s'agit pas d'une preuve. Dans la figure du chapitre 2, le graphique n'est pas utilisé avec les mêmes abscisses et ordonnées. Dans le chapitre 1, on convexifiait par rapport à p et β en fixant α. On a vu juste au-dessus que dans le chapitre 2, en temps fini, on convexifie en fixant α, mais qu'on ajoute à cela les points obtenus par convexification en fixant p. Sur ce schéma, on remarque que les points où l'enveloppe diconvexe de $gr(\varepsilon^+)$ n'est pas réduite à $gr(\varepsilon^+)$ sont les points où un même paiement (α, β) (on ne peut raisonner en séparant α et β sur le graphe, car il faudrait alors un graphe en dimension 4) est atteint pour plusieurs probabilités p ou les points où une même probabilité p peut donner plusieurs paiements. En effet, en trouvant de tels points, on peut convexifier de manière à ce que l'une des deux variables reste fixe pendant que l'autre se convexifie. Cela correspond donc bien à la convexification en fixant α plus celle en fixant p. Cela a un sens intuitif que l'on va développer.

Cependant, on remarque que convexifier les paiements en fixant p est spécifique au modèle du chapitre 2, et n'a aucun sens dans le chapitre 1. L'intuition est d'utiliser ce qu'on a fait dans l'exemple 3 du chapitre 2 : en utilisant la faculté du joueur 2 à communiquer, on peut réaliser des compromis entre plusieurs équilibres d'un même jeu (et donc des équilibres du jeu sans communication), ce qui revient donc à convexifier les paiements pour une même probabilité. Cependant, dans le modèle du chapitre 1, le joueur 2 ne peut pas communiquer donc ce genre de compromis par loterie simulée n'est pas possible. Ainsi, convexifier les paiements en fixant p n'a de sens que dans le modèle du chapitre 2. Cependant, convexifier par rapport à p et β en fixant α a du sens dans les deux chapitres (et est donc dans les deux théorèmes), car cela provient simplement de la capacité du joueur 1 de jouer en mixte entre les messages (voir explication juste en dessous du théorème 1). Cela est donc faisable dans les deux modèles. Cela explique pourquoi dans le théorème 1 on ne convexifie qu'en fixant α, alors que dans le théorème 4, on convexifie en fixant α, puis l'on convexifie en fixant p. On voit donc bien la raison ici pour laquelle le modèle du chapitre 2 donne plus de paiements d'équilibres (grâce aux compromis), et son interprétation mathématique (on rajoute une convexification en fixant p). On rappelle que cette convexification en fixant deux variables est l'application du théorème 4 dans un cas où la phase de communication est finie, pour comparer avec le théorème 1. Quand la phase de communication est infinie, il faut utiliser l'espace diconvexe.

Deuxième remarque sur le fait que pour simplifier les preuves on ne prend que deux messages possibles : a ou b. Il est affirmé dans l'article d'Aumann et Hart (on ne le prouvera pas) que le nombre de messages n'a pas d'influence sur les paiements d'équilibre tant qu'il y en a au moins deux différents. Le nombre de messages disponibles peut même varier d'un temps à l'autre ou être infini.

2.3.4 Preuve

On va ici développer la preuve du théorème 4. Cette preuve étant longue et technique, on a repris la structure de la preuve d'Aumann et Hart, en expliquant les passages implicites, ajoutant parfois quelques précisions, et en développant le plus possible les étapes. Tout n'est pas toujours conceptuellement intéressant, et certains passages qui semblent apporter un meilleure compréhension de la preuve ou de la notion et de ses subtilités sont précédés d'un "ATTENTION", notamment l'explication du fait qu'on utilise ε^+ au lieu de ε.

Preuve :

On va commencer par démontrer le "seulement si", soit que (α, β) est un paiement d'équilibre du jeu de communication $\Gamma_S^0(p) \Rightarrow (\alpha, \beta, p)$ est dans l'espace diconvexe de $gr\varepsilon^+$, avec p respectant les conditions du théorème.

Comme dans la démonstration du théorème précédent, pour simplifier, on considère que l'ensemble des messages possibles est a ou b. Soit $p = (p^1, ..., p^k)$, avec $p^i > 0\ \forall i \in \{1, ..., k\}$. Soit γ un équilibre de $\Gamma_S^0(p)$. On a donc que γ peut s'écrire $(\sigma, \tau) = (\sigma^1, ..., \sigma^k, \tau)$, où σ^i est la stratégie du joueur 1 quand le type est i. On note le paiement espéré de γ (α, β).

On veut donc montrer que (α, β, p) est dans l'espace diconvexe de $gr\varepsilon^+$, soit que (α, β, p) est l'espérance d'une dimartingale dont la limite est presque-sûrement dans $gr\varepsilon^{+}$ (voir 2.3.1). Grâce au théorème 3, on peut supposer que γ est canonique. Ainsi, la phase de communication contient par définition une infinité de périodes, avec des révélations unilatérales du joueur 1 alternant avec des loteries.

Pour bien comprendre la preuve, il faut se représenter le processus de la phase de communication comme un arbre binaire : chaque sommet au temps t (il y en a 2^t) a deux fils. La racine, au temps 0, qui correspond au début du jeu, avant le premier message, a deux fils au temps 1, correspondant aux deux messages que le joueur 1 peut envoyer. Ces deux noeuds ont eux mêmes deux fils au temps 2, correspondant aux deux résultats possibles de la loterie etc... Cela permet ainsi de modéliser γ, qui est bien un processus aléatoire, car le joueur 1 peut jouer en mixte et la loterie est le fruit du hasard. Soit v un noeud au temps t (on rappelle qu'il y en a 2^t). On note $a_v = (a_v^1, ..., a_v^k)$, avec a_v^i le paiement espéré du joueur 1 s'il est de type i, c'est à dire l'espérance du paiement final du joueur 1 s'il est de type i, sachant qu'il est au noeud v. De même, on note $p_v = (p_v^1, ..., p_v^k)$ avec ,p_v^i la croyance du joueur 2 sur le type i au noeud v. On note β_v le paiement espéré du joueur 2 en v (donc l'espérance du paiement espéré final sachant qu'on est au noeud v). On note w et $w^{'}$ les deux fils de v. Cet arbre, ce processus est donc une variable aléatoire, que l'on notera (A,B,P) (notation en majuscule qui différencie donc du paiement : ici, on considère une variable aléatoire).

Essayons de montrer que (A,B,P) est une dimartingale. Montrons donc premièrement que c'est une martingale. Pour que ce soit une martingale, on doit donc spécifier la mesure de probabilité utilisée sur les fils de chaque noeud v, permettant que la valeur de (A,B,P) en v soit bien l'espérance de sa valeur en w et $w^{'}$.

Sur les noeuds concernés par des loteries, il n'y a pas de problème. Comme la loterie a deux issues équiprobables (*aa* ou *bb* avec proba 1/2, *ab* ou *ba* avec proba 1/2), pour que la valeur de (A,B,P) au noeud v soit bien l'espérance de sa valeur en w et $w^{'}$, il faut donc choisir la mesure de probabilité 1/2-1/2 (la probabilité d'arriver à w est 1/2 quand on est en v, et celle d'arriver à $w^{'}$ est 1/2).

Pour les noeuds de révélation unilatérale du joueur 1, c'est plus compliqué. Comme énoncé dans l'article d'Aumann et Hart, on peut avoir plusieurs idées intuitives, mais qui ne fonctionnent pas en prenant de la hauteur. Par exemple, on peut utiliser pour tout type $i \in \{1, ..., k\}$, la probabilité fixée par le joueur 1 dans la stratégie σ^i : π_w^i la probabilité de jouer ce qui mène à w quand on se situe au noeud v et que le type est i. Cependant, cette probabilité n'est utile que si le type est i, mais le type au noeud v pourrait être n'importe quel autre type. Cette mesure ne fonctionne donc pas pour le joueur 1, car elle ne prend pas en compte le fait que tous les types sont possibles. Elle ne fonctionne pas non plus pour le joueur 2, car lui raisonne de manière globale en terme d'espérance sur les types. Il apparaît donc alors naturel d'utiliser la probabilité totale, indépendante du type, que le joueur 1 joue ce qui amène à w :
π_w=$p_w^1 \times \pi_w^1 + ... + p_w^k \times \pi_w^k$. Cette formule est calculée à l'aide de la formule des probabilités totales et de la définition de la probabilité conditionnelle. Cette probabilité fonctionne pour le joueur 2, mais pas pour le joueur 1, où l'on considère indépendemment les paiements pour chaque type. Or, le but est de trouver une mesure de probabilité telle que (A,B,P) soit une martingale. Ce doit donc être la même pour A, pour B, et pour P.

ATTENTION : Tout l'enjeu de la preuve de cette implication se trouve dans cet objectif que l'on vient de définir.

Supposons dans un premier temps que pour tout noeud de communication unilatérale v, le joueur 1 accorde une probabilité strictement positive aux deux messages. On a alors obligatoirement pour tout type i que $a_w^i = a_{w'^i}$, car si les deux paiements étaient différents, le joueur 1 aurait une déviation profitable où il jouerait tout le temps le message menant au noeud où paiement est le plus important. Ainsi, comme on veut que a_v^i soit l'espérance des deux paiements a_w^i et $a_{w'^i}$, on a forcément $a_v^i = a_w^i = a_{w'^i}$. On a alors que pour tout λ, $a_v^i = \lambda \times a_w^i + (1-\lambda) \times a_{w'^i}$. On peut en particulier appliquer cette formule avec $\lambda = \pi_w$. Cette probabilité fonctionne alors pour le joueur 1 et le joueur 2, c'est à dire pour A et B. Bien que non mentionné dans l'article étudié, cela fonctionne également pour P. En effet, d'après la formule des probabilités totales, quand on se situe au noeud v :
$\mathbb{P}(\text{le type est } i) = \mathbb{P}(\text{le type est } i \cap \text{ le noeud choisi est } w) + \mathbb{P}(\text{le type est } i \cap \text{ le noeud choisi est } w^{'})$
D'après la formule des probabilités conditionnelles, on obtient :
$\mathbb{P}(\text{le type est } i) = \mathbb{P}(\text{le type est } i| \text{ le noeud choisi est } w) \times \mathbb{P}(\text{le noeud choisi est } w) + \mathbb{P}(\text{le type est } i| \text{ le noeud choisi est } w^{'}) \times \mathbb{P}(\text{le noeud choisi est } w^{'})$
Ce qui, écrit avec les variables qu'on a posé, donne :
$p_v^i = p_w^i \times \pi_w + p_{w'}^i \times (1-\pi_w)$
La probabilité π_w fonctionne donc aussi pour P. Elle fonctionne donc pour (A,B,P).

Ainsi, quand quel que soit le type et quel que soit le noeud de communication unilatérale atteint, le joueur 1 envoie chaque signal avec probabilité strictement positive, on a que (A,B,P) est une martingale.

C'est même alors une dimartingale.
On remarque premièrement que quand t est pair, soit quand on est sur un noeud de message unilatéral (car on a fait commencer notre arbre à t=0 pour respecter la définition de martingale donc les phases sont décalées), on a $A_{t+1} = A_t$, car on a montré que pour tout v noeud de communication unilatérale, $A_v^i = A_w^i = A_{w'^i}$ pour tout type i.
Quand t est impair, soit quand on est sur un noeud de loterie, on a $P_{t+1} = P_t$, car la loterie est réalisée selon le hasard et ne laisse donc aucune information supplémentaire sur le type du joueur 1 au joueur 2.
De plus, on a que (A_0,B_0,P_0)=(α,β,p), par définition de (A,B,P), car α est l'espérance des paiements avant le début du jeu, soit au temps 0, β est l'espérance du paiement espéré(en fonction du type) avant le début du jeu et p est la croyance initiale du joueur 2 sur le type, soit P_0. Ainsi, on a bien que (A_0,B_0,P_0) est une constante et l'espérance de la dimartingale.
On admet de plus qu'elle est bornée.

On peut donc utiliser le théorème de convergence des martingales, qui nous assure qu'il existe $(A_\infty, B_\infty, P_\infty)$ tels que (A,B,P) converge presque-sûrement vers $(A_\infty, B_\infty, P_\infty)$. De plus, lors de la phase d'action, on peut faire une analogie avec le jeu sans communication pour lequel la probabilité pour le joueur 2 est P_∞. Ainsi, comme γ est un équilibre du jeu de communication et comme (A,B,P) converge presque-sûrement vers $(A_\infty, B_\infty, P_\infty)$, on a (A_∞, B_∞) doit être un paiement d'équilibre du jeu sans communication $\Gamma(P_\infty)$. On a donc $(A_\infty, B_\infty, P_\infty) \in gr(\varepsilon) \subset gr(\varepsilon^+)$.

Pour récapituler, on a donc que (α, β, p) est l'espérance d'une dimartingale (A,B,P) dont la limite est presque-sûrement dans $gr(\varepsilon^+)$. Donc (α, β, p) appartient à l'espace diconvexe de $gr(\varepsilon^+)$. On a bien montré la première implication, mais uniquement dans le cas où quel que soit le type et quel que soit le noeud de communication unilatérale atteint, le joueur 1 envoie chaque signal avec probabilité strictement positive.

On va expliquer ce qu'il se passe dans le cas contraire. C'est dans ce cas que l'utilisation de ε^+ au lieu de ε est utile.

S'il existe un type i et un noeud v tels que le joueur 1 choisit l'action qui emmène par exemple au noeud w avec probabilité 1, alors, hormis le cas où le paiement en w est égal à celui en v, (A,B,P) ne peut être une martingale. De plus, on a alors que w' est une issue impossible. Il y a donc un problème de définition pour $a^i_{w'}$, car le paiement n'est pas défini dans cette situation.

Il y a donc un problème de définition : il faut redéfinir certains concepts. On considère premièrement que la stratégie du joueur 2 τ prend en compte tous les noeuds, même ceux qui semblent impossibles car la probabilité d'y arriver est nulle, de sorte qu'une déviation du joueur 1 puisse être étudiée (pour étudier l'équilibre). C'est ce qui a été fait à titre personnel dans les exemples et qu'il n'y avait pas dans l'article de base en considérant des "menaces non crédibles". On change la définition de $a^i_{w'}$: c'est le paiement espéré du joueur 1 en v si le type est i et que le joueur 1 joue sa meilleure réponse au joueur 2 à partir du noeud v. Cela permet à $a^i_{w'}$ d'avoir un sens quel que soit le noeud v. Cette définition est par ailleurs compatible avec celle qu'on avait quand les deux issues étaient possibles, car la stratégie du joueur 1 au noeud v était déjà la meilleure réponse à la stratégie du joueur 2, puisqu'on considérait des équilibres. La nouvelle définition est donc juste plus large.

On se replace sur notre noeud v où l'on suppose que pour le type i, l'issue w a pour probabilité 1. Avec la nouvelle définition de a^i_v, on a que $a^i_v = a^i_w \geq a^i_{w'}$. En effet, le paiement espéré en w est supérieur à celui en w', car si ce n'était pas le cas, le joueur 1 choisirait w'. L'inégalité est large, car si les deux paiements espérés sont égaux, il est tout aussi rentable de joueur en mixte qu'en pur, et il peut être intelligent de jouer w avec probabilité 1. Si ça avait été une égalité, (A,B,P) serait une martingale, car on aurait pu utiliser π_w, comme dans le raisonnement où on excluait les probabilités nulles (voir plus haut). Mais l'inégalité stricte est possible donc ce n'est pas une martingale.

Cependant, on peut remarquer que même si le paiement en w' est maintenant bien défini, on ne peut pas arriver sur ce noeud si le joueur 1 joue σ^i. Ainsi, si α^i est le paiement espéré du joueur 1 au début du jeu si son type est i, alors modifier $a^i_{w'}$ n'aura pas d'influence sur α^i. Il fallait cependant définir $a^i_{w'}$ pour faire cette remarque, ce qu'on a fait pour la rigueur du raisonnement.

ATTENTION : c'est ici que se tient l'explication de l'utilisation de ε^+ au lieu de ε.

On peut donc se ramener au raisonnement précédent où on excluait les probabilités nulles de manière très rapide : on modifie $a^i_{w'}$ et on lui donne la valeur de a^i_w (on vient de voir que c'était possible). Il suffit ensuite de reprendre le même raisonnement que lorsque l'on ne considérait pas les probabilités nulles, à quelques nuances près. On ne pouvait pas le faire sans cela car le but est d'avoir une mesure de probabilité telle que $(\hat{A}$,B,P) est une martingale, il faut donc qu'elle fonctionne simultanément pour Â, B et P. Elle est ici définie par π_w. Avec cette égalité, et en utilisant cette mesure de probabilité, on a bien que (Â,B,P) est une martingale (cf. raisonnement précédent).

On note, après modification, Â à la place de A. Â sera donc une martingale bornée avec $\hat{a}_v^i \geq a_v^i$ car on a probablement augmenté la valeur comme expliqué précédemment, et $\hat{a}_v^i = a_v^i$ quand $p_v^i > 0$, pour des raisons expliquées précédemment. On reconnaît là la structure de ε^+.

Il est par ailleurs très facile de montrer que (Â,B,P) est une dimartingale, en reprenant la démonstration du raisonnement précédent, car le raisonnement est le même pour B et P.
Pour Â, si $p_w^i > 0$, on a $\hat{a}_w^i = a_w^i = a_{w'}^i = \hat{a}_{w'}^i$ et donc $\hat{a}_v^i = \hat{a}_w^i = \hat{a}_{w'}^i$ car l'espérance d'une variable aléatoire constante est cette constante.
Sinon, on a par construction $\hat{a}_w^i = \hat{a}_{w'}^i$, et le même raisonnement tient. On a donc bien que quand t est pair, soit quand on est sur un noeud de message unilatéral (car on a fait commencer notre arbre à t=0 pour respecter la définition de martingale donc les phases sont décalées), on a $\hat{A}_{t+1} = \hat{A}_t$, car on a montré que pour tout v noeud de communication unilatérale, $\hat{A}_v^i = \hat{A}_w^i = \hat{A}_{w'i}$ pour tout type i.
Comme le raisonnement est le même que le précédent mis à part cette subtilité, on a bien que (Â,B,P) est une dimartingale.

On peut donc utiliser le théorème de convergence des martingales, qui nous assure qu'il existe $(\hat{A}_\infty, B_\infty, P_\infty)$ tels que (Â,B,P) converge presque-sûrement vers $(\hat{A}_\infty, B_\infty, P_\infty)$.
Soit h un chemin infini à travers l'arbre. On appelle $(\hat{a}_h, \beta_h, p_h)$ la limite des $(\hat{a}_v, \beta_v, p_v)$, avec v dans h. Cette limite existe presque-sûrement.
De manière analogue au raisonnement précédent, on remarque qu'à la phase d'action, les joueurs font face à l'équivalent d'un jeu silencieux représenté par p_h. Notons a_i^h le paiement du joueur 1 si le type est i et que le chemin emprunté est h. On a donc que (a^h,β^h) $\in \varepsilon(p_h)$, avec le même raisonnement que précédemment.
De plus, comme pour tout noeud v dans h et pour tout type i, on a $\hat{a}_v^i \geq a_v^i$, en passant à la limite on obtient $\hat{a}_h^i \geq a_h^i$. Nécessairement, si $p_h^i > 0$, alors pour tout v dans h, $p_v^i > 0$, car s'il existe v dans h tel que $p_v^i = 0$, alors pour tous les noeuds suivants la probabilité que le type soit i est toujours de 0 (car martingale) et donc $p_h^i = 0$ ce qui est absurde.
On a donc alors, si $p_h^i > 0$, d'après ce qu'on a dit précédemment, $\hat{a}_v^i = a_v^i$ pour tout v dans h. On a ainsi $\hat{a}_h^i = a_h^i$ par passage de l'égalité à la limite.
On a donc toujours $\hat{a}_h^i \geq a_h^i$ et on a $\hat{a}_h^i = a_h^i$ quand $p_h^i > 0$. De plus, on a vu que (a^h,β^h) $\in \varepsilon(p_h)$.
Par définition de ε^+, on a donc que ($\hat{a}^h$,β^h) $\in \varepsilon^+(p_h)$ et donc ($\hat{a}^h$,β^h,p_h)$\in gr(\varepsilon^+)$. Comme cela est vrai pour tout presque tout h (car la convergence est presque sûre), on a que (Â,B,P) est une dimartingale dont la limite est presque sûrement dans $gr(\varepsilon^+)$. On a donc par définition que l'espérance de (Â,B,P) est dans l'espace diconvexe de $gr(\varepsilon^+)$. Or, on sait que l'espérance de (Â,B,P) est ($\hat{A}_0$,B_0,P_0) (cf 2.3.1). De plus, on sait que quand $p_h^i > 0$, $\hat{a}_v^i = a_v^i$. Donc il n'y a pas d'impact dans le calcul du paiement espéré. Le raisonnement est donc le même que précédemment et l'espérance de (Â,B,P) est (a, β, p). On a donc bien que (a, β, p) est dans l'espace diconvexe de $gr(\varepsilon^+)$, ce qui achève notre preuve de la première implication.

On va maintenant prouver l'implication "si". On veut donc montrer que si (a, β, p) est dans l'espace diconvexe de $gr(\varepsilon^+)$, alors on a que (a, β) est un paiement d'équilibre du jeu de communication $\Gamma_S^0(p)$.

Soit (a, β, p) dans l'espace diconvexe de $gr(\varepsilon^+)$. On a donc que (a, β, p) est l'espérance d'une dimartingale (Â,B,P) dont la limite est presque-sûrement dans $gr(\varepsilon^+)$. On veut construire un équilibre $\gamma = (\sigma^1, ..., \sigma^k, \tau)$ du jeu $\Gamma_S^0(p)$ dont le paiement est (a, β).

L'objectif de cette preuve va donc logiquement être de construire γ de manière à ce qu'il soit représenté par la dimartingale. On aura ainsi que son paiement sera l'espérance de la martingale, soit (a, β).

En reprenant la représentation en arbre de la première implication, on appelle v noeud de loterie si c'est P qui y est constant, on l'appelle noeud de message unilatéral si c'est Â qui y est constant. On suppose pour simplifier que l'arbre est binaire et que les probabilités sur les noeuds de loterie sont (1/2,1/2). Soit v un noeud de message unilatéral. On pose, si $p_v^i \neq 0$, $\pi_w^i = p_w^i \pi_w / p_v^i$, avec π_w la probabilité dans la martingale de passer au noeud w quand on est au noeud v. On appelle π_w^i la probabilité que σ^i mène à w on est au noeud v (sous-entendu donc sachant qu'on est en v et que le type est k. En effet, en reprenant le sens donné à P dans l'implication précédente, cela paraît cohérent par une simple application de la formule de la probabilité conditionnelle.

Comme (Â,B,P) est une dimartingale, d'après le théorème de convergence (une dimartingale est bornée), on peut définir ($\hat{a}_h$,β_h,p_h) comme la limite des ($\hat{a}_v$,β_v,p_v) pour v dans h, où h est un chemin infini dans l'arbre. De plus, on a que la limite de (Â,B,P) est p.s. dans $gr(\varepsilon^+)$. Donc, pour presque tout h, on a ($\hat{a}_h$,β_h,p_h)$\in$ $gr(\varepsilon^+)$. On a donc , par définition de $gr(\varepsilon^+)$, qu'il existe un équilibre du jeu silencieux $\Gamma(p_h)$, que l'on nommera e_h, avec comme paiement (a_h, β_h), avec $\hat{a}_h^i \geq a_h^i$ pour tout i et $\hat{a}_h^i = a_h^i$ quand $p_h^i > 0$. On construit γ dans la phase d'action de manière à ce que les joueurs jouent e_h quand le chemin parcouru est h.

On a donc construit γ. Le paiement de γ correspond donc au paiement espéré si γ est joué, ce qui correspond donc à l'espérance de (Â,B), puisqu'on a choisit γ de manière à ce qu'il soit représenté par la martingale, soit $(a\,;\beta)$. Il faut montrer que γ est un équilibre. Dans la phase d'action, aucun joueur n'a de déviation profitable puisque e_h est un équilibre. Dans la phase de communication, on doit considérer les noeuds de manière séparée. Pour les noeuds de loterie, personne n'a d'intérêt à dévier, car si l'autre joueur ne dévie pas, l'issue sera toujours la même (1/2,1/2). Il y a toujours en effet autant de chances d'envoyer le même message qu'un message différent de l'autre joueur. Dans les noeuds de message unilatéral, le joueur 2 n'a pas d'action possible, et donc ne peut pas dévier. Le joueur 1, lui n'a pas non plus de déviation profitable, ce qui est assez intuitif puisqu'il joue en mixte, cela signifierait donc qu'il est indifférent entre les deux messages. Pour le montrer, on remarque que les noeuds de communication unilatérale sont les noeuds où $\hat{a}^i$ ne varie pas. (On suppose que le type est i). De plus, comme (Â,B,P) est une dimartingale, on doit respecter le critère de l'espérance conditionnelle (dans la def d'une martingale). Cela nous donne donc, pour tout noeud v, $\hat{a}_v^i = \hat{a}_w^i = \hat{a}_{w'}^i$. On a donc que quel que soir λ, $\hat{a}_v^i = \lambda \times \hat{a}_w^i + (1 - \lambda) \times \hat{a}_{w'}^i$. Ainsi, quelle que soit la probabilité utilisée, Â est une martingale. On a donc que $(E)(\hat{A}_\infty^i) = A_0^i = a^i$ quelle que soit la probabilité utilisée à la place de π_w. Donc quelle que soit la stratégie du joueur 1 sur les noeuds de communication unilatérale, il obtient le même paiement espéré. Il n'a donc pas de déviation profitable.

On a donc que (a, β) est paiement de l'équilibre γ du jeu de communication $\Gamma_S^0(p)$, ce qui achève la preuve.

Conclusion

On a donc, à travers ces deux chapitres, étudié deux modèles, l'un plus large que l'autre, et à travers des théorèmes importants et leur preuve, des exemples, on a pu acquérir une meilleure compréhension de la notion de cheap talk. Cependant, il existe de nombreux autres modèles dans les jeux de cheap talk, qui peuvent avoir beaucoup de différences avec ceux qu'on a étudiés. Il y a par exemple des jeux où les deux joueurs ont un type, une information privée, dont ils sont les seuls à avoir connaissance (donc pas uniquement le joueur 1). On peut également avoir des modèles avec plus de deux joueurs, avec certains ayant des informations privées et d'autres non, certains ayant un pouvoir d'action et d'autres non. Il y a également des modèles avec des ensembles de types, de messages et d'actions continus, comme le modèle de Crawford et Sobel (1982).
De plus, les jeux de cheap talk ne sont pas les seuls jeux de communication en théorie des jeux. On a des modèles où les messages sont coûteux, ou encore les jeux de persuasion, où les messages qui peuvent être envoyés dépendent du type etc...
Les jeux de communications forment donc un domaine large de la théorie des jeux, dont on a eu un léger aperçu.

Ils permettent de modéliser un nombre important de situations, dans de nombreux domaines (cf. Introduction).
De plus, ils peuvent permettre de modéliser, comme on l'a vu dans le chapitre 2, des loteries (dans lesquelles les joueurs peuvent avoir confiance) permettant des compromis, compromis que l'on peut utiliser dans les exemples les plus classiques de la théorie des jeux, par exemple dans le jeu de "la bataille des sexes".
Enfin, on a pu voir dans l'exemple du cheap talk que la communication pouvait agrandir de manière incontestable l'espace des paiements d'équilibre des jeux de base (théorèmes 1 et 4).
Ces jeux ont donc un véritable intérêt pour la théorie, et c'est pour cela qu'il existe autant de modèles, et qu'il y a eu autant de publications sur ce sujet jusqu'aux années 2010.