Entropie, flots, inégalités
Entropy, flows, inequalities

Table des matières

Résumé du projet

A l'interface entre théorie des équations aux dérivées partielles et probabilités, ce projet a pour ambition de développer les méthodes d'entropie et différentes notions qui leur sont associées, et de les appliquer à divers modèles à l'interface de plusieurs disciplines, telles que la physique (plasmas, Schrödinger, etc) ou la biologie mathématique (notamment le système de Patlak-Keller-Segel) ; un effort particulier sera porté sur leurs interprétations/approximations en termes de systèmes de particules. Ces techniques sont bien établies dans des situations classiques, et nous visons à les étendre à des modèles non-linéaires et/ou dégénérés, ou décrits par des systèmes. Nous nous intéresserons notamment au comportement en temps long de ces systèmes et développerons les outils adéquats, par exemple en termes d'inégalités fonctionnelles. Ce projet donnera une place particulière aux jeunes chercheurs. Il mettra également l'accent sur l'obtention de résultats les plus quantitatifs possibles afin d'envisager des applications numériques à même de faciliter l'interaction avec des chercheurs d'autres disciplines.

1 Contexte, positionnement et objectif(s) de la proposition

1.1 Objectifs et hypothèses scientifiques

En théorie des équations aux dérivées partielles, les méthodes d'entropie appliquées à des problèmes d'évolution non-linéaires ont permis des avancées importantes dans l'étude qualitative des propriétés de leurs solutions, comme la caractérisation de taux de convergence, la détermination de constantes optimales dans des inégalités fonctionnelles associées aux problèmes d'évolutions, ou encore la mise en évidence de conditions optimales pour la symétrie ou l'unicité de solutions stationnaires. Ces méthodes d'entropie se combinent bien avec des problèmes multi-échelles et permettent d'analyser dans un cadre commun des modèles correspondant à des échelles différentes : description particulaire déterministe ou stochastique et mécanique statistique à l'échelle microscopique, description cinétique ou probabiliste aux échelles mésoscopiques, description par des équations ou des systèmes diffusifs ou hydrodynamiques à l'échelle macroscopique. Du point de vue des probabilités, les méthodes entropiques se sont révélées particulièrement efficaces pour l'étude du comportement en temps long de diffusions, linéaires ou de type McKean-Vlasov, pour l'analyse de la concentration de la mesure ou de la propagation du chaos. Nous commencerons par étudier ***la quantification optimale de la propagation du chaos***, son ***l'uniformité en temps*** (dans les cas où les systèmes se stabilisent en temps grand) et ***les systèmes de particules*** ainsi que ***l'équation de McKean-Vlasov dans le cas des potentiels singuliers***.

Mathématiquement, de nombreuses équations d'évolution peuvent être interprétées comme des flots gradients de fonctionnelles d'entropie par rapport à des notions de distance appropriées. Cette interprétation est utile non seulement pour donner un cadre géométrique abstrait, mais aussi pour construire des solutions d'équations d'évolution générales conservant la masse, comprendre leur dynamique et traiter leurs approximations particulaires. C'est donc sur la notion d'entropie généralisée, adaptée à des flots particuliers, que s'appuie le projet. Dans le monde discret, qu'il s'agisse de schémas numériques ou de l'étude de chaînes de Markov, c'est encore l'entropie qui sert de fil conducteur, y compris quand les fonctionnelles d'entropie ne sont pas convexes. Le deuxième grand champ de recherche est centré sur l'étude de la dynamique de ces évolutions, et notamment ***l'étude du temps long*** et les méthodes d'***hypocoercivité***.

Le troisième axe du projet est centré sur les ***inégalités fonctionnelles*** et la mesure du ***déficit***. Il s'agit non seulement d'un outil pour les deux premières parties, mais aussi de la partie du projet la mieux à même de permettre des échanges d'idées à l'interface avec d'autres domaines des mathématiques, d'interagir avec des problèmes d'autres disciplines et d'élargir la classe des modèles étudiés.

Les estimations d'entropie ont suscité une activité scientifique considérable depuis 15 ans en lien avec la théorie du transport optimal, les techniques de concentration de la mesure et les inégalités fonctionnelles. Mêler des approches probabilistes avec des méthodes d'analyse non-linéaire et des techniques de théorie spectrale ouvre des perspectives nouvelles pour une classe de questions de difficultés variées, à l'*interface* avec de nombreux autres domaines des mathématiques. La méthode de travail consistera donc à soigneusement sélectionner quelques modèles-clefs, puis à décliner différentes questions qualitatives et les étudier de manière concertée. Des groupes de travail réunissant les chercheurs associés au projet et en particulier les jeunes chercheurs seront organisés ; y seront également invités des chercheurs extérieurs au projet, mais qui ont une compétence particulière, par exemple en théorie spectrale des opérateurs, en calcul des variations, ou encore en théorie de la régularité.

Un certain nombre de problématiques de notre projet scientifique a pour origine des questions issues de la biologie mathématique (modèles de déplacement cellulaires et d'agrégation), de la modélisation en sciences sociales (déplacement de foules, distribution de richesses) et de certaines branches de la physique (plasmas, semi-conducteurs, gravitation). Il s'agit donc de questions en *interaction* avec d'autres branches des sciences. Cette interaction peut prendre plusieurs formes :

1. Il s'agit tout d'abord d'aller chercher, dans une perspective interdisciplinaire, de nouveaux modèles présentant d'authentiques difficultés mathématiques, que les techniques présentées dans le projet permettent désormais d'aborder.
2. En retour, nous chercherons à constituer une boîte à outils d'analyse des propriétés qualitatives des solutions, propre à renforcer une démarche de modélisation utilisant des méthodes mathématiques élaborées.
3. La mise en œuvre numérique des méthodes n'est pas au cœur de notre projet, mais ses porteurs sont bien conscients du fait que c'est au travers du calcul scientifique que peut s'établir une collaboration réellement interdisciplinaire. Ils prendront donc en compte dans leurs travaux le fait que les méthodes particulaires ont des contreparties numériques immédiates pour la simulation de systèmes, par exemple

par l'étude d'approximation par chaînes de Markov de type schéma d'Euler, et que des méthodes d'EDP constructives, débouchant sur des estimations quantitatives aussi précises que possible, sont les mieux à même pour susciter des travaux réellement interdisciplinaires.

C'est donc dans cette perspective que le projet a été déposé au titre de l'axe 1 du défi 7.

Un de nos principaux objectifs liant les trois thèmes développés est le modèle de Landau spatialement inhomogène avec potentiel coulombien, utilisé par exemple en modélisation des plasmas. En effet, c'est un modèle hypoelliptique de type McKean-Vlasov avec interactions singulières, qui regroupe toutes les difficultés que nous souhaitons étudier : écriture et pertinence d'un système de particules, quantification de la propagation du chaos, comportement en temps long du système de particules et du système non-linéaire et inégalités fonctionnelles associées. Il n'existe pour l'instant que des résultats très préliminaires sur ce modèle, voir [CTW16]. Notre méthodologie pourrait ainsi reposer sur un premier découplage des difficultés en traitant par exemple le cas spatialement homogène : si le comportement en temps long des solutions de l'EDP vient tout juste d'être compris, cf. [CDH17], l'étude du système de particules et la propagation du chaos restent des problèmes difficiles. Dans le même ordre d'idées, nous espérons pouvoir complètement traiter un autre cas avec interactions singulières comme le modèle de Keller-Segel. Il s'agira alors de coupler ces résultats avec nos résultats récents sur les modèles hypoelliptiques et l'hypocoercivité, par des méthodes analytiques ou probabilistes. A terme, on peut espérer caractériser des taux de retour à l'équilibre optimaux, dans le régime asymptotique, ce qui aura des conséquences importantes en modélisation pour des problèmes appliqués allant des bio-mathématiques à la théorie de la gravitation ou des semi-conducteurs.

1.2 Originalité et pertinence par rapport à l'état de l'art

Du fait de l'étendue de la littérature sur le sujet et de la variété des approches, présenter un ***état de l'art*** sur les trois thèmes que nous souhaitons aborder en seulement quelques lignes semble assez utopique. Nous allons ainsi nous limiter à la description de quelques articles-clés exposant les méthodes sur lesquelles nous nous appuierons, ainsi qu'une brève liste de quelques livres de référence.

Systèmes de particules. L'existence de solutions pour l'équation de Keller-Segel 2D est démontrée dans [CP16] par une approche probabiliste, reposant notamment sur l'introduction d'un système linéaire de particules en interaction. La propagation du chaos, uniforme en temps, en distance de Wasserstein est démontrée dans [FG17] pour l'équation de Landau-Maxwell par des méthodes de couplage et des inégalités fonctionnelles.

Temps long et hypocoercivité. En utilisant une inégalité fonctionnelle reliant la distance de Wasserstein et sa dissipation, la convergence exponentielle vers l'équilibre de la solution de l'équation non-linéaire des milieux granulaires est démontrée dans [BGG13] pour des potentiels convexes, améliorant ainsi des résultats de Carrillo-McCann-Villani [CMV03, CMV06]. L'approche hypocoercive développée dans [DMS15] permet de traiter des équations cinétiques dont le terme de collision n'est pas régularisant. Dans [CDH17], le premier résultat en temps long pour l'équation de Landau-Coulomb est obtenu, et dans [CTW16] l'existence de solutions dans le cas spatialement homogène est démontré. Les travaux récents [EGZ16, EGZ17] présentent une application des méthodes de couplage probabilistes dans un cadre non-linéaire ou hypoelliptique.

Inégalités fonctionnelles et applications. Dans [BBG17], une inégalité « optimale » de Li-Yau est démontrée sous une condition de courbure-dimension pour des semi-groupes Markoviens, amenant notamment à des inégalités de Harnack paraboliques en courbure positive et négative. Dans [CG17], on démontre l'équivalence entre l'inégalité de Sobolev logarithmique, une condition de Lyapunov et une condition originale d'intégrabilité des temps d'atteinte de la diffusion associée. Dans [DEL16b], les entropies sont utilisées comme outil pour démontrer un résultat de symétrie et d'unicité pour des problèmes posés sur des ensembles non-compacts.

Voici maintenant une sélection de quelques ***ouvrages de synthèse***. Pour les questions de transport de masse, on renverra à [Vil09b]. Les questions fondamentales concernant les flots gradients dans des métriques de type Wasserstein sont décrites dans [AGS08] ; on pourra aussi se référer à [AGS17] pour une courte synthèse. L'ouvrage [BGL14] contient une synthèse des travaux sur les processus de Markov et les inégalités fonctionnelles associées. A ce jour, le texte le plus complet concernant l'hypocoercivité et l'hypoellipticité appliquée aux équations cinétiques est [Vil09a]. Le livre [Jün16], paru l'an dernier, brosse le tableau des connaissances sur les entropies généralisées appliquées aux équations de diffusion non-linéaire de type diffusion rapide.

Voici maintenant quelques éléments concernant le ***contexte scientifique*** du projet EFI, et pour commencer quelques éléments sur un projet antérieur auquel EFI est relié. Le projet ANR STAB associe 17 chercheurs permanents. Coordonné par Ivan Gentil, il porte sur la stabilité des solutions de certaines dynamiques dans un cadre discret et continu, et sur la discrétisation en temps et en espace d'équations d'évolution (passage du discret au continu). Ce projet se termine en août 2017. Il a permis de tisser des liens très forts entre analystes spécialistes des EDP et probabilistes et de rapprocher différentes méthodes et techniques. On dénombre 54 publications liées à STAB sur le serveur HAL. Cinq membres du projet STAB sont présents dans le projet EFI, qui se situe lui aussi entre analyse et probabilités ; il s'agit maintenant de faire évoluer toute une communauté mathématique vers des modèles moins théoriques, plus tournés vers les applications et l'interaction avec d'autres disciplines. C'est en particulier auprès des jeunes chercheurs qu'il convient de promouvoir cet objectif.

Les responsables scientifiques du projet EFI ont connaissance d'un certain nombre d'initiatives en analyse et en probabilités. Ils sont en particulier informés des projets AdOr et Peristoch, et sont en contact avec leurs coordinateurs, respectivement Delphine Salort et Niels Berglund, avec qui ils ont échangé sur leurs projets respectifs. Ces projets sont complémentaires : si quelques participants sont communs, les thématiques scientifiques et les objectifs sont néanmoins bien distincts.

Au niveau national, certains participants sont dans le périmètre de l'un des LabEx de mathématiques : Archimède, Bézout, CIMI, Milyon ou SMP : voir http://labex.math.cnrs.fr. Cela permet d'envisager des actions communes : voir Section 2.3. Une synergie sera à rechercher avec le DIM (domaine d'intérêt majeur) Réseau de Recherche Doctoral en Mathématiques de l'Île-de-France (RDM-IdF) qui vient d'être renouvelé, le projet Cofund porté par la FSMP, et le projet ERC de Mathieu Lewin à l'interface avec la physique mathématique. Les mini-cours pourront être organisés en commun avec les différentes écoles doctorales des participants, ou encore avec le Projet Prefalc CFRRMA (voir Sections 2.3 et 3).

1.3 Méthodologie et gestion des risques

Un projet de mathématiques présente relativement peu de risques, si ce n'est que les résultats qui seront démontrés *in fine* ne peuvent être garantis *a priori* ; méthodes, choix techniques, et solutions de repli sont et doivent être laissés à l'initiative des participants. En revanche, une bonne utilisation des fonds mis à disposition est essentielle et c'est sur ce point que des garanties peuvent être apportées. Tant pour les choix d'ordre scientifique (thèmes et intervenants des *workshops*, choix des mini-cours, sélection des candidatures des post-doctorants) que pour les décisions financières importantes (recrutement d'un post-doctorant), il est important d'avoir un avis collégial et de pouvoir recueillir des avis d'experts extérieurs si besoin. Les cinq responsables scientifiques du projet prendront ensemble ces décisions dans un souci de bonne gouvernance. Par contre la mise en œuvre financière et les décisions simples comme la prise en charge des missions seront mises sous la responsabilité du coordinateur (Jean Dolbeault, Université Paris-Dauphine) et du responsable du partenaire n°2 (Arnaud Guillin, Université de Clermont Auvergne), qui se coordonneront en vue d'une utilisation optimale des crédits.

2 Organisation du projet et moyens mis en œuvre

Ce projet est un projet collaboratif de type PRC, centré sur des méthodes de probabilités et d'analyse non-linéaire réunies sous la dénomination de « méthodes d'entropie », et motivé par l'étude de modèles issus de la biologie ou de la physique.

Les participants sont répartis dans diverses universités, dispersées dans toute la France. Le projet sera coordonné par Jean Dolbeault à l'Université Paris-Dauphine, et par Arnaud Guillin à l'Université Clermont-Auvergne de Clermont-Ferrand. Pour simplifier la gestion, les crédits seront distribués entre deux centres de recherche seulement (Université Paris-Dauphine et Université de Clermont-Auvergne) : les chercheurs franciliens seront rattachés au nœud Paris-Dauphine, et tous les autres au nœud de l'Université Clermont-Auvergne. Les cinq porteurs scientifiques du projet : François Bolley, Patrick Cattiaux, Jean Dolbeault, Ivan Gentil et Arnaud Guillin se concerteront pour la mise en œuvre du programme scientifique et les décisions importantes.

Les autres collaborateurs sont : E. Bouin, K. Carrapatoso, D. Chafaï, L. Corrias, F. Delebecque, M. Fathi, A. Frouvelle, M. Hauray, P. Monmarché, C. Poquet, J. Reygner, C. Tardif et I. Tristani. Le projet accueille une proportion importante de jeunes chercheurs.

2.1 Coordinateur scientifique

La coordination du projet sera assurée par Jean Dolbeault (DR CNRS, Université Paris-Dauphine) qui travaille dans le domaine de l'analyse non-linéaire et de ses applications, et a parfois recouru à des méthodes numériques pour affiner des conjectures ou obtenir des résultats qualitatifs. Avec plus de 140 publications (et plus de 78 co-auteurs), il bénéficie d'une expérience variée qui lui a permis de contribuer à des travaux à l'interface de plusieurs domaines : l'article récent [DEL16b] constitue par exemple une avancée importante dans le domaine des inégalités fonctionnelles, qui est redevable aux méthodes de carré du champ, de la théorie de l'information, de l'analyse des équations elliptiques et du calcul des variations.

Jean Dolbeault a une expérience approfondie de la gestion de réseaux (e.g. projet européen Hyke) et de projets collaboratifs (e.g. responsable du projet ANR CBDiff) ; il a été Directeur de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris (FSMP), Directeur du Ceremade, et Vice-Président Recherche de l'Université Paris-Dauphine (voir CV). Actuellement, il est déchargé de toute responsabilité administrative et disponible pour l'animation scientifique du projet. Il a personnellement bénéficié d'interactions répétées et sur une longue durée avec les autres porteurs du projet, et a publié avec plusieurs d'entre eux.

2.2 Consortium

Le projet s'articule autour des interactions entre équations aux dérivées partielles, analyse et probabilités. Pour cette raison, le consortium sera organisé autour de deux partenaires, Paris-Dauphine et Clermont-Ferrand : Jean Dolbeault (Université Paris-Dauphine), spécialiste en analyse non-linéaire des EDP, coordonnera le projet et le nœud parisien alors qu'Arnaud Guillin (Université Clermont-Auvergne), spécialiste des probabilités, coordonnera les moyens destinés aux participants situés en province. Cette répartition est cohérente avec les choix scientifiques du projet et permet d'optimiser la gestion financière des actions (missions, organisations de *workshops* et cours,...), les participants étant ainsi bien répartis entre les deux partenaires.

Les CV des cinq responsables scientifiques du projet (François Bolley, Patrick Cattiaux, Jean Dolbeault, Ivan Gentil et Arnaud Guillin) sont donnés en annexe. Outre Jean Dolbeault, coordinateur du projet, le projet sera encadré par un groupe reconnu et complémentaire : Patrick Cattiaux (PR, Université Paul Sabatier Toulouse 3) et Arnaud Guillin (PR, Université Clermont Auvergne, Clermont-Ferrand) sont des probabilistes, spécialistes des inégalités fonctionnelles et de leurs applications en lien avec les EDP non-linéaires de type McKean-Vlasov et de leurs approximations particulaires, comme la convergence vers l'équilibre, la propagation du chaos ou la concentration de la mesure. François Bolley (PR, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6) et Ivan Gentil (PR, Université Claude Bernard Lyon 1) travaillent également sur les inégalités fonctionnelles d'un point de vue analytique, reliant notamment courbure et transport optimal. Ces deux approches permettent d'aborder les méthodes entropiques selon des points de vue complémentaires, relevant de l'analyse et des probabilités. Les responsables scientifiques ont déjà plus d'une trentaine d'articles en commun, ce qui démontre la complémentarité et l'efficacité de leur collaboration : [BBCG08, BBG12, BBG17, BBGM12, BCG08, BG10a, BG10b, BGG12, BGG13, BGG17, BGM10, BGV07, BGW15, CDGJ06, CCG12, CG06, CG08, CG09, CG14a, CG14b, CG17, CGG07, CGM08, CGGR10, CGR10, CGW10, CGW11, CGWW09, CGZ13, DGGW08, DGJ06, DPDG04]

Comme il a été mentionné en préambule, une des particularités du projet consiste à allier des spécialistes des équations aux dérivées partielles, de l'analyse et des probabilités. C'est une grande force car les défis que nous souhaitons relever ensemble ne peuvent trouver leurs solutions qu'au travers de regards croisés. Par exemple, l'analyse des équations de McKean-Vlasov avec interactions singulières nécessite à la fois la compréhension de l'EDP non-linéaire et celle du système de particules stochastiques, et aussi une bonne compréhension de leurs propriétés de concentration. Quelques résultats significatifs pour le projet, qui démontrent la complémentarité du consortium, ont été présentés en Section 1.2. Les mini-cours et les invitations seront une opportunité d'élargir le projet aux domaines des mathématiques à l'interface avec le projet EFI.

2.3 Moyens mis en œuvre pour atteindre les objectifs

Organisation matérielle du projet

La description des moyens à mettre en œuvre recoupe un certain nombre de considérations quant à l'impact et aux retombées attendues du projet, qui seront décrits dans la Section 3.

▷ **Réunions scientifiques, groupes de travail et conférences**

Les porteurs du projet s'engagent à :

1. organiser une fois par an une ***réunion scientifique*** destinée aux participants, avec plusieurs objectifs : coordonner les efforts, informer les participants, donner aux jeunes chercheurs l'occasion d'exposer leurs résultats. Cette réunion, qui prendra la forme d'un *workshop* d'un ou deux jours, permettra de promouvoir de nouvelles perspectives de recherche. L'expérience montre qu'une telle activité a un effet d'accélération considérable sur les projets de recherche et, à condition d'être périodique, permet plus facilement aux participants de développer des travaux en collaboration.

2. soutenir des ***groupes de travail spécialisés***, les susciter si le besoin s'en fait sentir, organiser des mini-cours (voir aussi Section 3, Mini-cours et exposés introductifs). Il s'agira en particulier d'organiser des *workshops* thématiques pour les membres du groupe, en invitant un ou plusieurs spécialistes qui devront rendre leurs exposés accessible aux doctorants afin de leur permettre de s'initier à de nouvelles problématiques. Certaines de ces activités pourront être organisées en collaboration avec des écoles doctorales ou des projets de formation pour jeunes chercheurs comme le projet Prefalc CFRRMA (géré à l'Université Paris-Dauphine), ou encore en coordination avec des projets hébergés par les différentes universités partenaires (projets ERC, initiatives soutenues par des IdEx ou des LabEx, *etc.*).

Un des objectifs du projet est d'ouvrir de nouvelles directions de recherche, en donnant par exemple la possibilité à un chercheur extérieur aux thématiques du groupe d'exposer dans le détail une technique ou un problème ; on recherchera des intervenants qui sont eux-mêmes à la tête d'un projet personnel ou collectif d'ampleur. Voici quelques axes envisagés : questions et problèmes de régularité en théorie des équations paraboliques non-linéaires, inégalités fonctionnelles et questions de stabilité en mécanique quantique, cadre fonctionnel pour l'étude du comportement en temps grand dans les systèmes issus de la biologie, *etc*. Le but sera donc non seulement de stimuler le groupe des participants sur les questions internes au projet, mais aussi de l'ouvrir à des interactions avec d'autres communautés mathématiques et plus généralement scientifiques.

3. organiser des ***conférences***. C'est l'opportunité pour les membres du groupe, et en particulier pour les jeunes maîtres de conférence et doctorants de présenter leurs travaux aux experts du domaine et de partager avec des leaders scientifiques réflexions et nouvelles pistes sur les problèmes ouverts. C'est aussi la possibilité d'entamer des collaborations internationales. Le coût est un obstacle ; par ailleurs, de trop nombreuses conférences sont aujourd'hui organisées. On privilégiera donc le format des conférences/*workshops* thématiques, avec un sujet bien défini, un public ciblé, et on recherchera dans la mesure du possible des co-financements. Le premier événement programmé aura lieu à la station internationale de recherche de Banf (BIRS) : «Entropies, the Geometry of Nonlinear Flows, and their Applications » (18w5069, 42 participants) du 8 au 13 avril 2018 : https://www.birs.ca/events/2017/5-day-workshops/18w5069

▷ **Missions**

Les missions du projet EFI serviront en premier lieu à renforcer les projets de recherche collaboratifs, à l'intérieur du réseau aussi bien qu'avec des chercheurs étrangers. Les missions destinées à participer à des conférences généralistes ne seront pas prises en charge, seules les missions correspondant précisément aux thématiques du projet pourront être soutenues. Plus généralement, les missions « entrantes » (invitation de collaborateurs, organisation de réunions de travail) seront fortement encouragées, alors que les missions « sortantes » le seront beaucoup moins. Il s'agit en définitive de créer de l'activité scientifique, de favoriser des échanges concrets d'idées, débouchant rapidement sur de nouveaux résultats.

Toutefois, des missions longues (allant d'une à plusieurs semaines), entrantes et sortantes seront réservées à de « jeunes chercheurs » qui devront présenter un projet de recherche précis et justifier leur séjour par un rapport à leur retour. Il s'agit en effet d'encourager des initiatives bien motivées, à un stade de la carrière où le jeune chercheur a besoin de confronter ses idées et de développer son réseau de collaborateurs (voir aussi Section 3, impact scientifique pour les jeunes chercheurs).

▷ **Gestion du projet**

Les responsables des deux nœuds du projet (Jean Dolbeault à l'Université Paris-Dauphine et Arnaud Guillin à l'Université Clermont Auvergne) gèreront chacun le budget qui leur est confié, tout en se concertant étroitement pour optimiser l'utilisation globale des fonds du projet. Pour les décisions importantes, les cinq responsables scientifiques : François Bolley, Patrick Cattiaux, Jean Dolbeault, Ivan Gentil, Arnaud Guillin échangeront leurs informations et prendront leurs décisions de manière collégiale.

Une page Web dédiée au projet EFI constituera pour les participants la source d'information de référence : qu'il s'agisse d'annonce de mini-cours, de la préparation de *workshops*, des ressources (vidéos, *slides*) mise à disposition par les conférenciers, des liens vers des travaux de recherche, des articles, des ressources numériques (*numerical galleries*), *etc.*, la page web sera au cœur des activités. Ce *portail* annoncera aussi les offres de post-doctorat et des propositions de stages de Master.

▷ **Publications et soutien aux « jeunes chercheurs »**

L'expérience montre qu'un projet ANR comme EFI a deux types de retombées principales : les publications et, principalement pour les jeunes chercheurs, le développement d'une expertise et d'un réseau de collaborateurs. En ce qui concerne les publications, le projet encouragera les participants à publier dans les meilleures revues du domaine, internationales à comité de lecture, mais aussi à diffuser plus largement les résultats (dépôt sur Hal et ArXiv, mise en ligne sur le serveur du projet et diffusion aux participants).

En ce qui concerne les « jeunes chercheurs » (voir aussi Section 3), il convient de distinguer ceux qui sont au voisinage de la thèse (doctorant au voisinage de la soutenance, post-doctorants, jeunes chargé(e)s de recherche ou maîtres de conférences), et des chercheurs plus confirmés, au voisinage de l'habilitation. Pour les premiers, il s'agit de faire connaître les travaux réalisés autour de la thèse et de commencer à élargir leurs centres d'intérêt. Pour les seconds, il s'agit de diffuser des résultats importants, de développer un réseau de collaborateurs et de consolider un programme de recherche à long terme.

Décomposition en tâches du programme de travail

Systèmes de particules et équations de McKean-Vlasov
Tâche 1 : Systèmes de particules et propagation du chaos
Tâche 2 : McKean-Vlasov et interactions singulières

Temps long et hypocoercivité
Tâche 3 : Temps long
Tâche 4 : Hypocoercivité

Inégalités fonctionnelles et applications
Tâche 5 : Inégalités fonctionnelles, stabilité
Tâche 6 : Interfaces, interactions, modèles

Coordination des tâches

La tâche 1 sera coordonnée par F. Bolley et J. Reygner, la tâche 2 par F. Bolley et M. Hauray, la tâche 3 par P. Cattiaux et K. Carrapatoso, la tâche 4 par P. Cattiaux et E. Bouin, la tâche 5 par I. Gentil et M. Fathi, la tâche 6 par I. Gentil et L. Corrias.

	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Tâche 4	Tâche 5	Tâche 6
	Systèmes de particules, propagation du chaos	MacKean -Vlasov, interactions singulières	Temps long	Hypocoercivité	Inégalités fonctionnelles, stabilité	Interfaces, interactions, modèles
BOLLEY François	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CATTIAUX Patrick	✓	✓	✓	✓	✓	✓
DOLBEAULT Jean			✓	✓	✓	✓
GENTIL Ivan			✓	✓	✓	
GUILLIN Arnaud	✓	✓	✓	✓	✓	✓
BOUIN Emeric			✓	✓		✓
CHAFAI Djalil	✓	✓	✓		✓	✓
CORRIAS Lucilla			✓		✓	✓
FROUVELLE Amic		✓	✓	✓		✓
MONMARCHÉ Pierre	✓	✓	✓	✓	✓	
REYGNER Julien	✓	✓	✓			
TARDIF Camille			✓	✓	✓	
TRISTANI Isabelle			✓	✓		
CARRAPATOSO Kleber	✓		✓	✓		✓
DELEBECQUE Fanny	✓	✓				✓
FATHI Max	✓		✓	✓	✓	
HAURAY Maxime	✓	✓	✓			
POQUET Christophe	✓	✓	✓			

TABLE 1 – Participants et répartition des tâches

Projet scientifique

Nous allons décrire ici les principaux thèmes abordés dans le projet :

1. Systèmes de particules et équations de McKean-Vlasov,
2. Temps long et hypocoercivité,
3. Inégalités fonctionnelles et applications

Il est important de remarquer que ces trois thèmes sont loin d'être indépendants : une des grandes richesses du projet vient justement de ces fécondes interactions.

• *Systèmes de particules et équations de McKean-Vlasov*

Certaines équations fondamentales de la physique décrivent des systèmes composés d'un très grand nombre N de particules en interaction. Ces équations interviennent dans des domaines aussi variés que la théorie cinétique des gaz, des plasmas, le chimiotactisme, etc. L'évolution est souvent décrite par de grands systèmes d'équations différentielles déterministes ou stochastiques, mais toujours couplées pour tenir compte de l'interaction entre particules. Dans la nature, le nombre de particules est très élevé ; l'étude numérique et théorique de tels systèmes d'équations nombreuses et couplées est alors difficile. C'est pourquoi on préfère souvent remplacer cette description microscopique de chaque particule dans un espace des phases très grand par une description mésoscopique ou cinétique, non-linéaire mais dans un espace des phases (en position et vitesse) réduit, ou même par une description macroscopique ou hydrodynamique dans l'espace des positions seulement. Cette procédure est appelée *limite de champ moyen* et sa justification rigoureuse constitue un objectif majeur en mathématiques appliquées. Il s'avère qu'établir une telle convergence revient à montrer que, si N particules interagissent au cours du temps, leurs états restent presque indépendants, au sens où, partant à l'instant initial d'états indépendants, leurs états redeviennent indépendants dans la limite $N \to \infty$ pour tous les temps ultérieurs (*propagation du chaos*, *cf.* [Szn91]).

Cette question se pose pour la plupart des modèles de la physique statistique (Boltzmann, Landau, Vlasov-

Poisson), et pour des modèles de biologie (dynamique des populations, équation de Keller-Segel en chimiotactisme). Dans de nombreux modèles, une difficulté clé est due au caractère *singulier* des interactions entre les particules (comme l'attraction gravitationnelle ou la répulsion électro-magnétique).

Enfin, une fois l'équation non-linéaire obtenue à la limite, il s'avère que les systèmes de particules stochastiques en interaction (mais avec un nombre N réduit) constituent à leur tour des modèles facilement simulables et largement utilisés pour la résolution numérique de l'équation. Dans cette optique, il est crucial de quantifier cette convergence en le nombre N de particules.

Nous nous concentrerons sur trois problèmes principaux : la quantification optimale du chaos, son uniformité en temps (dans les cas où les systèmes se stabilisent en temps grand) et l'étude de modèles singuliers. Nous lierons ceci au problème de convergence en temps long pour des diffusions réversibles ou non, hypoelliptiques ou uniformément elliptiques, en lien avec le deuxième thème.

Nous présentons ci-dessous quelques questions résolues récemment ainsi que des problèmes ouverts qui nous intéressent particulièrement.

Systèmes de particules et propagation du chaos

Le *retour à l'équilibre* des solutions de l'équation de Boltzmann est une question fondamentale d'un point de vue théorique et applicatif. Il est en effet largement utilisé en physique et en ingénierie ; en particulier, il permet de justifier la dérivation des équations (macroscopiques) de la mécanique des fluides. Or la justification de la convergence à l'équilibre suppose la validité de l'équation comme de ses approximations sur un intervalle de temps infini. Il est donc crucial de montrer que l'équation de Boltzmann est consistante avec les modèles particulaires uniformément en temps.

La convergence du système de particules vers l'équation limite, uniformément en temps, a été quantifiée par Mouhot et Mischler [MM13] dans le cadre du système simplifié de Boltzmann-Kac et de l'équation de Boltzmann homogène, dans les cas réalistes les plus simples (molécules Maxwelliennes sans troncature et sphères dures).

Par ordre de difficulté croissante, la même question devra être traitée pour le modèle de McKean-Vlasov associé à un potentiel non-convexe (pour lequel les techniques de couplage ne semblent pas fonctionner), à son extension cinétique (hypoelliptique) telle qu'elle peut apparaître dans certains modèles de réseaux de neurones, à l'équation de Boltzmann avec potentiels durs (sans troncature). Pour ce dernier, il conviendrait essentiellement de trouver le bon cadre fonctionnel dans lequel un résultat de stabilité, c'est-à-dire de différentiabilité du flot engendré par l'équation de Boltzmann, peut être établi. L'extension à l'équation de Boltzmann inélastique est également un défi.

D'autre part, Fournier et Mischler [FM16] ont obtenu des taux de convergence bien meilleurs (quasi-optimaux) mais à horizon temporel fixé (donc non-uniforme en temps) pour le modèle stochastique asymétrique de Nanbu (motivé par des besoins de simulation numérique et proche du modèle symétrique de Boltzmann-Kac considéré précédemment) pour toutes les interactions de type potentiel dur et pour l'interaction des sphères dures. Ici, la méthode utilise un argument de couplage et des calculs très fins liés à l'unicité/stabilité fort/faible de l'équation limite. Comment rassembler ces deux approches ?

Dans le cas des molécules maxwelliennes, la méthode de [FM16], couplée à des travaux récents [Rou14] de Rousset, semble permettre de conclure à une borne uniforme en temps et quasi-optimale, améliorant ainsi significativement les bornes obtenues précédemment. Cependant les résultats de [Rou14] semblent restreints aux molécules maxwelliennes, et il y a peu d'espoir de les généraliser. Il semble par ailleurs tout à fait possible d'obtenir des résultats quantitatifs (quasi-optimaux) à horizon temporel fixé dans des cas non-maxwelliens de type potentiels durs ou pas trop mous. L'obtention de la propagation du chaos uniforme revient alors à quantifier un défaut d'alignement ; c'est actuellement un défi scientifique majeur. Comme l'approche par couplage est essentielle et afin d'améliorer les taux de convergence, il conviendra de mieux prendre en compte l'argument d'unicité/stabilité fort/faible de l'équation limite utilisé dans [FM16].

Nous souhaiterions donc comprendre comment faire fonctionner ensemble ces deux méthodes, afin d'obtenir des bornes à la fois uniformes en temps et précises, si possible pour tous les potentiels durs. C'est un défi important et hautement non-trivial, puisqu'elles diffèrent dès la première ligne.

Bien sûr, des modèles plus simples peuvent être étudiés en premier lieu. Par exemple, le modèle de McKean-Vlasov associé à un potentiel non-convexe de type double puits, que ne peuvent traiter les méthodes de [CMV03] ou de [BGM10], et pour lequel un résultat de convergence pour l'équation limite a été obtenu seulement récemment dans [BGG13]. également dans ce cadre, on peut s'intéresser à la convergence uniforme en temps long du système de particules, en s'inspirant des méthodes spectrales ou d'inégalités fonctionnelles. Ceci semble nécessiter notamment des estimations fines sur l'évolution de la distance de Wasserstein.

Equation de McKean-Vlasov et interactions singulières

Les résultats de propagation du chaos ont pendant longtemps concerné des modèles non-singuliers (ou des versions régularisées de modèles singuliers). Or la plupart des modèles physiques ou biologiques pertinents (Boltzmann, Landau, Vlasov-Poisson, Navier-Stokes en formulation vorticité, Keller-Segel) sont précisément des équations faisant intervenir des interactions singulières entre particules. Il en est de même pour des modèles issus des matrices aléatoires. Il est à noter que des résultats de propagation pour des modèles singuliers ont déjà été obtenus : ceux de Marchioro-Pulvirenti dans les années 1980 sur un modèle de tourbillons déterministe, ceux d'Osada à la même période sur la formulation vortex de l'équation de Navier-Stokes, celui de Cépa-Lépingle [CL01] sur un modèle de McKean-Vlasov répulsif en dimension 1 d'espace et enfin ceux de Hauray-Jabin [HJ07, HJ15] sur le modèle de Vlasov-Poisson. Il s'agit cependant soit de modèles de dynamique déterministe, soit de modèles de diffusion très particuliers, qui ne conduisent donc qu'à des résultats très partiels.

Les travaux récents [FHM14] et [FH16] établissent des résultats de propagation du chaos concernant la formulation vortex de l'équation de Navier-Stokes et l'équation de Landau pour des interactions singulières, en utilisant soit la régularisation fournie par la dissipation d'entropie, soit des principes d'unicité fort/faible.

Nous nous intéressons à l'extension de telles méthodes à l'équation de Boltzmann pour des potentiels mous, à l'équation de Keller-Segel qui semble plus difficile que la formulation vortex de l'équation de Navier-Stokes car la force (singulière) y est "attractive". Les modèles issus des matrices aléatoires présentent également la même force coulombienne, cette fois répulsive donc a priori plus facile, mais avec un terme de diffusion (essentiel dans les estimations entropiques) qui disparaît dans la limite de champ moyen.

Enfin, problème encore plus singulier, nous aimerions comprendre la propagation du chaos dans le cas de systèmes de particules qui approchent l'équation de Boltzmann spatialement inhomogène : la singularité vient ici du fait que deux particules ne collisionnent que si elles ont une position commune. Une première idée consisterait à coupler la méthode de compacité/stabilité de Rezakhanlou [Rez04] et l'argument d'unicité fort/faible des solutions dissipatives de l'équation de Boltzmann obtenu par Lions (1994). Une autre idée est d'établir directement des estimations fortes (même si cela semble hors de portée aujourd'hui). Concernant la convergence en temps long, Lions a développé récemment une nouvelle technologie, peu sensible aux singularités et éventuellement généralisable au cas non-linéaire, qui pourrait aussi fournir des estimations pour l'équation limite.

• *Temps long et hypocercivité*

Les équations de type McKean-Vlasov et leurs approximations particulaires à travers le phénomène de propagation du chaos ont mis en évidence l'importance de contrôler ces dynamiques en temps grand. C'est un sujet fondamental qui a été abordé tant en EDP qu'en probabilités avec des méthodes souvent complémentaires : couplages et conditions de Lyapunov, fonctionnelles de Lyapunov (énergie libre, entropie, ...). Il reste cependant encore beaucoup à faire pour pouvoir adapter les techniques classique, à nos problématiques qui peuvent être : 1) non-linéaires (McKean-Vlasov, milieux poreux, diffusions rapides) ; 2) non-réversibles (par exemple des modèles cinétiques ou processus markoviens déterministes par morceaux) ; 3) en grande dimension (systèmes de particules). Nous allons ici décomposer notre approche en deux parties : une première générale sur l'étude du temps long et une deuxième sur les cas cinétiques (ou hypoelliptiques) dans le cadre de l'hypocoercivité (voir ci-dessous).

Temps long

Nous souhaitons considérer des approches générales de type probabilistes ou analytiques pour l'étude en temps long de différents processus, généralement non-réversibles ou non-linéaires.

• Méthodes de couplages et systèmes de particules. Si les méthodes basées sur les inégalités fonctionnelles ont généralement un bon comportement par tensorisation lorsque l'on explore les grandes dimensions, l'extension de ces résultats reste généralement un problème très difficile dans les cas avec interactions. Très récemment, des travaux d'Eberle, voir par exemple [EGZ16], ont permis d'utiliser une technique de couplage par réflexion pour analyser la convergence vers l'équilibre de solutions de l'équation de McKean-Vlasov dans des cadres non-singuliers. Nous souhaitons nous attaquer à l'étude du comportement en temps long des systèmes de particules en champ moyen correspondant, pour lesquels nous espérons qu'un couplage par réflexion coordonnée par coordonnée permettra un contrôle du comportement en temps long indépendant du nombre de particules. Les cas d'interactions singulières, de type Keller-Segel, seront également étudiés à la lumière des travaux récents de Cattiaux-Pédèches [CP16] ou Fournier-Jourdain [FJ17]. Nous espérons également que ces méthodes de couplage pourront nous permettre d'étudier le comportement en temps long de l'équation de Landau-Coulomb qui n'a été que très récemment obtenu par Carrapatoso & al. [CDH17]. Pour le système de particules associé, seul le cas maxwellien a pu être traité dans Fournier-Guillin [FG17] et nous souhaitons pouvoir étendre leurs résultats au cas coulombien (voir aussi [BCF17] pour une approche par inégalités fonctionnelles). Une des difficultés réside notamment dans le fait que la vitesse de convergence n'est pas exponentielle, ce qui rend les stratégies classiques inopérantes. Un autre système, faisant également un lien vers le cas hypocoercif, est celui de particules en interactions aux plus proches voisins comme le cas des rotors étudié dans [CEP15] qui repose sur des méthodes de type Lyapunov et qui pourrait être analysé par du couplage. Cela devrait être comparé aux approches de type Γ_2, comme par exemple dans [Mon15c, Mon15b].

• Méthodes analytiques. Les méthodes de calcul des variations pour l'étude des flots non-linéaires et la construction de notions de distances adaptées comme dans [DNS12] fournissent maintenant un cadre général pour l'étude des problèmes d'évolution. Toutefois, les estimations nécessaires manquent souvent par défaut de régularité des solutions (voir [BDMN17b]) ou de justification des intégrations par parties dans le cas de domaines non-bornés ou de mesures singulières (voir [DEL16a]) ; ces difficultés pourront être levées soit en donnant des estimations de régularité et de décroissance améliorées, soit en construisant des schémas d'approximation, par exemple en régularisant les mesures invariantes. En particulier, de telles approches devront être uniformes en temps long et, pour les modèles cinétiques, compatibles avec les changements d'échelle conduisant à la limite de diffusion. Dans le cas d'un couplage avec une équation de Poisson, attractive ou répulsive, les taux de convergence asymptotiques ont été caractérisés dans le cas diffusif dans [CD14, Li17] ; il s'agit maintenant de comprendre comment étendre ces résultats à des situations réalistes pour, par exemple, des semi-conducteurs (avec des porteurs de charges de signe opposé et un profil de dopage). Une approche basée sur la théorie des semi-groupes, initiée par S. Mischler et ses élèves, fournit également un cadre apte à s'attaquer à des estimations fines sur des modèles non-linéaires [Tri15, Tri14, MT17]. Nous souhaitons aussi étendre l'approche par calcul direct de la dissipation de la distance de Wasserstein [BGG13, BGG12] à des cas où la non-linéarité intervient aussi dans le terme de diffusion (type Landau), et étudier alors la structure de flot gradient de ces équations.

Hypocoercivité

L'hypocoercivité constitue un cas particulier du problème de l'étude en temps long, lorsque le modèle est dégénéré, comme un système en position et vitesse dans lequel le bruit n'agit que sur la vitesse. Villani, en se fondant sur des travaux de Hérau-Nier a posé les fondations d'une théorie permettant l'étude systématique (analytique) de ces problèmes, qui est exposée dans [Vil09a].

• Une méthode d'hypocoercivité (sans hypoellipticité, c'est-à-dire sans effet régularisant) a été mise au point dans [DMS15] et permet de traiter des noyaux de collisions non-régularisants, mais reste limitée aux équations linéaires. Cette approche suggère de nombreuses directions de recherche nouvelles : approche spectrale de l'hypocoercivité (Bouin, Dolbeault, en collaboration avec Hérau, Mischler, Mouhot et Schmeiser), estimations en entropie non-quadratique, prises en compte d'un terme de champ moyen, *etc.*, questions qui sont pour l'instant essentiellement toutes ouvertes. Par ailleurs, donner des estimations précises (temps de relaxation caractéristiques) et si possible optimales dans les modèles cinétiques constitue un champ de recherche entièrement ouvert que les estimations spectrales permettent aujourd'hui d'aborder. Dans le même temps, Monmarché [Mon15a, GM16b, Mon14, Mon16] a étendu l'approche Γ_2 de Bakry-Emery dans le cas hypocoercif et il serait judicieux de comparer les deux méthodes, voire de les lier, pour affiner les estimations. En vue d'applications en physique statistique, il faut de plus pouvoir se confronter à des processus encore plus dégénérés comme les chaînes d'oscillateurs ou bien des systèmes de particules issus de la biologie de type *flocking*, où la non-convexité des entropies naturelles pose problème et pour lesquels il n'existe que peu de résultats quantitatifs satisfaisants. Les versions avec bruit de ces modèles restent mal comprises malgré des avancées récentes dues en particulier aux membres du projet [Péd17, CDP17].

• Si l'approche initiale de Villani, lorsqu'elle s'applique, est particulièrement efficace dans un cadre L^2, elle reste largement perfectible dans le cas d'un contrôle entropique. Se pose par exemple la question de se passer de la condition de bornitude de la Hessienne pour contrôler le confinement en position. Par ailleurs, motivés par des modèles dans lesquels la vitesse des individus est contrainte sur une surface, par exemple la sphère (fibre lay-down process), certaines hypothèses de la théorie de Villani sur les crochets de Lie engendrés par les parties symétrique et antisymétrique de l'opérateur ne sont pas satisfaites : d'autres méthodes doivent être envisagées pour traiter ces cas dans un cadre L^2, cf. [BHM16]. Une approche à la Bakry-Emery utilisant des Γ_2 généralisés a également permis, dans [BT17], d'obtenir l'hypocoercivité L^2 pour ces modèles dans un contexte géométrique. Parvenir à une convergence entropique pour ces modèles reste un véritable défi, et il en est de même pour des modèles dans lesquels ce sont les positions qui sont contraintes à évoluer sur une variété.

• Les premiers résultats de contraction par couplage pour l'équation de Fokker-Planck cinétique ont été énoncés dans [BGM10], dans un cadre quasi gaussien, et, très récemment, dans [EGZ17] : nous espérons pouvoir les étendre dans plusieurs directions. Un résultat perturbatif a aussi été démontré dans [HT16] ; voir aussi [DBGV16]. En premier lieu, il faudrait pouvoir raffiner la méthode pour gérer des modèles en grande dimension comme les oscillateurs, les systèmes de particules et leurs limites non-linéaires de type champ moyen. Cette approche dynamique permettrait, dans ces exemples très dégénérés, de mieux comprendre le mécanisme de convergence à l'équilibre, et notamment les transferts d'énergie.

• *Cas discret*. Il est important de remarquer que ces estimations en temps long, pour des modèles hypocoercifs ou non, permettent également d'apporter des solutions pour leur simulation. On peut citer par exemple les méthodes de Monte-Carlo de type MALA (Metropolis-Adjusted-Langevin Algorithm) ou ULA (Unadjusted-Langevin-Algorithm) – voir [DM15] par exemple – qui permettent de transférer les résultats en temps continu sur des chaînes de Markov simulables basées par exemple sur des schémas d'Euler adaptatifs. Il reste cependant à les adapter dans des cas hypocoercifs (voir [IOS17, RS17] pour des résultats récents dans cette direction) et aussi à les comparer aux résultats récents obtenus par étude de la courbure de ces chaînes (par exemple dans une distance de Wasserstein adaptée), *cf.* [EF16].

• *Inégalités fonctionnelles et applications*

Les inégalités fonctionnelles (inégalités de Sobolev, de Sobolev logarithmique ou encore de Poincaré) sont au coeur de l'étude de la régularité, de la stabilité et du comportement en temps long des solutions de nombreuses équations d'évolution, qu'il s'agisse d'EDP ou EDS linéaires ou non-linéaires, en particulier pour les équations en lien avec la physique mathématique, la modélisation en physique ou en biologie, et de nombreux autres domaines des sciences. Obtenir la constante optimale, l'estimer, ou même simplement comprendre sa dépendance en fonction des paramètres apporte une information importante sur le modèle étudié. Voici quelques uns des problèmes que nous souhaitons étudier.

Inégalités fonctionnelles, stabilité

• L'étude du déficit pour des inégalités fonctionnelles représente un problème récent et intéressant. Il s'agit, pour une inégalité fonctionnelle dont on connaît les fonctions extrémales, d'estimer l'écart entre une fonction et l'ensemble des extrémales, c'est-à-dire d'une version précisée de la notion de stabilité. De nombreux résultats portent sur les inégalités isopérimétriques, de Sobolev, de Sobolev logarithmique, de transport (de type HWI ou EVI) ou encore de Poincaré : voir par exemple [FMP10, FIL16, FN17, BGG17, CFP17]. Un exemple emblématique est la mesure Gaussienne standard en dimension n et l'inégalité de Sobolev logarithmique associée, introduite par L. Gross en 1975. Cette inégalité, qui est une majoration de l'entropie par l'information de Fisher, est essentielle dans l'étude de la *concentration de la mesure*, en statistiques, pour le contrôle de taux de *convergence à l'équilibre*, en *théorie de l'information*... Alors qu'elle est indépendante de la dimension et que ses fonctions extrémales sont bien connues, il s'agit d'estimer son déficit en tenant compte de la dimension, par exemple en utilisant des méthodes analytiques de type transport optimal. On s'intéressera aussi bien au cas continu qu'au cas discret, qui constitue un défi important en lien avec la théorie de l'information et permettrait d'obtenir une approximation du cas continu. Les inégalités HWI ou EVI sont des inégalités en lien avec le transport optimal et les méthodes de flot gradient : stabilité et généralisation au cas discret sont aussi à l'ordre du jour. La stabilité a été abordée sous l'angle de la dynamique (flots non-linéaires) et des inégalités améliorées, par exemple dans [DT13, DT16b] ; elle reste essentiellement incomprise dans le cas des exposants critiques. Donner une caractérisation quantitative fine de la constante de Bianchi-Egnell dans le cadre des améliorations de l'inégalité de Sobolev critique est un problème avec de grands enjeux dans de nombreuses applications : voir [Fig13] pour un exposé introductif.

• Les inégalités fonctionnelles pour des mesures strictement log-concaves ont été abondamment étudiées par des méthodes de dissipation de l'entropie, basées sur l'utilisation des opérateurs *carré du champ* et *carré du champ itéré*, et du critère de courbure-dimension (Γ et Γ_2, voir [BGL14]). De nouvelles approches sont nécessaires lorsque l'on sort de ce cadre maintenant bien compris. Il s'agit, par exemple, d'établir des inégalités si possible optimales pour des mesures qui ne sont pas log-concaves. Une nouvelle méthode basée sur la dimension négative et introduite en particulier par Ohta et Milman [Oht16, Mil17], semble prometteuse. Elle permettrait en particulier d'estimer les constantes d'inégalités fonctionnelles pour des mesures de type mesure de Cauchy généralisée (*distribution multivariée de Student*).

• La célèbre inégalité de Li-Yau introduite en 1986 permet de montrer des inégalités de type Harnack parabolique, impliquant de la régularité pour la solution d'équations d'évolution (on pourra consulter l'excellent article de synthèse [Kas07]). Des progrès significatifs ont été accomplis par des membres du projet [BBG17] mais les résultats ne sont pas optimaux et les hypothèses encore trop restrictives : les opérateurs doivent être des diffusions et la courbure de l'opérateur doit être uniformément minorée. Il s'agit maintenant de montrer une inégalité de Harnack pour l'équation de Fokker-Planck cinétique dans le cas où la courbure n'est pas minorée : voir [BT17]. Les processus déterministes par morceaux (PDMP) sont presque des diffusions et devraient vérifier des propriétés analogues pour la convergence à l'équilibre et/ou la régularité (inégalité de Harnack), que l'on cherchera à étudier à la suite de [Mon15c, Mon16, Mon15b].

• Des progrès importants ont été réalisés dans la compréhension du rôle des estimations spectrales pour les flots non-linéaires et les inégalités d'interpolation dans [DT16a, DJ14, BDMN17b, BDMN17a], y compris pour des modèles avec champ moyen dans le cas de [DC12], qu'il s'agit maintenant de rendre plus systématiques. X. Li (en thèse avec J. Dolbeault) travaille en particulier sur l'adaptation de ces méthodes au cas électrostatique, avec application au calcul du temps de relaxation dans des modèles, diffusifs et cinétiques (hypocoercifs), de semi-conducteurs. Mieux comprendre les cas pour lesquels l'optimalité n'est pas atteinte dans le régime asymptotique, comme dans [DEL16a] ou encore dans le cas de diffusions non-locales, comme dans [DZ17], fait partie des objectifs à court terme.

Interfaces, interactions, modèles

• Le modèle de Keller-Segel est particulièrement intéressant tant du point de vue de l'analyse fonctionnelle (norme adaptée au terme de champ moyen) que du point de vue des inégalités fonctionnelles, dont les versions optimales permettent la classification des solutions. Ce modèle est relativement bien compris en dimension deux, dans sa version la plus simple (en particulier, les mécanismes de *blow-up* ont été étudiés dans [BCC12, CF13, RS14, GM16a]). Les variantes du modèle de Keller-Segel, pour des dimensions plus grandes que 2, ou lorsque le terme de chemo-attractant obéit à une équation parabolique, constituent des exemples fondamentaux (voir [CCE12, CEM14, CM17]) qui restent largement ouverts (cadre fonctionnel, classification des solutions, inégalités fonctionnelles). Du point de vue probabiliste, l'étude des grandes déviations pour les trajectoires de systèmes de particules à interactions singulières est en soi un champ de recherche important. A l'exemple de [DJM15], comprendre la relation entre équilibres variationnels et équilibres dynamiques, asymptotiques ou globaux, permettra de dégager des outils pour la classification des solutions utiles pour les interactions avec des domaines comme la modélisation mathématique en biologie et en sciences sociales.

• L'étude de la symétrie et de la brisure de symétrie par des flots non-linéaires utilisés comme outils dans [DEL16b, DELM17, DEL17] a constitué une percée importante dans des cas simples (poids et non-linéarités homogènes) qu'il s'agit maintenant d'étendre à des situations plus complexes (modèles avec termes de champ moyen en gravitation ou de type flocking / Cucker-Smale).

• Le lien avec de nombreux problèmes de physique mathématique comme [BFL08, CFW13, FL11] passe par des approches spectrales des inégalités comme dans [DZ16]. Certaines inégalités d'interpolation ont une contrepartie spectrale pour les opérateurs de Schrödinger – voir par exemple [DEL14]. Dans le cas des inégalités de Sobolev logarithmiques, cette idée remonte aux travaux de Federbush. Les problèmes avec champ moyen requièrent une compréhension fine de cadres fonctionnels adaptés, comme dans le cas de [DC12]. L'extension de résultats scalaires comme ceux de [DEL14] aux systèmes est très peu comprise. A part quelques cas de systèmes de réaction-diffusion utilisés pour modéliser des réactions chimiques ou des systèmes biologiques simples, très peu d'estimations, même dans le régime asymptotique en temps grand, ont été obtenues à ce jour. C'est une question notoirement difficile, tant sur le plan pratique (complexité algébrique des calculs, y compris d'un point de vue algorithmique) que par ses implications (conjecture de Lieb-Thirring : voir [DLL08]). D'autres questions fondamentales en physique mathématique seront abordées, comme par exemple l'étude des inégalités d'interpolation optimales et des estimations spectrales correspondantes dans le cas d'un Laplacien magnétique [DELL17, BNV16].

3 Impact et retombées du projet

▷ **Domaines susceptibles d'être impactés par le projet.** Au sein des mathématiques, les champs directement impactés par le projet EFI sont principalement les probabilités et les EDP, et plus précisément les processus de Markov, les équations de Vlasov-McKean, les problèmes d'évolution non-linéaires, les équations à champ moyen, les équations cinétiques. De nombreux autres champs sont aussi concernés, en analyse harmonique, théorie spectrale des opérateurs, théorie de la régularité pour les EDP d'évolution, analyse non-linéaire, calcul des variations, méthodes de transport de masse y compris leurs développement numériques récents, *etc.* Sur un autre plan, il s'agit de problèmes multi-échelles, correspondant à différents passages à la limite : discret/continu, micro/macro, cinétique/diffusif qui sont au cœur tant de la modélisation que d'un certain nombre de schémas numériques.
Les champs d'application sont variés : temps caractéristiques de relaxation pour les semi-conducteurs, classification des solutions de modèles de déplacement de foules ou de répartition de richesse, stabilité de systèmes gravitationnels, étude des mouvements collectifs de bactéries ou de déplacement d'oiseaux, *etc.* En fait, il ne s'agit pas seulement de champs d'applications, mais de directions de recherche réellement interdisciplinaires, source de nouveaux problèmes mathématiques, dans lesquelles simulations numériques, algorithmes et calcul scientifique sont appelés à jouer le rôle de langage de communication avec les chercheurs d'autres disciplines. Il est à noter que plusieurs membres du projet participent ou ont participé récemment à des projets pluridisciplinaires avec d'autres disciplines scientifiques notamment la Médecine et la Biologie, certaines branches de la Physique ou de l'Astrophysique (co-encadrements de thèses, projets de recherche ciblés sur le cancer ou les déplacements collectifs)
Au-delà de leur intérêt scientifique, certains modèles ont des implications très concrètes avec un impact économique significatif. Un exemple en est donné par le développement de nouvelles méthodes en analyse de sensibilité (sujet au coeur de la problématique des risques industriels) utilisant pleinement les inégalités fonctionnelles (Poincaré) et nécessitant l'obtention des meilleures constantes possibles afin d'en optimiser l'efficacité.

▷ **Enjeux dans le cadre du défi 7 de l'ANR.** Le projet EFI est centré sur un certain nombre de questions mathématiques fondamentales liées aux méthodes d'entropie (telles qu'elles ont été développées en théorie des probabilités et des EDP depuis une quinzaine d'années) et aux inégalités fonctionnelles : approximations discrètes d'équations à champ moyen (équations de MacKean-Vlasov et systèmes de particules), temps long et hypocoercivité, inégalités fonctionnelles et applications. Ces questions sont théoriques mais elles ont des implications très concrètes. Comprendre en quoi les systèmes de particules diffèrent des modèles continus, ou au contraire donner les cadres précis dans lesquels les modèles discrets approchent les modèles continus, s'avère essentiel tant du point de vue de la modélisation que de la simulation et de l'approximation numérique. Savoir qu'un système converge vers un équilibre avec un taux de convergence exponentiel n'apporte aucune information physique si l'on n'est pas capable d'estimer le taux de convergence ; dans une approche hypocoercive, l'échelle de temps caractéristique ne pourra être déterminée que si l'on est capable d'estimer aussi le préfacteur, c'est-à-dire d'écrire les conditions d'équivalence avec la norme pour laquelle on établit une propriété de contraction uniforme. Cela revient en définitive à estimer – et si possible à caractériser – la constante optimale de l'inégalité fonctionnelle associée au problème d'évolution. Trouver des constantes optimales est bien plus qu'un défi pour mathématiciens : cela revient à décrire le *worst case scenario*, celui qui fera obstruction dans les codes numériques mais pourra aussi servir de *benchmark* pour des approximations efficaces. Sur le plan de la modélisation, l'enjeu consiste aussi à déterminer les mécanismes critiques ou limitants, à décrire et classifier les régimes d'un modèle donné ou à introduire, dans une démarche de modélisation, les éléments qualitatifs du cahier des charges lors de la construction du modèle. Toutes ces considérations, en sus de celles qui ont été données dans la Section 1.1, ont donc conduit les porteurs à présenter le projet EFI au titre de l'axe 1 du défi 7.

▷ **Stratégie de diffusion et de valorisation**. La stratégie du projet EFI repose sur une analyse des enjeux et des moyens qui doivent être apportés pour y répondre, qui est détaillée ci-dessous. Auparavant, rappelons que les porteurs ambitionnent d'apporter une contribution significative aux connaissances scientifiques de leur domaine et qu'ils sont pleinement conscients des enjeux des mathématiques et de leur impact : le coordinateur

a été directeur de l'une des trois institutions qui ont commandité l'étude *EISEM : Etude sur l'Impact Socio-Economique des Mathématiques en France* et tout au long de l'année universitaire 2014-2015, il a participé au pilotage de l'étude (en coopération avec l'AMIES et la FMJH), réalisée par CMI avec le soutien des LabEx de mathématiques français. Les documents sont accessibles en ligne :
• Intégralité et synthèse de l'étude en français et en anglais sur le site de l'AMIES :
http://www.agence-maths-entreprises.fr/a/eisem
• Revue de presse :
https://www.sciencesmaths-paris.fr/fr/etude-de-limpact-socio-economique-des-mathematiques-723.htm
La stratégie de diffusion et de valorisation est donc basée sur une vision réaliste et documentée de la communication sur les mathématiques ; elle en privilégie les aspects scientifiques.

1. Site web. Un site web sera mis en place, qui constituera la source principale d'informations pour les participants au projet EFI. Ce site regroupera des informations sur les activités (*workshops*, séminaires et groupes de travail en lien avec le projet, liens vers les publications et références), ainsi que des documents ou des liens présentant un intérêt pour tout chercheur intéressé par le projet scientifique d'EFI (en particulier de l'information sur les mini-cours, articles ou mémoires de recherche).

2. Publications. La stratégie de diffusion consistera en premier lieu à publier les résultats obtenus dans des journaux internationaux à comité de lecture et à encourager les jeunes chercheurs à soumettre leurs travaux de manière systématique dans des journaux de haut niveau. Bien entendu, les participants seront aussi incités à déposer leurs versions préliminaires sur les serveurs de Hal et d'ArXiv. Au niveau du projet EFI, on cherchera à référencer systématiquement les publications sur le site web au fur et à mesure, non seulement pour donner de la visibilité au projet, mais aussi pour permettre aux participants de se tenir au courant de l'avancée des travaux. Si le besoin s'en fait sentir, une diffusion par e-mail de la liste des travaux réalisés, avec les liens vers les fichiers en ligne, sera aussi assurée. Il s'agit non seulement de tenir les participants bien informés de l'avancement des travaux, mais aussi de contribuer à entretenir une dynamique collective, favoriser les échanges et susciter des collaborations.

3. Impact scientifique pour les jeunes chercheurs. Les participants attendent en premier lieu une avancée des thématiques qu'ils ont mises en avant dans le projet, qui sont au cœur de leur travail de recherche, et qu'ils considèrent comme importantes. Il s'agit d'un groupe dynamique, bien inséré au niveau international et qui manifeste le souhait de travailler de manière coordonnée et collaborative. Le retour d'expérience de projets antérieurs soutenus par l'ANR montre que les principaux bénéficiaires de projets tels qu'EFI sont de *jeunes chercheurs*, que l'on peut regrouper en deux catégories :

1. des doctorants proches de la soutenance et des post-doctorants ou des chargés de recherche et des maîtres de conférence au tout début de leur carrière : pour eux, il s'agit de les ouvrir à des thématiques qui dépassent leur sujet de thèse, de les inciter à développer par eux-mêmes des thèmes de recherche originaux et à rechercher des collaborations avec d'autres chercheurs,
2. de jeunes chercheurs confirmés, proches de l'habilitation, qui ont déjà un corpus de travaux significatifs, dont il s'agit de faire la synthèse et de dégager les grands axes ; pour eux, il s'agit d'établir un programme de recherche à long terme, de diffuser leurs résultats, de se créer une audience et de renforcer leur réseau de collaborateurs.

Conscients de l'importance de ces besoins, les responsables du projet s'engagent à réserver une part très substantielle des réunions scientifiques à ces deux catégories de *jeunes chercheurs* pour leur permettre d'exposer leurs travaux et de nouer les contacts nécessaires à l'évolution de leur travail de recherche.

4. Mini-cours et exposés introductifs. Le projet EFI organisera des mini-cours dont le but est de faire un état de l'art sur une technique ou une classe de résultats. Ces mini-cours s'adresseront aussi bien à des chercheurs confirmés qu'à de jeunes chercheurs. L'objectif est de donner un maximum d'impact aux mini-cours sans pour autant obliger tous les participants à se déplacer pour assister à l'exposé (voir aussi point suivant), d'autant que ces mini-cours pourront être organisés en-dehors de la réunion scientifique annuelle, par exemple à l'occasion de la venue d'un professeur invité par l'une des universités de l'un des participants ou en coordination avec d'autres projets comme le projet Prefalc intitulé *Coopération de formation à la recherche et par la recherche en Mathématiques Appliquées* (CFRRMA, 1/11/2016-31/12/2018 ; France, Cuba et Chili) coordonné par S. Mischler. Certains mini-cours pourront aussi être organisés dans le cadre d'une école doctorale. En pratique, une retransmission vidéo du ou des exposés sera mise en place, et des documents utiles (*slides* du conférencier sous réserve de son accord, lien vers des articles ou d'autres documents de travail, résumé détaillé) seront mis à disposition sur le serveur web du projet. Par ailleurs, il sera demandé aux conférenciers de fournir un document de synthèse long (10 à 20 pages) sur le modèle du séminaire Laurent Schwartz de l'Ecole Polytechnique, qui sera mis en ligne, diffusé aux participants, et sous réserve d'une évaluation favorable, aura vocation à être publié dans le numéro spécial d'une revue. Sur la durée du projet, on peut escompter la publication de deux numéros, soit un tous les deux ans.

5. Utilisation de moyens de communication et de diffusion vidéo. La dispersion géographique des participants constitue un obstacle, et on recherchera dans la mesure du possible à offrir des moyens vidéo permettant de suivre des activités comme les mini-cours sans pour autant devoir organiser un déplacement. Les responsables du projet chercheront à encourager l'utilisation de moyens modernes de communication entre les participants, qu'il s'agisse de visio-conférences comme les logiciels mis à disposition par Renater, faciles à mettre en œuvre, ou d'outils collaboratifs comme ceux de la PLM. Il s'agit en effet de limiter les déplacements inutiles tout en maintenant des contacts aussi rapprochés que possible. Une veille technologique sera assurée pour expérimenter de nouveaux outils et inciter les participants à les utiliser. Ces moyens seront aussi utilisés pour donner un impact maximum aux manifestations et aux mini-cours.

6. Ouverture vers d'autres thématiques et d'autres disciplines. Les thématiques du projet EFI touchent à des questions fondamentales, qui ont des implications dans de nombreux domaines des mathématiques, en particulier au travers des équations aux dérivées partielles et des inégalités fonctionnelles. Certains chercheurs, par exemple en physique mathématique ou, en théorie des EDP (calcul des variations, théorie de la régularité pour les problèmes d'évolution non-linéaires, transport de masse), ou encore en biologie mathématique, partagent des préoccupations très proches de celles des porteurs du projet EFI. Il est donc naturel de favoriser les interactions avec ces chercheurs et c'est donc en priorité à eux que nous souhaitons nous adresser pour les mini-cours, avec deux objectifs : ouvrir des collaborations nouvelles, motivées par des applications, et inciter les jeunes chercheurs du projet à s'investir dans des thématiques innovantes, à adopter de nouveaux points de vue, et à renouveler leurs sujets en s'ouvrant à de nouveaux champs d'applications. Au travers des modèles et de la modélisation, le projet EFI est aussi en interaction avec un certain nombre de branches de la physique, de la biologie et et des sciences sociales : il s'agira donc de favoriser une vraie ouverture interdisciplinaire.

Références

[AGS08] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[AGS17] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. Diffusion, optimal transport and Ricci curvature for metric measure space. *EMS Newsletter*, 3(103) :19–28, 2017.

[BBCG08] D. Bakry, F. Barthe, P. Cattiaux, and A. Guillin. A simple proof of the Poincaré inequality for a large class of probability measures including the log-concave case. *Elec. Comm. Probab.*, 13 :60–66, 2008.

[BBG12] D. Bakry, F. Bolley, and I. Gentil. Dimension dependent hypercontractivity for Gaussian kernels. *Probab. Theory Related Fields*, 154(3-4) :845–874, 2012.

[BBG17] D. Bakry, F. Bolley, and I. Gentil. The Li–Yau inequality and applications under a curvature-dimension condition. *Ann. Inst. Fourier*, 67(1) :397–421, 2017.

[BBGM12] D. Bakry, F. Bolley, I. Gentil, and P. Maheux. Weighted Nash inequalities. *Rev. Mat. Iberoam.*, 28(3) :879–906, 2012.

[BCC12] A. Blanchet, E. A. Carlen, and J. A. Carrillo. Functional inequalities, thick tails and asymptotics for the critical mass Patlak-Keller-Segel model. *J. Funct. Anal.*, 262(5) :2142–2230, 2012.

[BCF17] F. Bolley, D. Chafaï, and J. Fontbona. Dynamics of a planar coulomb gas. *In preparation*, 2017.

[BCG08] D. Bakry, P. Cattiaux, and A. Guillin. Rate of convergence for ergodic continuous Markov processes : Lyapunov versus Poincaré. *J. Funct. Anal.*, 254(3) :727–759, 2008.

[BDMN17a] M. Bonforte, J. Dolbeault, M. Muratori, and B. Nazaret. Weighted fast diffusion equations (Part I) : Sharp asymptotic rates without symmetry and symmetry breaking in Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities. *Kinetic and Related Models*, 10(1) :33–59, 2017.

[BDMN17b] M. Bonforte, J. Dolbeault, Ma. Muratori, and B. Nazaret. Weighted fast diffusion equations (Part II) : Sharp asymptotic rates of convergence in relative error by entropy methods. *Kinetic and Related Models*, 10(1) :61–91, 2017.

[BFL08] R. D. Benguria, R. L. Frank, and M. Loss. The sharp constant in the Hardy-Sobolev-Maz'ya inequality in the three dimensional upper half-space. *Math. Res. Lett.*, 15(4) :613–622, 2008.

[BG10a] F. Bolley and I. Gentil. Phi-entropy inequalities and Fokker-Planck equations. In *Progress in analysis and its applications*, pages 463–469. World Sci. Publ., Hackensack, 2010.

[BG10b] F. Bolley and I. Gentil. Phi-entropy inequalities for diffusion semigroups. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 93(5) :449–473, 2010.

[BGG12] F. Bolley, I. Gentil, and A. Guillin. Convergence to equilibrium in Wasserstein distance for Fokker-Planck equations. *J. Funct. Anal.*, 263(8) :2430–2457, 2012.

[BGG13] F. Bolley, I. Gentil, and A. Guillin. Uniform convergence to equilibrium for granular media. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 208(2) :429–445, 2013.

[BGG17] F. Bolley, I. Gentil, and A. Guillin. Dimensional improvements of the logarithmic Sobolev, Talagrand and Brascamp-Lieb inequalities. *To appear in Annals of Probab.*, 2017.

[BGL14] D. Bakry, I. Gentil, and M. Ledoux. *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*, volume 348 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer, Cham, 2014.

[BGM10] F. Bolley, A. Guillin, and F. Malrieu. Trend to equilibrium and particle approximation for a weakly selfconsistent Vlasov-Fokker-Planck equation. *Math. Model. Numer. Anal.*, 44(5) :867–884, 2010.

[BGV07] F. Bolley, A. Guillin, and C. Villani. Quantitative concentration inequalities for empirical measures on non-compact spaces. *Probab. Theory Related Fields*, 137(3-4) :541–593, 2007.

[BGW15] F. Bolley, A. Guillin, and X. Wang. Non ultracontractive heat kernel bounds by Lyapunov conditions. *Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. A*, 35(3) :857–870, 2015.

[BHM16] E. Bouin, F. Hoffmann, and C. Mouhot. Exponential decay to equilibrium for a fibre lay-down process on a moving conveyor belt. *ArXiv e-prints*, May 2016.

[BNV16] D. Bonheure, M. Nys, and J. Van Schaftingen. Properties of groundstates of nonlinear Schrödinger equations under a weak constant magnetic field. *ArXiv e-prints*, July 2016.

[BT17] F. Baudoin and C. Tardif. Hypocoercive estimates on foliations and velocity spherical Brownian motion. *To appear in Kinetic Related Methods*, 2017.

[CCE12] V. Calvez, L. Corrias, and M. A. Ebde. Blow-up, concentration phenomenon and global existence for the Keller-Segel model in high dimension. *Comm. Partial Diff. Eq.*, 37(4) :561–584, 2012.

[CCG12] P. Cattiaux, D. Chafaï, and A. Guillin. Central limit theorems for additive functionals of ergodic Markov diffusions processes. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 9(2) :337–382, 2012.

[CD14] J. Campos and J. Dolbeault. Asymptotic Estimates for the Parabolic-Elliptic Keller-Segel Model in the Plane. *Comm. Partial Diff. Eq.*, 39(5) :806–841, 2014.

[CDGJ06] J. A. Carrillo, J. Dolbeault, I. Gentil, and A. Jüngel. Entropy-energy inequalities and improved convergence rates for nonlinear parabolic equations. *Disc. Cont. Dyn. Syst. Ser. B*, 6(5) :1027–1050, 2006.

[CDH17] K. Carrapatoso, L. Desvillettes, and L. He. Estimates for the Large Time Behavior of the Landau Equation in the Coulomb Case. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 224(2) :381–420, 2017.

[CDP17] P. Cattiaux, F. Delebecque, and L. Pédèches. Stochastic Cucker Smale models : old and new. *Preprint*, 2017.

[CEM14] L. Corrias, M. Escobedo, and J. Matos. Existence, uniqueness and asymptotic behavior of the solutions to the fully parabolic Keller-Segel system in the plane. *J. Diff. Eq.*, 257(6) :1840–1878, 2014.

[CEP15] N. Cuneo, J.-P. Eckmann, and C. Poquet. Non-equilibrium steady state and subgeometric ergodicity for a chain of three coupled rotors. *Nonlinearity*, 28(7) :2397, 2015.

[CF13] E. A. Carlen and A. Figalli. Stability for a GNS inequality and the log-HLS inequality, with application to the critical mass Keller-Segel equation. *Duke Math. J.*, 162(3) :579–625, 2013.

[CFP17] T. A. Courtade, M. Fathi, and A. Pananjady. Existence of Stein Kernels under a Spectral Gap, and Discrepancy Bound. *ArXiv e-prints*, March 2017.

[CFW13] S. Chen, R. L. Frank, and T. Weth. Remainder terms in the fractional Sobolev inequality. *Indiana Univ. Math. J.*, 62(4) :1381–1397, 2013.

[CG06] P. Cattiaux and A. Guillin. On quadratic transportation cost inequalities. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 86(4) :341–361, 2006.

[CG08] P. Cattiaux and A. Guillin. Deviation bounds for additive functionals of Markov processes. *ESAIM Probab. Stat.*, 12 :12–29, 2008.

[CG09] P. Cattiaux and A. Guillin. Trends to equilibrium in total variation distance. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 45(1) :117–145, 2009.

[CG14a] P. Cattiaux and A. Guillin. Functional inequalities via Lyapunov conditions. In *Optimal transportation*, volume 413 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 274–287. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.

[CG14b] P. Cattiaux and A. Guillin. Semi log-concave Markov diffusions. In *Séminaire de Probabilités XLVI*, volume 2123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 231–292. Springer, Cham, 2014.

[CG17] Patrick Cattiaux and Arnaud Guillin. Hitting times, functional inequalities, Lyapunov conditions and uniform ergodicity. *J. Funct. Anal.*, 272(6) :2361–2391, 2017.

[CGG07] P. Cattiaux, I. Gentil, and A. Guillin. Weak logarithmic Sobolev inequalities and entropic convergence. *Probab. Theory Related Fields*, 139(3-4) :563–603, 2007.

[CGGR10] P. Cattiaux, N. Gozlan, A. Guillin, and C. Roberto. Functional inequalities for heavy tailed distributions and application to isoperimetry. *Elec. J. Probab.*, 15 :no. 13, 346–385, 2010.

[CGM08] P. Cattiaux, A. Guillin, and F. Malrieu. Probabilistic approach for granular media equations in the non-uniformly convex case. *Probab. Theory Related Fields*, 140(1-2) :19–40, 2008.

[CGR10] P. Cattiaux, A. Guillin, and C. Roberto. Poincaré inequality and the L^p convergence of semi-groups. *Elec. Commun. Probab.*, 15 :270–280, 2010.

[CGW10] P. Cattiaux, A. Guillin, and L.-M. Wu. A note on Talagrand's transportation inequality and logarithmic Sobolev inequality. *Probab. Theory Related Fields*, 148(1-2) :285–304, 2010.

[CGW11] P. Cattiaux, A. Guillin, and L.-M. Wu. Some remarks on weighted logarithmic Sobolev inequality. *Indiana Univ. Math. J.*, 60(6) :1885–1904, 2011.

[CGWW09] P. Cattiaux, A. Guillin, F.-Y. Wang, and L. Wu. Lyapunov conditions for super Poincaré inequalities. *J. Funct. Anal.*, 256(6) :1821–1841, 2009.

[CGZ13] P. Cattiaux, A. Guillin, and P.-A. Zitt. Poincaré inequalities and hitting times. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 49(1) :95–118, 2013.

[CL01] E. Cépa and D. Lépingle. Brownian particles with electrostatic repulsion on the circle : Dyson's model for unitary random matrices revisited. *ESAIM Probab. Statist.*, 5 :203–224, 2001.

[CM17] K. Carrapatoso and S. Mischler. Uniqueness and long time asymptotics for the parabolic–parabolic Keller–Segel equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 42(2) :291–345, 2017.

[CMV03] J. A. Carrillo, R. J. McCann, and C. Villani. Kinetic equilibration rates for granular media and related equations : entropy dissipation and mass transportation estimates. *Rev. Mat. Iberoam.*, 19(3) :971–1018, 2003.

[CMV06] J. A. Carrillo, R. J. McCann, and C. Villani. Contractions in the 2-Wasserstein length space and thermalization of granular media. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 179(2) :217–263, 2006.

[CP16] P. Cattiaux and L. Pédèches. The 2-D stochastic Keller-Segel particle model : existence and uniqueness. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 13(1) :447–463, 2016.

[CTW16] K. Carrapatoso, I. Tristani, and K.-C. Wu. Cauchy problem and exponential stability for the inhomogeneous Landau equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 221(1) :363–418, 2016.

[DBGV16] S. De Bièvre, T. Goudon, and A. Vavasseur. Particles interacting with a vibrating medium : existence of solutions and convergence to the Vlasov-Poisson system. *SIAM J. Math. Anal.*, 48(6) :3984–4020, 2016.

[DC12] J. Dolbeault and J. Campos. A functional framework for the Keller-Segel system : logarithmic Hardy-Littlewood-Sobolev and related spectral gap inequalities. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 350(21-22) :949–954, 2012.

[DEL14] J. Dolbeault, M. J. Esteban, and A. Laptev. Spectral estimates on the sphere. *Analysis & PDE*, 7(2) :435–460, 2014.

[DEL16a] J. Dolbeault, M. J. Esteban, and M. Loss. Interpolation inequalities, nonlinear flows, boundary terms, optimality and linearization. *J. elliptic and parabolic eq.*, 2 :267–295, 2016.

[DEL16b] J. Dolbeault, M. J. Esteban, and M. Loss. Rigidity versus symmetry breaking via nonlinear flows on cylinders and Euclidean spaces. *Invent. Math.*, 206(2) :397–440, 2016.

[DEL17] J. Dolbeault, M. J. Esteban, and M. Loss. Interpolation inequalities on the sphere : linear vs. nonlinear flows. *Annales Fac. Sciences Toulouse, mathématiques*, 2017.

[DELL17] J. Dolbeault, M. J. Esteban, A. Laptev, and M. Loss. Interpolation inequalities in presence of a magnetic field and application to Schrödinger operators. *In preparation*, 2017.

[DELM17] J. Dolbeault, M. J. Esteban, M. Loss, and M. Muratori. Symmetry for extremal functions in subcritical Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities. *C. R. Math.*, 355(2) :133 – 154, 2017.

[DGGW08] J. Dolbeault, I. Gentil, A. Guillin, and F.-Y. Wang. L^q-functional inequalities and weighted porous media equations. *Potential Anal.*, 28(1) :35–59, 2008.

[DGJ06] J. Dolbeault, I. Gentil, and A. Jüngel. A logarithmic fourth-order parabolic equation and related logarithmic Sobolev inequalities. *Commun. Math. Sci.*, 4(2) :275–290, 2006.

[DJ14] J. Dolbeault and G. Jankowiak. Sobolev and Hardy–Littlewood–Sobolev inequalities. *J. Diff. Eq.*, 257(6) :1689–1720, 2014.

[DJM15] J. Dolbeault, G. Jankowiak, and P. Markowich. Stationary solutions of Keller-Segel-type crowd motion and herding models : multiplicity and dynamical stability. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 3(3) :211–241, 2015.

[DLL08] J. Dolbeault, A. Laptev, and M. Loss. Lieb-Thirring inequalities with improved constants. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 10 :1121–1126, 2008.

[DM15] A. Durmus and E Moulines. Non-asymptotic convergence analysis for the Unadjusted Langevin Algorithm. *Preprint*, 2015.

[DMS15] J. Dolbeault, C. Mouhot, and C. Schmeiser. Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(6) :3807–3828, 2015.

[DNS12] J. Dolbeault, B. Nazaret, and G. Savaré. From Poincaré to logarithmic Sobolev inequalities : A gradient flow approach. *SIAM J. Math. Anal.*, 44(5) :3186–3216, 2012.

[DPDG04] M. Del Pino, J. Dolbeault, and I. Gentil. Nonlinear diffusions, hypercontractivity and the optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality. *J. Math. Anal. Appl.*, 293(2) :375–388, 2004.

[DT13] J. Dolbeault and G. Toscani. Improved interpolation inequalities, relative entropy and fast diffusion equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 30(5) :917 – 934, 2013.

[DT16a] J. Dolbeault and G. Toscani. Nonlinear diffusions : Extremal properties of Barenblatt profiles, best matching and delays. *Nonlinear Analysis : TMA*, 138 :31–43, 6 2016.

[DT16b] J. Dolbeault and G. Toscani. Stability results for logarithmic Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Int. Math. Res. Not.*, 2 :473–498, 2016.

[DZ16] J. Dolbeault and A. Zhang. Optimal functional inequalities for fractional operators on the sphere and applications. *Advanced Nonlinear Studies*, 16(4) :863–880, 2016.

[DZ17] J. Dolbeault and A. Zhang. Flows and functional inequalities for fractional operators. *To appear in Applicable Analysis*, 2017.

[EF16] M. Erbar and M. Fathi. Poincaré, modified logarithmic Sobolev and isoperimetric inequalities for Markov chains with non-negative Ricci curvature. *Preprint*, 2016.

[EGZ16] A. Eberle, A. Guillin, and R. Zimmer. Quantitative Harris type theorems for diffusions and McKean-Vlasov processes. *Preprint*, 2016.

[EGZ17] A. Eberle, A. Guillin, and R. Zimmer. Couplings and quantitative contraction rates for Langevin dynamics. *Preprint*, 2017.

[FG17] N. Fournier and A. Guillin. From a Kac-like particle system to the Landau equation for hard potentials and Maxwell molecules. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 50(1) :157–199, 2017.

[FH16] N. Fournier and M. Hauray. Propagation of chaos for the Landau equation with moderately soft potentials. *Ann. Probab.*, 44(6) :3581–3660, 2016.

[FHM14] N. Fournier, M. Hauray, and S. Mischler. Propagation of chaos for the 2D viscous vortex model. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 16(7) :1423–1466, 2014.

[Fig13] A. Figalli. Stability in geometric and functional inequalities. In *European Congress of Mathematics*, pages 585–599. Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.

[FIL16] M. Fathi, E. Indrei, and M. Ledoux. Quantitative logarithmic Sobolev inequalities and stability estimates. *Disc. Contin. Dyn. Syst.*, 36(12) :6835–6853, 2016.

[FJ17] N. Fournier and B. Jourdain. Stochastic particle approximation of the Keller-Segel equation and two-dimensional generalization of Bessel processes,. *To appear in Ann. Appl. Probab.*, 2017.

[FL11] R. L. Frank and E. H. Lieb. Spherical reflection positivity and the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. In *Concentration, functional inequalities and isoperimetry*, volume 545 of *Contemp. Math.*, pages 89–102. Amer. Math. Soc., Providence, 2011.

[FM16] N. Fournier and S. Mischler. Rate of convergence of the Nanbu particle system for hard potentials. *Ann. Probab.*, 44(1) :589–627, 2016.

[FMP10] A. Figalli, F. Maggi, and A. Pratelli. A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities. *Invent. Math.*, 182(1) :167–211, 2010.

[FN17] A. Figalli and R. Neumayer. Gradient stability for the Sobolev inequality : the case $p \geq 2$. *To appear in J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 2017.

[GM16a] T.-E. Ghoul and N. Masmoudi. Stability of infinite time blow up for the Patlak Keller Segel system. *ArXiv e-prints*, October 2016.

[GM16b] A. Guillin and P. Monmarché. Optimal linear drift for the speed of convergence of an hypoelliptic diffusion. *Elec. Comm. Probab.*, 21 :Paper No. 74, 14, 2016.

[HJ07] M. Hauray and P.-E. Jabin. N-particles approximation of the Vlasov equations with singular potential. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 183(3) :489–524, 2007.

[HJ15] M. Hauray and P.-E. Jabin. Particle approximation of Vlasov equations with singular forces : propagation of chaos. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4)*, 48(4) :891–940, 2015.

[HT16] F. Hérau and L. Thomann. On global existence and trend to the equilibrium for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system with exterior confining potential. *J. Funct. Anal.*, 271(5) :1301–1340, 2016.

[IOS17] A. Iacobucci, S. Olla, and G. Stoltz. Convergence rates for nonequilibrium Langevin dynamics. *ArXiv e-prints*, February 2017.

[Jün16] A. Jüngel. *Entropy methods for diffusive partial differential equations.* SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Cham, 2016.

[Kas07] M. Kassmann. Harnack inequalities : an introduction. *Bound. Value Probl.*, 2007 :21, 2007.

[Li17] X. Li. Asymptotic rates of convergence of solutions to Nernst-Planck and Debye-Hückel drift-diffusion systems. *Work in progress*, 2017.

[Mil17] E. Milman. Beyond traditional Curvature-Dimension I : New model spaces for isoperimetric and concentration inequalities in negative dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369(5) :3605–3637, 2017.

[MM13] S. Mischler and C. Mouhot. Kac's program in kinetic theory. *Invent. Math.*, 193(1) :1–147, 2013.

[Mon14] P. Monmarché. Hypocoercive relaxation to equilibrium for some kinetic models. *Kinet. Relat. Models*, 7(2) :341–360, 2014.

[Mon15a] P. Monmarché. Generalized Γ calculus and application to interacting particles on a graph. *ArXiv e-prints*, October 2015.

[Mon15b] P. Monmarché. Hypocoercivity in metastable settings and kinetic simulated annealing. *ArXiv e-prints*, February 2015.

[Mon15c] P. Monmarché. On $\mathcal{H}^1$ and entropic convergence for contractive PDMP. *Elec. J. Probab.*, 20 :Paper No. 128, 30, 2015.

[Mon16] P. Monmarché. Long-time behaviour and propagation of chaos for mean field kinetic particles. *To apper in Stoch. Proc. Appl.*, 2016.

[MT17] S. Mischler and I. Tristani. Uniform semigroup spectral analysis of the discrete, fractional and classical Fokker-Planck equations. *J. École polytechnique – Mathématiques*, 4 :389–433, 2017.

[Oht16] S.-I. Ohta. (K, N)-convexity and the curvature-dimension condition for negative N. *J. Geom. Anal.*, 26(3) :2067–2096, 2016.

[Péd17] L. Pédèches. Asymptotic properties of various stochastic Cucker-Smale dynamics. *Preprint*, 2017.

[Rez04] F. Rezakhanlou. Boltzmann-Grad limits for stochastic hard sphere models. *Comm. Math. Phys.*, 248(3) :553–637, 2004.

[Rou14] M. Rousset. A N-uniform quantitative Tanaka's theorem for the conservative Kac's N-particle system with Maxwell molecules. *ArXiv e-prints*, July 2014.

[RS14] P. Raphaël and R. Schweyer. On the stability of critical chemotactic aggregation. *Math. Ann.*, 359(1-2) :267–377, 2014.

[RS17] J. Roussel and G. Stoltz. Spectral methods for Langevin dynamics and associated error estimates. *ArXiv e-prints*, February 2017.

[Szn91] A.-S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989, vol. 1464 of Lecture Notes in Math, Springer, Berlin*, 1991.

[Tri14] I. Tristani. Exponential convergence to equilibrium for the homogeneous Boltzmann equation for hard potentials without cut-off. *J. Stat. Phys.*, 157(3) :474–496, 2014.

[Tri15] I. Tristani. Fractional Fokker-Planck equation. *Comm. Math. Sci.*, 13(5) :1243–1260, 2015.

[Vil09a] C. Villani. Hypocoercivity. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 202(950), 2009.

[Vil09b] C. Villani. *Optimal transport, old and new*, volume 338 of *Grund. Math. Wiss.* Springer-Verlag, Berlin, 2009.

Sites web des participants

BOLLEY	François	http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/bolley/
CATTIAUX	Patrick	http://perso.math.univ-toulouse.fr/cattiaux/
DOLBEAULT	Jean	https://www.ceremade.dauphine.fr/~dolbeaul/
GENTIL	Ivan	http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/gentil/
GUILLIN	Arnaud	http://math.univ-bpclermont.fr/~guillin/
BOUIN	Emeric	https://www.ceremade.dauphine.fr/~bouin/
CHAFAI	Djalil	http://djalil.chafai.net/
CORRIAS	Lucilla	https://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/corrias/
FROUVELLE	Amic	https://www.ceremade.dauphine.fr/~amic/
MONMARCHÉ	Pierre	http://cermics.enpc.fr/cermics-annuaire/homes/Monmarche.html
REYGNER	Julien	https://cermics.enpc.fr/~reygnerj/
TARDIF	Camille	http://www.lpma-paris.fr/pageperso/tardif/
TRISTANI	Isabelle	http://tristani.perso.math.cnrs.fr/
CARRAPATOSO	Kleber	http://carrapatoso.perso.math.cnrs.fr/
DELEBECQUE	Fanny	http://www.math.univ-toulouse.fr/~fdelebec/
FATHI	Max	https://www.normalesup.org/~mfathi/
HAURAY	Maxime	https://old.i2m.univ-amu.fr/~mhauray/
POQUET	Christophe	http://math.univ-lyon1.fr/~poquet/