Matrices et graphes aléatoires (Mega):
Valeurs propres extrêmes de matrices non-hermitiennes perturbés.

Jean Rochet

MAP5, UMR CNRS 8145,

Université Paris Descartes, Sorbonne Paris Cité,

45 rue des Saints Pères, 75006 Paris

Plan

1. Rappels
   - Modèle du Single Ring Theorem
   - Perturbations de rangs finis
2. Convergence des Outliers
3. Fluctuations

Section 1

Rappels

Valeurs singulières : On appelle valeurs singulières d'une matrice $\mathbf{A}$ les valeurs propres de $\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{A}^*}$ (partie positive de la décomposition polaire $\mathbf{A} = \mathbf{U}\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{A}^*}$ où $\mathbf{U}$ est unitaire).

Valeurs singulières : On appelle valeurs singulières d'une matrice $\mathbf{A}$ les valeurs propres de $\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{A}^*}$ (partie positive de la décomposition polaire $\mathbf{A} = \mathbf{U}\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{A}^*}$ où $\mathbf{U}$ est unitaire).

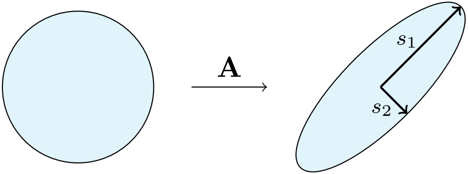


Figure: Valeurs singulières s_1 et s_2 de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Valeurs singulières : On appelle valeurs singulières d'une matrice $\mathbf{A}$ les valeurs propres de $\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{A}^*}$ (partie positive de la décomposition polaire $\mathbf{A} = \mathbf{U}\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{A}^*}$ où $\mathbf{U}$ est unitaire).

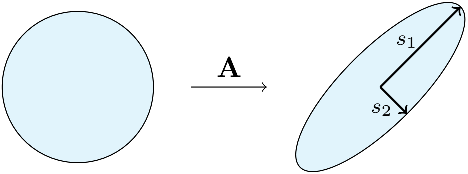


Figure: Valeurs singulières s_1 et s_2 de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

$$s_{\max} = \|A\|_{\mathrm{op}}, \qquad s_{\min} = \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$$

Modèle isotrope

Si on connaît les valeurs singulières d'une matrice $\mathbf{A}$, *que peut-on dire de ses valeurs propres ?*

Modèle isotrope

Si on connaît les valeurs singulières d'une matrice $\mathbf{A}$*, que peut-on dire de ses valeurs propres ?*

On définit une suite de matrices aléatoires $\mathbf{A}_N$ de la manière suivante : pour tout $N \geq 1$

Modèle isotrope

Si on connaît les valeurs singulières d'une matrice $\mathbf{A}$, que peut-on dire de ses valeurs propres ?

On définit une suite de matrices aléatoires $\mathbf{A}_N$ de la manière suivante : pour tout $N \geq 1$

- on tire aléatoirement $s_1, \ldots, s_N$ dans $\mathbb{R}^+$,

Modèle isotrope

Si on connaît les valeurs singulières d'une matrice $\mathbf{A}$*, que peut-on dire de ses valeurs propres ?*

On définit une suite de matrices aléatoires $\mathbf{A}_N$ de la manière suivante : pour tout $N \geq 1$

- on tire aléatoirement $s_1, \ldots, s_N$ dans $\mathbb{R}^+$,
- on tire deux matrices $\mathbf{U}_N$ et $\mathbf{V}_N$ de taille $N \times N$ selon la mesure de Haar, indépendantes entre elles et des $(s_i)_i$.

Modèle isotrope

Si on connaît les valeurs singulières d'une matrice $\mathbf{A}$, que peut-on dire de ses valeurs propres ?

On définit une suite de matrices aléatoires $\mathbf{A}_N$ de la manière suivante : pour tout $N \geq 1$

- on tire aléatoirement $s_1, \ldots, s_N$ dans $\mathbb{R}^+$,
- on tire deux matrices $\mathbf{U}_N$ et $\mathbf{V}_N$ de taille $N \times N$ selon la mesure de Haar, indépendantes entre elles et des $(s_i)_i$.
- on pose

$$\mathbf{A}_N := \mathbf{U}_N \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_N \end{pmatrix} \mathbf{V}_N$$

Single Ring Theorem

Théorème (Guionnet, Krishnapur, Zeitouni 2010)

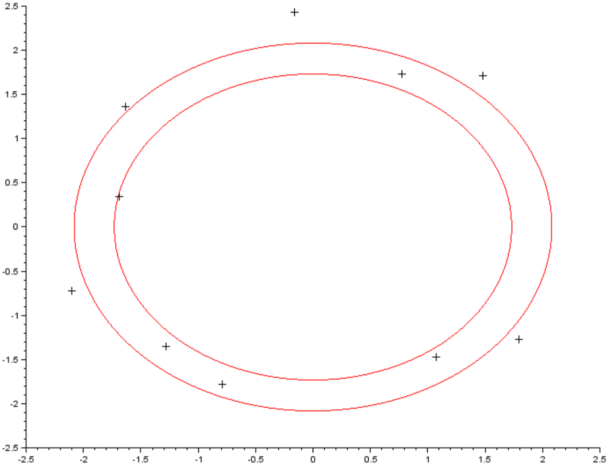
Soit $\mathbf{A}_N$ tel que la distribution empirique des valeurs singulières $\nu_N = \frac{1}{N}\sum \delta_{s_i}$:= converge vers une mesure ν à support compact dans $\mathbb{R}^+$ (et quelques hypothèses...). Alors la distribution spectrale empirique de $\mathbf{A}_N$, $\mu_N = \frac{1}{N}\sum \delta_{\lambda_i}$ converge vers une mesure μ qui :

- *ne dépend que de ν,*
- *est radiale, à densité et à support dans un anneau $\{a \leq |z| \leq b\}$.*

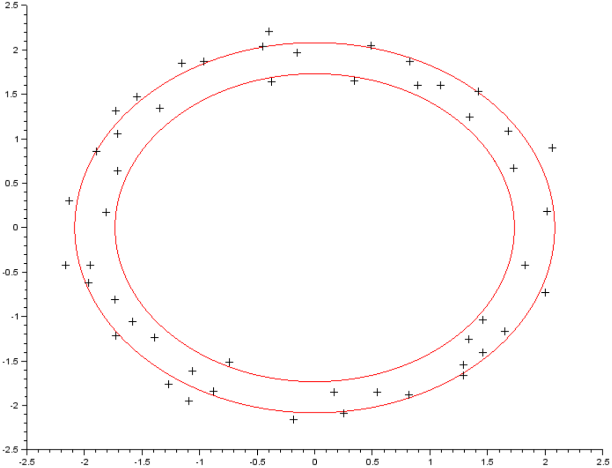
Les rayons de l'anneau sont aussi des fonctions de ν

$$a = \frac{1}{\sqrt{\int x^{-2}\nu(dx)}} \qquad \text{et} \qquad b = \sqrt{\int x^2 \nu(dx)}.$$

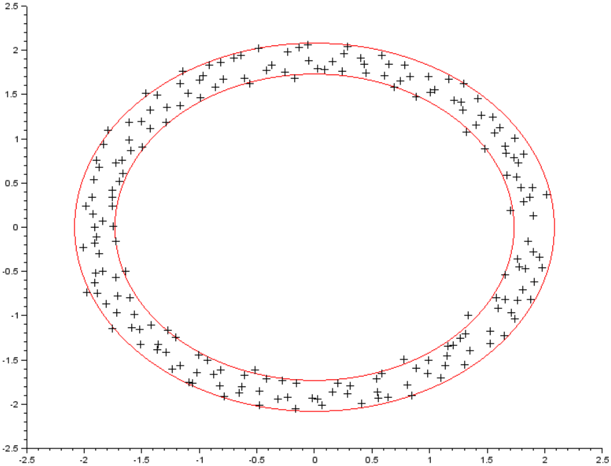
Spectre de $\mathbf{A}$ pour $N = 10$



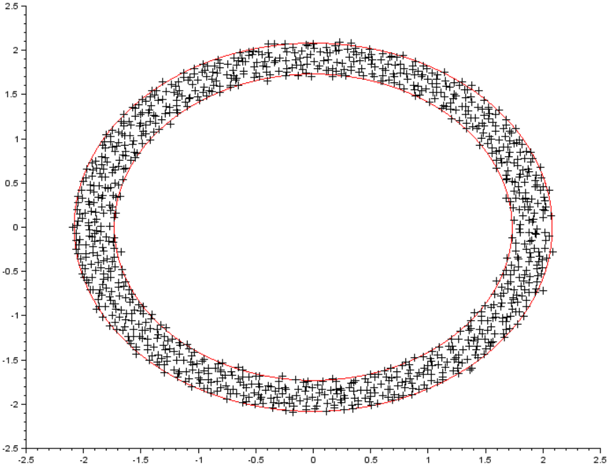
Spectre de $\mathbf{A}$ pour $N = 50$



Spectre de $\mathbf{A}$ pour $N = 200$



Spectre de $\mathbf{A}$ pour $N = 1000$



Convergence du support

Théorème (Guionnet, Zeitouni 2010)

De plus, le support de la mesure μ_N converge vers le support de la mesure μ. Autrement, dit

$$\min |\lambda(\mathbf{A}_N)| \longrightarrow a, \qquad \max |\lambda(\mathbf{A}_N)| \longrightarrow b.$$

Convergence du support

Théorème (Guionnet, Zeitouni 2010)

De plus, le support de la mesure μ_N converge vers le support de la mesure μ. Autrement, dit

$$\min|\lambda(\mathbf{A}_N)| \longrightarrow a, \qquad \max|\lambda(\mathbf{A}_N)| \longrightarrow b.$$

Ce modèle n'admet donc pas d'*outliers* naturels.

Spiked Model

Pour tout $N \geq 1$, soit $\mathbf{A}_N$ une matrice aléatoire de taille $N \times N$ et soit $\mathbf{P}_N$ une matrice déterministe de même taille (ou indépendante de $\mathbf{A}_N$).

Pour tout $N \geq 1$, soit $\mathbf{A}_N$ une matrice aléatoire de taille $N \times N$ et soit $\mathbf{P}_N$ une matrice déterministe de même taille (ou indépendente de $\mathbf{A}_N$).
On supposera que :

- L'ESD de la suite $\mathbf{A}_N$ ($\mu_N := \frac{1}{N} \sum_i \delta_{\lambda_i(\mathbf{A}_N)}$) converge vers une mesure μ à support dans un compact D.

Spiked Model

Pour tout $N \geq 1$, soit $\mathbf{A}_N$ une matrice aléatoire de taille $N \times N$ et soit $\mathbf{P}_N$ une matrice déterministe de même taille (ou indépendente de $\mathbf{A}_N$).

On supposera que :

- L'ESD de la suite $\mathbf{A}_N$ ($\mu_N := \frac{1}{N} \sum_i \delta_{\lambda_i(\mathbf{A}_N)}$) converge vers une mesure μ à support dans un compact D.
- $\sup \left|\lambda(\mathbf{A}_N)\right| \to \sup |D|$ et $\inf \left|\lambda(\mathbf{A}_N)\right| \to \inf |D|$. (Absence d'outliers).

Spiked Model

Pour tout $N \geq 1$, soit $\mathbf{A}_N$ une matrice aléatoire de taille $N \times N$ et soit $\mathbf{P}_N$ une matrice déterministe de même taille (ou indépendente de $\mathbf{A}_N$).

On supposera que :

- L'ESD de la suite $\mathbf{A}_N$ ($\mu_N := \frac{1}{N}\sum_i \delta_{\lambda_i(\mathbf{A}_N)}$) converge vers une mesure μ à support dans un compact D.
- $\sup\left|\lambda(\mathbf{A}_N)\right| \to \sup|D|$ et $\inf\left|\lambda(\mathbf{A}_N)\right| \to \inf|D|$. (Absence d'outliers).
- Il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\max_N[\mathrm{rank}(\mathbf{P}_N)] = r$ et $\|\mathbf{P}_N\|_{\mathrm{op}} = O(1)$.

Spiked Model

Pour tout $N \geq 1$, soit $\mathbf{A}_N$ une matrice aléatoire de taille $N \times N$ et soit $\mathbf{P}_N$ une matrice déterministe de même taille (ou indépendente de $\mathbf{A}_N$).

On supposera que :

- L'ESD de la suite $\mathbf{A}_N$ ($\mu_N := \frac{1}{N} \sum_i \delta_{\lambda_i(\mathbf{A}_N)}$) converge vers une mesure μ à support dans un compact D.
- $\sup \left|\lambda(\mathbf{A}_N)\right| \to \sup |D|$ et $\inf \left|\lambda(\mathbf{A}_N)\right| \to \inf |D|$. (Absence d'outliers).
- Il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\max_N[\mathrm{rank}(\mathbf{P}_N)] = r$ et $\|\mathbf{P}_N\|_{\mathrm{op}} = O(1)$.

On étudie la déformation de la suite $\mathbf{A}_N$ notée $\widetilde{\mathbf{A}}_N$ définie par

$$\widetilde{\mathbf{A}}_N := \mathbf{A}_N + \mathbf{P}_N$$

.

Section 2

Convergence des Outliers

Cadre

On considère une suite de matrices $\mathbf{A}_N$ de la forme

$$\mathbf{A}_N := \mathbf{U}_N \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_N \end{pmatrix} \mathbf{V}_N.$$

Cadre

On considère une suite de matrices $\mathbf{A}_N$ de la forme

$$\mathbf{A}_N := \mathbf{U}_N \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_N \end{pmatrix} \mathbf{V}_N.$$

On suppose que $\frac{1}{N} \sum \delta_{s_i}$ converge vers une mesure ν à support compact dans $\mathbb{R}^+$.

Cadre

On considère une suite de matrices $\mathbf{A}_N$ de la forme

$$\mathbf{A}_N := \mathbf{U}_N \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_N \end{pmatrix} \mathbf{V}_N.$$

On suppose que $\frac{1}{N}\sum \delta_{s_i}$ converge vers une mesure ν à support compact dans $\mathbb{R}^+$.
Soit $\mathbf{P}_N$ une suite de matrices déterministes vérifiant

Cadre

On considère une suite de matrices $\mathbf{A}_N$ de la forme

$$\mathbf{A}_N := \mathbf{U}_N \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_N \end{pmatrix} \mathbf{V}_N.$$

On suppose que $\frac{1}{N}\sum \delta_{s_i}$ converge vers une mesure ν à support compact dans $\mathbb{R}^+$.

Soit $\mathbf{P}_N$ une suite de matrices déterministes vérifiant

- $\mathrm{rank}(\mathbf{P}_n) \leq r$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$,

Cadre

On considère une suite de matrices $\mathbf{A}_N$ de la forme

$$\mathbf{A}_N := \mathbf{U}_N \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_N \end{pmatrix} \mathbf{V}_N.$$

On suppose que $\frac{1}{N} \sum \delta_{s_i}$ converge vers une mesure ν à support compact dans $\mathbb{R}^+$.
Soit $\mathbf{P}_N$ une suite de matrices déterministes vérifiant

- $\operatorname{rank}(\mathbf{P}_n) \leq r$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$,
- $\|\mathbf{P}_N\|_{\mathrm{op}} = O(1)$.

Cadre

On considère une suite de matrices $\mathbf{A}_N$ de la forme

$$\mathbf{A}_N := \mathbf{U}_N \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_N \end{pmatrix} \mathbf{V}_N.$$

On suppose que $\frac{1}{N}\sum \delta_{s_i}$ converge vers une mesure ν à support compact dans $\mathbb{R}^+$.

Soit $\mathbf{P}_N$ une suite de matrices déterministes vérifiant

- $\mathrm{rank}(\mathbf{P}_n) \leq r$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$,
- $\|\mathbf{P}_N\|_{\mathrm{op}} = O(1)$.

On posera pour la suite

$$\widetilde{\mathbf{A}}_N \;=\; \mathbf{A}_N + \mathbf{P}_N.$$

Résultats : Outliers à l'extérieur de l'anneau

Théorème (Outliers pour le Single Ring Theorem, Benaych-Georges, R, 2013)

On suppose qu'il y a $j \leq r$ valeurs propres de $\mathbf{P}_n$, $\lambda_1(\mathbf{P}_N), \dots, \lambda_j(\mathbf{P}_N)$ telles que $|\lambda_i(P_N)| > b$. Alors, $\widetilde{\mathbf{A}}_N$ possède exactement j valeurs propres $\widetilde{\lambda}_1, \dots, \widetilde{\lambda}_j$ telles que $|\widetilde{\lambda}_i| > b$. De plus, après renumérotation,

$$\forall i \in \{1, \dots, j\}, \quad \widetilde{\lambda}_i - \lambda_i(\mathbf{P}_N) \longrightarrow 0.$$

Résultats : Outliers à l'extérieur de l'anneau

Théorème (Outliers pour le Single Ring Theorem, Benaych-Georges, R, 2013)

On suppose qu'il y a $j \leq r$ *valeurs propres de* $\mathbf{P}_n$, $\lambda_1(\mathbf{P}_N), \ldots, \lambda_j(\mathbf{P}_N)$ *telles que* $|\lambda_i(P_N)| > b$. *Alors,* $\widetilde{\mathbf{A}}_N$ *possède exactement* j *valeurs propres* $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_j$ *telles que* $|\widetilde{\lambda}_i| > b$. *De plus, après renumérotation,*

$$\forall i \in \{1, \ldots, j\}, \quad \widetilde{\lambda}_i - \lambda_i(\mathbf{P}_N) \; \longrightarrow \; 0.$$

Théorème (Absence d'outliers dans l'anneau, Benaych-Georges, R, 2013)

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ *et tout* N *suffisamment grand,*

$$\widetilde{\mu}_N \left(\{|z| \leq a - \varepsilon\} \right) \; = \; 0.$$

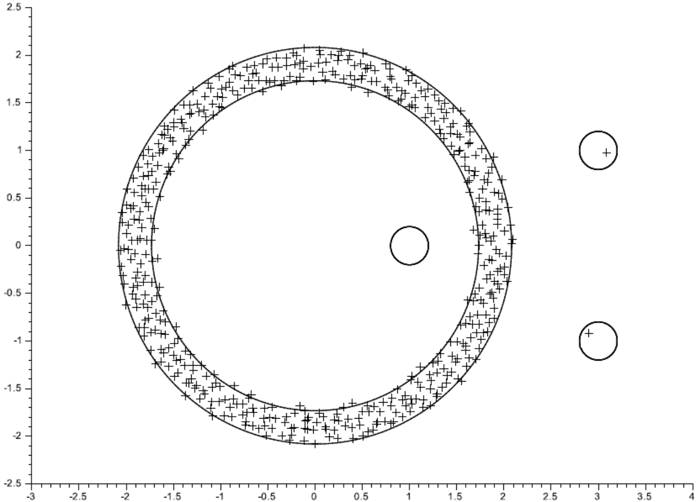


Figure: Distribution des valeurs propres de $\widetilde{\mathbf{A}}_{500}$ avec $\mathbf{P} = \mathrm{diag}(1, 3+i, 3-i, 0, \ldots, 0)$.

Idée de la preuve

- Si $\mathbf{P}_N$ est de rang $\leq r$, on peut toujours trouver deux matrices $\mathbf{B}_N \in \mathcal{M}_{N\times r}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{C}_N \in \mathcal{M}_{r\times N}(\mathbb{C})$, telles que

$$\mathbf{P}_N \;=\; \mathbf{B}_N\mathbf{C}_N.$$

Idée de la preuve

- Si $\mathbf{P}_N$ est de rang $\leq r$, on peut toujours trouver deux matrices $\mathbf{B}_N \in \mathcal{M}_{N\times r}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{C}_N \in \mathcal{M}_{r\times N}(\mathbb{C})$, telles que

$$\mathbf{P}_N \;=\; \mathbf{B}_N\mathbf{C}_N.$$

- $\det\left(\mathbf{I}_N + \mathbf{BC}\right) \;=\; \det\left(\mathbf{I}_r + \mathbf{CB}\right)$,

Idée de la preuve

- Si $\mathbf{P}_N$ est de rang $\leq r$, on peut toujours trouver deux matrices $\mathbf{B}_N \in \mathcal{M}_{N\times r}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{C}_N \in \mathcal{M}_{r\times N}(\mathbb{C})$, telles que

$$\mathbf{P}_N \;=\; \mathbf{B}_N\mathbf{C}_N.$$

- $\det\left(\mathbf{I}_N + \mathbf{BC}\right) \;=\; \det\left(\mathbf{I}_r + \mathbf{CB}\right)$,
  (On ramène le calcul d'un déterminant d'une matrice $N \times N$ à celui d'une matrice $r \times r$.)

- Si $\mathbf{P}_N$ est de rang $\leq r$, on peut toujours trouver deux matrices $\mathbf{B}_N \in \mathcal{M}_{N\times r}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{C}_N \in \mathcal{M}_{r\times N}(\mathbb{C})$, telles que

$$\mathbf{P}_N \;=\; \mathbf{B}_N\mathbf{C}_N.$$

- $\det\left(\mathbf{I}_N + \mathbf{BC}\right) \;=\; \det\left(\mathbf{I}_r + \mathbf{CB}\right)$,
  (On ramène le calcul d'un déterminant d'une matrice $N \times N$ à celui d'une matrice $r \times r$.)

$$\Longrightarrow \quad \det\left(\widetilde{\mathbf{A}} - z\mathbf{I}\right) \;=\; \det\left(\mathbf{A} - z\mathbf{I}\right)\,\det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\left(\mathbf{A} - z\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{B}\right)$$

Idée de la preuve

- Si $\mathbf{P}_N$ est de rang $\leq r$, on peut toujours trouver deux matrices $\mathbf{B}_N \in \mathcal{M}_{N\times r}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{C}_N \in \mathcal{M}_{r\times N}(\mathbb{C})$, telles que

$$\mathbf{P}_N \;=\; \mathbf{B}_N\mathbf{C}_N.$$

- $\det\left(\mathbf{I}_N + \mathbf{BC}\right) \;=\; \det\left(\mathbf{I}_r + \mathbf{CB}\right)$,
  (On ramène le calcul d'un déterminant d'une matrice $N \times N$ à celui d'une matrice $r \times r$.)

$$\Longrightarrow \quad \det\left(\widetilde{\mathbf{A}} - z\mathbf{I}\right) \;=\; \det\left(\mathbf{A} - z\mathbf{I}\right) \underbrace{\det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\left(\mathbf{A} - z\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{B}\right)}_{=:f(z)}$$

Idée de la preuve

- Si $\mathbf{P}_N$ est de rang $\leq r$, on peut toujours trouver deux matrices $\mathbf{B}_N \in \mathcal{M}_{N\times r}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{C}_N \in \mathcal{M}_{r\times N}(\mathbb{C})$, telles que

$$\mathbf{P}_N \;=\; \mathbf{B}_N\mathbf{C}_N.$$

- $\det(\mathbf{I}_N + \mathbf{BC}) \;=\; \det(\mathbf{I}_r + \mathbf{CB})$,
(On ramène le calcul d'un déterminant d'une matrice $N \times N$ à celui d'une matrice $r \times r$.)

$$\Longrightarrow \quad \det\left(\widetilde{\mathbf{A}} - z\mathbf{I}\right) \;=\; \det(\mathbf{A} - z\mathbf{I}) \underbrace{\det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}(\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}\right)}_{=: f(z)}$$

Idée de la preuve

- $f(z) \;:=\; \dfrac{\det(\widetilde{\mathbf{A}} - z\mathbf{I})}{\det(\mathbf{A} - z\mathbf{I})} \;=\; \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{B}\right)$

Idée de la preuve

- $f(z) \ := \ \dfrac{\det(\widetilde{\mathbf{A}} - z\mathbf{I})}{\det(\mathbf{A} - z\mathbf{I})} \ = \ \det\Big(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{B}\Big)$

  Rque : Les outliers seront les zéros de f.

Idée de la preuve

- $f(z) \;:=\; \dfrac{\det(\widetilde{\mathbf{A}} - z\mathbf{I})}{\det(\mathbf{A} - z\mathbf{I})} \;=\; \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{B}\right)$

  Rque : Les outliers seront les zéros de f.

- $g(z) \;:=\; \dfrac{\det(\mathbf{P} - z\mathbf{I})}{\det(-z\mathbf{I})} \;=\; \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(-z\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{B}\right)$

Idée de la preuve

- $f(z) \;:=\; \dfrac{\det(\widetilde{\mathbf{A}} - z\mathbf{I})}{\det(\mathbf{A} - z\mathbf{I})} \;=\; \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{B}\right)$

  Rque : Les outliers seront les zéros de f.

- $g(z) \;:=\; \dfrac{\det(\mathbf{P} - z\mathbf{I})}{\det(-z\mathbf{I})} \;=\; \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(-z\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{B}\right)$

  Rque : Les valeurs propres de $\mathbf{P}_N$ sont les zéros de g.

Idée de la preuve

- $f(z) \;:=\; \dfrac{\det(\widetilde{\mathbf{A}} - z\mathbf{I})}{\det(\mathbf{A} - z\mathbf{I})} \;=\; \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(\mathbf{A} - z\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{B}\right)$

  Rque : Les outliers seront les zéros de f.

- $g(z) \;:=\; \dfrac{\det(\mathbf{P} - z\mathbf{I})}{\det(-z\mathbf{I})} \;=\; \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(-z\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{B}\right)$

  Rque : Les valeurs propres de $\mathbf{P}_N$ sont les zéros de g.

Lemme

$$\sup_{|z|>b} |f(z) - g(z)| \;\longrightarrow\; 0.$$

Conséquence du Lemme

Les conséquences de "$\sup_{|z|>b} |f(z) - g(z)| \to 0$" sont

Conséquence du Lemme

Les conséquences de "$\sup_{|z|>b} |f(z) - g(z)| \to 0$" sont

- Application du théorème de Rouché : f et g ont donc autant de zéros dans le domaine $\{|z| > b\}$.

Conséquence du Lemme

Les conséquences de "$\sup_{|z|>b} |f(z) - g(z)| \to 0$" sont

- Application du théorème de Rouché : f et g ont donc autant de zéros dans le domaine $\{|z| > b\}$.

Conséquence du Lemme

Les conséquences de "$\sup_{|z|>b} |f(z) - g(z)| \to 0$" sont

- Application du théorème de Rouché : f et g ont donc autant de zéros dans le domaine $\{|z| > b\}$.
- On en déduit que
$$g(\widetilde{\lambda}_i) \longrightarrow 0$$
et

Conséquence du Lemme

Les conséquences de "$\sup_{|z|>b} |f(z) - g(z)| \to 0$" sont

- Application du théorème de Rouché : f et g ont donc autant de zéros dans le domaine $\{|z| > b\}$.
- On en déduit que
$$g(\widetilde{\lambda}_i) \longrightarrow 0$$
et
$$g(z) = (-z)^{-(N-r)} \cdot \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i(\mathbf{P}) - z)$$

Conséquence du Lemme

Les conséquences de "$\sup_{|z|>b} |f(z) - g(z)| \to 0$" sont

- Application du théorème de Rouché : f et g ont donc autant de zéros dans le domaine $\{|z| > b\}$.
- On en déduit que

$$g(\widetilde{\lambda}_i) \longrightarrow 0$$

et

$$g(z) = (-z)^{-(N-r)} \cdot \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i(\mathbf{P}) - z)$$

donc

$$\widetilde{\lambda}_i - \lambda_i(\mathbf{P}) \longrightarrow 0.$$

Preuve du Lemme

$$
\begin{aligned}
|f(z) - g(z)| &= \left|\det(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(\mathbf{A} - z)^{-1}\,\mathbf{B}) - \det(\mathbf{I} + \mathbf{C}(-z)^{-1}\mathbf{B})\right| \\
&\leq K\left\|\mathbf{C}\big((\mathbf{A} - z)^{-1} + \frac{1}{z})\mathbf{B}\right\| \;=\; K\left\|\mathbf{C}\sum_{k\geq 1}\frac{\mathbf{A}^k}{z^{k+1}}\mathbf{B}\right\| \\
&\leq K' \sup_{\mathbf{u},\mathbf{v}\ \text{unitaire}} \left|\mathbf{u}^*\sum_{k\geq 1}\frac{\mathbf{A}^k}{z^{k+1}}\mathbf{v}\right|
\end{aligned}
$$

Preuve du Lemme

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= \left|\det(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(\mathbf{A} - z)^{-1}\,\mathbf{B}) - \det(\mathbf{I} + \mathbf{C}(-z)^{-1}\mathbf{B})\right| \\ &\leq K\left\|\mathbf{C}\Big((\mathbf{A} - z)^{-1} + \frac{1}{z}\Big)\mathbf{B}\right\| \;=\; K\left\|\mathbf{C}\sum_{k\geq 1}\frac{\mathbf{A}^k}{z^{k+1}}\mathbf{B}\right\| \\ &\leq K' \sup_{\mathbf{u},\mathbf{v}\text{ unitaire}} \left|\mathbf{u}^*\sum_{k\geq 1}\frac{\mathbf{A}^k}{z^{k+1}}\mathbf{v}\right| \end{aligned}$$

Lemme

Pour tout $k \geq 1$ fixé, $\mathbf{u}^*\mathbf{A}^k\mathbf{v} \;\longrightarrow\; 0.$

Preuve du Lemme

$$
\begin{aligned}
|f(z) - g(z)| &= \left|\det(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(\mathbf{A} - z)^{-1}\,\mathbf{B}) - \det(\mathbf{I} + \mathbf{C}(-z)^{-1}\mathbf{B})\right| \\
&\leq K\left\|\mathbf{C}\big((\mathbf{A} - z)^{-1} + \frac{1}{z}\big)\mathbf{B}\right\| = K\left\|\mathbf{C}\sum_{k\geq 1}\frac{\mathbf{A}^k}{z^{k+1}}\mathbf{B}\right\| \\
&\leq K' \sup_{\mathbf{u},\mathbf{v}\ \text{unitaire}} \left|\mathbf{u}^*\sum_{k\geq 1}\frac{\mathbf{A}^k}{z^{k+1}}\mathbf{v}\right|
\end{aligned}
$$

Lemme

Pour tout $k \geq 1$ fixé, $\mathbf{u}^*\mathbf{A}^k\mathbf{v} \longrightarrow 0.$

Lemme

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k \geq 1$ et pour tout N suffisamment grand,

$$\|\mathbf{A}^k\|_{\mathrm{op}} \leq C(b + \varepsilon)^k.$$

Preuve de l'absence d'outliers dans l'anneau

Soit $|z| < a$, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\left(\mathbf{A} - z\right)^{-1}\mathbf{B}\right) \neq 0 \\ &\Longleftarrow \left\|\mathbf{C}\left(\mathbf{A} - z\right)^{-1}\mathbf{B}\right\|_{\mathrm{op}} < 1. \end{aligned}$$

Preuve de l'absence d'outliers dans l'anneau

Soit $|z| < a$, on a

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\left(\mathbf{A} - z\right)^{-1}\mathbf{B}\right) \neq 0 \\
&\Longleftarrow \left\|\mathbf{C}\left(\mathbf{A} - z\right)^{-1}\mathbf{B}\right\|_{\mathrm{op}} < 1.
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{u}^*\left(\mathbf{A} - z\right)^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{u}^*\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I} - z\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{u}^*\sum_{k\geq 1} z^{k-1}(\mathbf{A}^{-1})^k\mathbf{v}
$$

Preuve de l'absence d'outliers dans l'anneau

Soit $|z| < a$, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}\,(\mathbf{A} - z)^{-1}\,\mathbf{B}\right) \neq 0 \\ &\Longleftarrow \left\|\mathbf{C}\,(\mathbf{A} - z)^{-1}\,\mathbf{B}\right\|_{\mathrm{op}} < 1. \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}^*\,(\mathbf{A} - z)^{-1}\,\mathbf{v} = \mathbf{u}^*\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I} - z\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{u}^*\sum_{k\geq 1} z^{k-1}(\mathbf{A}^{-1})^k\mathbf{v}$$

Or, $\mathbf{A}^{-1}$ est aussi une matrice isotrope donc on peut appliquer les lemmes précédents, et donc quand $|z^{-1}| > a^{-1}$,

$$\mathbf{u}^*\,(\mathbf{A} - z)^{-1}\,\mathbf{v} \longrightarrow 0.$$

Section 3

Fluctuations

Démarche

Pour obtenir les fluctuations, il faut comprendre à quelle vitesse on a la convergence $f(z) - g(z) \longrightarrow 0$.

Démarche

Pour obtenir les fluctuations, il faut comprendre à quelle vitesse on a la convergence $f(z) - g(z) \longrightarrow 0$. En effet,

$$g(\widetilde{\lambda}) \quad \sim \quad g(\lambda(\mathbf{P})) + (\widetilde{\lambda} - \lambda(\mathbf{P}))g'(\lambda(\mathbf{P}))$$

Pour obtenir les fluctuations, il faut comprendre à quelle vitesse on a la convergence $f(z) - g(z) \longrightarrow 0$. En effet,

$$g(\widetilde{\lambda}) \quad \sim \quad \underbrace{g(\lambda(\mathbf{P}))}_{=0} + (\widetilde{\lambda} - \lambda(\mathbf{P}))g'(\lambda(\mathbf{P}))$$

Démarche

Pour obtenir les fluctuations, il faut comprendre à quelle vitesse on a la convergence $f(z) - g(z) \longrightarrow 0$. En effet,

$$g(\widetilde{\lambda}) \sim \underbrace{g(\lambda(\mathbf{P}))}_{=0} + (\widetilde{\lambda} - \lambda(\mathbf{P}))g'(\lambda(\mathbf{P}))$$

$$(\widetilde{\lambda} - \lambda(\mathbf{P})) \sim \frac{1}{g'(\lambda(\mathbf{P}))}\left(g(\widetilde{\lambda}) - f(\widetilde{\lambda})\right)$$

Pour obtenir les fluctuations, il faut comprendre à quelle vitesse on a la convergence $f(z) - g(z) \longrightarrow 0$. En effet,

$$g(\widetilde{\lambda}) \sim \underbrace{g(\lambda(\mathbf{P}))}_{=0} + (\widetilde{\lambda} - \lambda(\mathbf{P}))g'(\lambda(\mathbf{P}))$$

$$(\widetilde{\lambda} - \lambda(\mathbf{P})) \sim \frac{1}{g'(\lambda(\mathbf{P}))}\left(g(\widetilde{\lambda}) - f(\widetilde{\lambda})\right)$$

Cependant, est-ce que $g'(\lambda(\mathbf{P})) \neq 0$?

Démarche

Pour obtenir les fluctuations, il faut comprendre à quelle vitesse on a la convergence $f(z) - g(z) \longrightarrow 0$. En effet,

$$g(\widetilde{\lambda}) \sim \underbrace{g(\lambda(\mathbf{P}))}_{=0} + (\widetilde{\lambda} - \lambda(\mathbf{P}))g'(\lambda(\mathbf{P}))$$

$$(\widetilde{\lambda} - \lambda(\mathbf{P})) \sim \frac{1}{g'(\lambda(\mathbf{P}))}\left(g(\widetilde{\lambda}) - f(\widetilde{\lambda})\right)$$

Cependant, est-ce que $g'(\lambda(\mathbf{P})) \neq 0$? En fait,

$$g'(\lambda(\mathbf{P})) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda(\mathbf{P}) \text{ vap de multiplicité } \geq 2.$$

Réduite de Jordan

Les valeurs propres de $\mathbf{P}$ n'ont pas de raisons d'être distinctes,

Réduite de Jordan

Les valeurs propres de $\mathbf{P}$ n'ont pas de raisons d'être distinctes, tout comme $\mathbf{P}$ n'a pas de raisons d'être diagonalisable.

Réduite de Jordan

Les valeurs propres de $\mathbf{P}$ n'ont pas de raisons d'être distinctes, tout comme $\mathbf{P}$ n'a pas de raisons d'être diagonalisable.

- **Bloc de Jordan :** On note $\mathbf{J}_k(\lambda)$ la matrice $k \times k$ de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Réduite de Jordan

Les valeurs propres de $\mathbf{P}$ n'ont pas de raisons d'être distinctes, tout comme $\mathbf{P}$ n'a pas de raisons d'être diagonalisable.

- **Bloc de Jordan :** On note $\mathbf{J}_k(\lambda)$ la matrice $k \times k$ de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix}$$

- **Réduction de Jordan :** Toute matrice $\mathbf{P}$ est semblable à une matrice de la forme

$$\mathbf{P} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1) & & & (0) \\ & \mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \mathbf{J}_{k_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

Outliers pour le Single Ring Theorem : fluctuations

Théorème (Benaych-Georges, R, 2013)

- *Soit* $\{\lambda_1(\mathbf{P}), \ldots, \lambda_r(\mathbf{P})\} = \{|\operatorname{Sp}\mathbf{P}| > b\}$ *(avec multiplicité).*

Outliers pour le Single Ring Theorem : fluctuations

Théorème (Benaych-Georges, R, 2013)

• *Soit* $\{\lambda_1(\mathbf{P}), \ldots, \lambda_r(\mathbf{P})\} = \{|\operatorname{Sp}\mathbf{P}| > b\}$ *(avec multiplicité). Alors le vecteur aléatoire*

$$N^{\cdots}(\lambda_i(\widetilde{\mathbf{A}}) - \lambda_i(\mathbf{P})) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

converge en distribution,

Théorème (Benaych-Georges, R, 2013)

• *Soit* $\{\lambda_1(\mathbf{P}), \ldots, \lambda_r(\mathbf{P})\} = \{|\operatorname{Sp}\mathbf{P}| > b\}$ *(avec multiplicité). Alors le vecteur aléatoire*

$$N^{1/(2p_i)}(\lambda_i(\widetilde{\mathbf{A}}) - \lambda_i(\mathbf{P})) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

converge en distribution,

Outliers pour le Single Ring Theorem : fluctuations

Théorème (Benaych-Georges, R, 2013)

• *Soit* $\{\lambda_1(\mathbf{P}), \ldots, \lambda_r(\mathbf{P})\} = \{|\operatorname{Sp}\mathbf{P}| > b\}$ *(avec multiplicité). Alors le vecteur aléatoire*

$$N^{1/(2p_i)}(\lambda_i(\widetilde{\mathbf{A}}) - \lambda_i(\mathbf{P})) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

converge en distribution, où pour tout i, p_i *désigne la taille du bloc de Jordan contenant* $\lambda_i(\mathbf{P})$.

Outliers pour le Single Ring Theorem : fluctuations

Théorème (Benaych-Georges, R, 2013)

• *Soit* $\{\lambda_1(\mathbf{P}), \ldots, \lambda_r(\mathbf{P})\} = \{|\operatorname{Sp}\mathbf{P}| > b\}$ *(avec multiplicité). Alors le vecteur aléatoire*

$$N^{1/(2p_i)}(\lambda_i(\widetilde{\mathbf{A}}) - \lambda_i(\mathbf{P})) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

converge en distribution, où pour tout i, p_i *désigne la taille du bloc de Jordan contenant* $\lambda_i(\mathbf{P})$.

• *À chaque bloc de Jordan* $\mathbf{J}_p(\lambda(\mathbf{P}))$ *de taille* p *de la réduite de* $\mathbf{P}$ *correspond* p *valeurs propres* $\lambda_i(\widetilde{\mathbf{A}})$ *tel que le* p*-uplet* $\left(N^{1/(2p)}(\lambda_1(\widetilde{\mathbf{A}}) - \lambda), \ldots, N^{1/(2p)}(\lambda_1(\widetilde{\mathbf{A}}) - \lambda)\right)$ *sont les* p *racine* p*-ième d'une variable aléatoire complexe.*

Outliers pour le Single Ring Theorem : fluctuations

Théorème (Benaych-Georges, R, 2013)

• *Soit* $\{\lambda_1(\mathbf{P}), \ldots, \lambda_r(\mathbf{P})\} = \{|\operatorname{Sp}\mathbf{P}| > b\}$ *(avec multiplicité). Alors le vecteur aléatoire*

$$N^{1/(2p_i)}(\lambda_i(\widetilde{\mathbf{A}}) - \lambda_i(\mathbf{P})) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

converge en distribution, où pour tout i, p_i *désigne la taille du bloc de Jordan contenant* $\lambda_i(\mathbf{P})$.

• *À chaque bloc de Jordan* $\mathbf{J}_p(\lambda(\mathbf{P}))$ *de taille* p *de la réduite de* $\mathbf{P}$ *correspond* p *valeurs propres* $\lambda_i(\widetilde{\mathbf{A}})$ *tel que le* p*-uplet* $\left(N^{1/(2p)}(\lambda_1(\widetilde{\mathbf{A}}) - \lambda), \ldots, N^{1/(2p)}(\lambda_1(\widetilde{\mathbf{A}}) - \lambda)\right)$ *sont les* p *racine* p*-ième d'une variable aléatoire complexe.*

• *La limite des variables* $\sqrt{N}(\lambda_i(\widetilde{\mathbf{A}}) - \lambda_i(\mathbf{P}))^{p_i}$ *sont les valeurs propres de matrices aléatoires (non nécessairement indépendantes), qui dépendent des vecteurs propres de* $\mathbf{P}$.

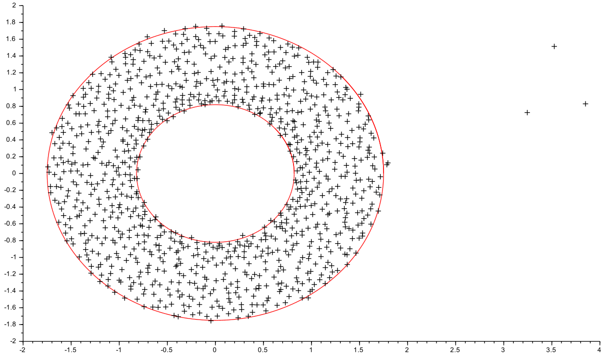


Figure: Distribution des valeurs propres de $\widetilde{\mathbf{A}}_{10^3}$ avec $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

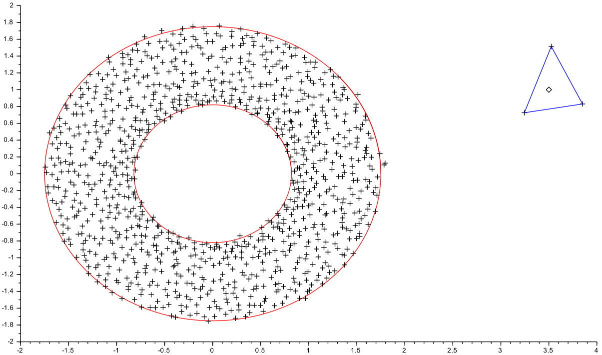


Figure: Distribution des valeurs propres de $\widetilde{\mathbf{A}}_{10^3}$ avec $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

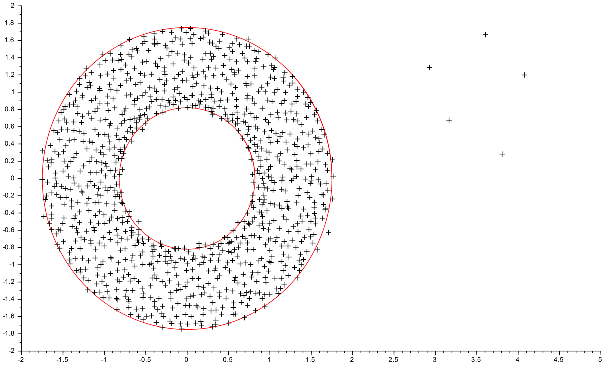


Figure: Valeurs propres de $\widetilde{\mathbf{A}}_{10^3}$ avec $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & (0) \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ (0) & & & & \lambda \end{pmatrix}$.

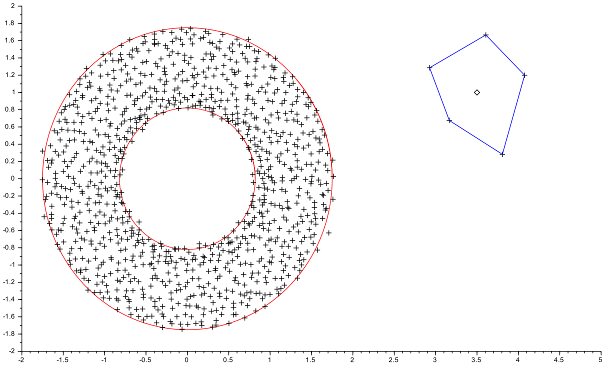


Figure: Valeurs propres de $\widetilde{\mathbf{A}}_{10^3}$ avec $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & (0) \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ (0) & & & & \lambda \end{pmatrix}.$

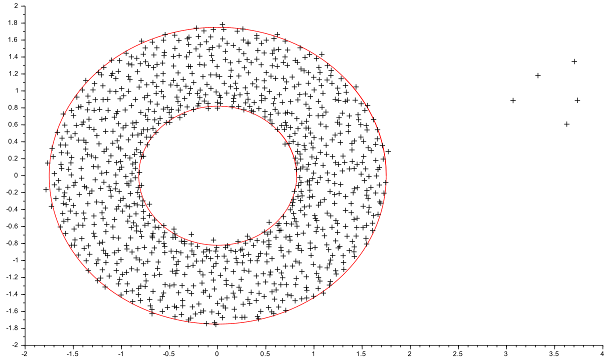


Figure: Valeurs propres de $\widetilde{\mathbf{A}}_{10^3}$ avec $\mathbf{P} = \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & (0) \\ & & \lambda & & \\ \hline & (0) & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{array}\right)$.

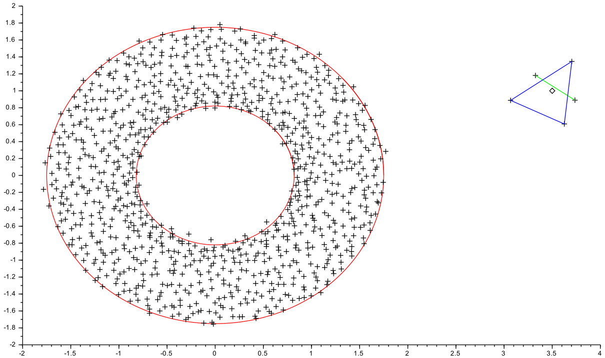
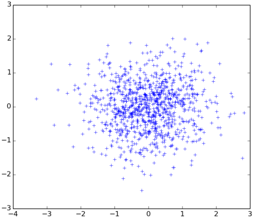
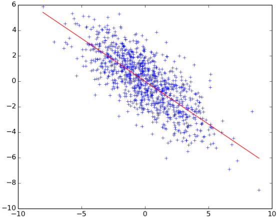


Figure: Valeurs propres de $\widetilde{\mathbf{A}}_{10^3}$ avec $\mathbf{P} = \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & (0) \\ & & \lambda & & \\ \hline & (0) & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{array}\right).$

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & \\ & (0) \end{pmatrix}, \quad P_0 = Q \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & 1 \end{pmatrix}.$$



(a) $\kappa = 0$: indépendence.



(b) $\kappa = 2^{-1/2}$: corrélation.

Indépendence/corrélation entre deux outliers de **limite distincte** $\lambda \neq \lambda'$:
On a répresenté ici les corrélations entre $\mathfrak{Im}(\sqrt{N}(\widetilde{\lambda} - \lambda))$ et $\mathfrak{Im}(\sqrt{N}(\widetilde{\lambda}' - \lambda'))$ pour 1000 matrices iid de Ginibre perturbées de taille $N = 1000$.

Rappel : "zéros de $f(z)$ " $= \mathrm{Sp}(\widetilde{\mathbf{A}})$.

Soit λ valeur propre de $\mathbf{P}$ associée à un bloc de Jordan de taille p.

Rappel : "zéros de $f(z)$ " $= \mathrm{Sp}(\widetilde{\mathbf{A}})$.

Soit λ valeur propre de $\mathbf{P}$ associée à un bloc de Jordan de taille p.

Lemme

Alors, pour un certain $\gamma > 0$,

$$N^{\gamma} f\left(\lambda + \frac{z}{N^{1/(2p)}}\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} z^{\pi} \cdot \det(z^{p} - \mathbf{M}_{\lambda,p}),$$

où

- *$\mathbf{M}$ est une matrice aléatoire de taille β (nombre de blocs de Jordan de taille p $\mathbf{J}_p(\lambda)$ de $\mathbf{P}$),*
- *π est la somme des tailles de blocs de Jordan $\mathbf{J}_q(\lambda)$ de $\mathbf{P}$, tel que $q < p$.*

Rappel : “zéros de $f(z)$ ” $= \mathrm{Sp}(\widetilde{\mathbf{A}})$.
Soit λ valeur propre de $\mathbf{P}$ associée à un bloc de Jordan de taille p.

Lemme

Alors, pour un certain $\gamma > 0$,

$$N^\gamma f\left(\lambda + \frac{z}{N^{1/(2p)}}\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} z^\pi \cdot \det(z^p - \mathbf{M}_{\lambda,p}),$$

où

- *$\mathbf{M}$ est une matrice aléatoire de taille β (nombre de blocs de Jordan de taille p $\mathbf{J}_p(\lambda)$ de $\mathbf{P}$),*
- *π est la somme des tailles de blocs de Jordan $\mathbf{J}_q(\lambda)$ de $\mathbf{P}$, tel que $q < p$.*

$\rightarrow$ $\widetilde{\mathbf{A}}$ a $p \times \beta$ valeurs propres qui tendent vers λ à taux $N^{-1/(2p)}$, asymptotiquement distribuées selon les p racines p-ième des valeurs propres de $\mathbf{M}_{\lambda,p}$.

Rappel : "zéros de $f(z)$ " $= \mathrm{Sp}(\widetilde{\mathbf{A}})$.
Soit λ valeur propre de $\mathbf{P}$ associée à un bloc de Jordan de taille p.

Lemme

Alors, pour un certain $\gamma > 0$,

$$N^\gamma f\left(\lambda + \frac{z}{N^{1/(2p)}}\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} z^\pi \cdot \det(z^p - \mathbf{M}_{\lambda,p}),$$

où

- $\mathbf{M}$ *est une matrice aléatoire de taille β (nombre de blocs de Jordan de taille p $\mathbf{J}_p(\lambda)$ de $\mathbf{P}$),*
- π *est la somme des tailles de blocs de Jordan $\mathbf{J}_q(\lambda)$ de $\mathbf{P}$, tel que $q < p$.*

$\rightarrow$ $\widetilde{\mathbf{A}}$ a $p \times \beta$ valeurs propres qui tendent vers λ à taux $N^{-1/(2p)}$, asymptotiquement distribuées selon les p racines p-ième des valeurs propres de $\mathbf{M}_{\lambda,p}$.
$\rightarrow$ $\widetilde{\mathbf{A}}$ a π valeurs propres qui tendent vers λ à taux $o\left(N^{-1/(2p)}\right)$.
De plus, on a la converge jointe de ces variables.

Idée de la preuve

Première simplification :
Lorsqu'on décompose $\mathbf{P} = \mathbf{BC}$, on a le choix dans le couple $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$.

Idée de la preuve

Première simplification :
Lorsqu'on décompose $\mathbf{P} = \mathbf{BC}$, on a le choix dans le couple $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$. On va chercher à choisir ce couple pour avoir $\mathbf{CB}$ le plus simple possible.

Première simplification :
Lorsqu'on décompose $\mathbf{P} = \mathbf{BC}$, on a le choix dans le couple $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$. On va chercher à choisir ce couple pour avoir $\mathbf{CB}$ le plus simple possible.

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{J} & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1}$$

Première simplification :
Lorsqu'on décompose $\mathbf{P} = \mathbf{BC}$, on a le choix dans le couple $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$. On va chercher à choisir ce couple pour avoir $\mathbf{CB}$ le plus simple possible.

$$\mathbf{P} \;=\; \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{J} & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1} \;=\; \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ (0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & (0) \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}$$

Première simplification :
Lorsqu'on décompose $\mathbf{P} = \mathbf{BC}$, on a le choix dans le couple $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$. On va chercher à choisir ce couple pour avoir $\mathbf{CB}$ le plus simple possible.

$$\mathbf{P} \;=\; \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{J} & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1} \;=\; \underbrace{\mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ (0) \end{pmatrix}}_{=\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} & (0) \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}}_{=\mathbf{C}}.$$

Idée de la preuve

Première simplification :
Lorsqu'on décompose $\mathbf{P} = \mathbf{BC}$, on a le choix dans le couple $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$. On va chercher à choisir ce couple pour avoir $\mathbf{CB}$ le plus simple possible.

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{J} & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1} = \underbrace{\mathbf{Q}\begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ (0) \end{pmatrix}}_{=\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} & (0) \end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}}_{=\mathbf{C}}.$$

On a alors

$$\mathbf{CB} = \mathbf{J}.$$

Idée de la preuve

On fait un développement limité de f en $\hat{z} = \lambda + zN^{-1/(2p)}$. On pose

$$\mathbf{X}_N^{\hat{z}} := \sqrt{N}\mathbf{C}\left((\mathbf{A} - \hat{z})^{-1} - \hat{z}^{-1}\right)\mathbf{B}$$

Lemme

$$\sqrt{N}\mathbf{C}\left((\mathbf{A} - \hat{z})^{-1} - \hat{z}^{-1}\right)\mathbf{B} \xrightarrow{(\mathrm{d})} \mathbf{X}^{\lambda}$$

Idée de la preuve

On fait un développement limité de f en $\hat{z} = \lambda + zN^{-1/(2p)}$. On pose

$$\mathbf{X}_N^{\hat{z}} := \sqrt{N}\mathbf{C}\left((\mathbf{A} - \hat{z})^{-1} - \hat{z}^{-1}\right)\mathbf{B}$$

Lemme

$$\sqrt{N}\mathbf{C}\left((\mathbf{A} - \hat{z})^{-1} - \hat{z}^{-1}\right)\mathbf{B} \xrightarrow{(\mathrm{d})} \mathbf{X}^{\lambda}$$

Idée de la preuve

On fait un développement limité de f en $\hat{z} = \lambda + zN^{-1/(2p)}$. On pose

$$\mathbf{X}_N^{\hat{z}} := \sqrt{N}\mathbf{C}\left((\mathbf{A} - \hat{z})^{-1} - \hat{z}^{-1}\right)\mathbf{B}$$

Lemme

$$\sqrt{N}\mathbf{C}\left((\mathbf{A} - \hat{z})^{-1} - \hat{z}^{-1}\right)\mathbf{B} \xrightarrow{(\mathrm{d})} \mathbf{X}^{\lambda}$$

On écrit

$$\begin{aligned} f\left(\lambda + \frac{z}{N^{1/(2p)}}\right) &= \det\left(\mathbf{I} - \hat{z}^{-1}\mathbf{CB} + \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{X}_N^{\hat{z}}\right) \\ &\simeq \det\left(\mathbf{I} - \lambda^{-1}\mathbf{J} + \frac{z\lambda^{-2}}{N^{1/(2p)}}\mathbf{J} + \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{X}^{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Idée de la preuve

On fait un développement limité de f en $\hat{z} = \lambda + zN^{-1/(2p)}$. On pose

$$\mathbf{X}_N^{\hat{z}} := \sqrt{N}\mathbf{C}\left((\mathbf{A} - \hat{z})^{-1} - \hat{z}^{-1}\right)\mathbf{B}$$

Lemme

$$\sqrt{N}\mathbf{C}\left((\mathbf{A} - \hat{z})^{-1} - \hat{z}^{-1}\right)\mathbf{B} \xrightarrow{(\mathrm{d})} \mathbf{X}^{\lambda}$$

On écrit

$$\begin{aligned} f\left(\lambda + \frac{z}{N^{1/(2p)}}\right) &= \det\left(\mathbf{I} - \hat{z}^{-1}\mathbf{CB} + \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{X}_N^{\hat{z}}\right) \\ &\simeq \det\Bigg(\underbrace{\mathbf{I} - \lambda^{-1}\mathbf{J}}_{\substack{=:\mathbf{Z} \\ \det \mathbf{Z}=0}} + \underbrace{\frac{z\lambda^{-2}}{N^{1/(2p)}}\mathbf{J}}_{\substack{=:\mathbf{G} \\ =O\left(N^{-1/(2p)}\right)}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{X}^{\lambda}}_{\substack{=:\mathbf{H} \\ =O\left(N^{-1/2}\right)}}\Bigg) \end{aligned}$$

On utilise ensuite la multilinéarité du déterminant pour développer $\det(\mathbf{Z}+\mathbf{G}+\mathbf{H})$.

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{M}+\mathbf{H}) &= \det(\mathbf{M}) + \sum_{k=1}^{r} \det\left(M_1\middle|\ldots\middle|H_k\middle|\ldots\middle|M_r\right) \\
&+ \sum_{1\leq k_1<k_2\leq r} \det\left(M_1\middle|\ldots\middle|H_{k_1}\middle|\ldots\middle|H_{k_2}\middle|\ldots\middle|M_r\right) \\
&+ \ldots + \sum_{k=1}^{r} \det\left(H_1\middle|\ldots\middle|M_k\middle|\ldots\middle|H_r\right) + \det\mathbf{H}
\end{aligned}
$$

On utilise ensuite la multilinéarité du déterminant pour développer $\det(\mathbf{Z} + \mathbf{G} + \mathbf{H})$.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{M} + \mathbf{H}) &= \det(\mathbf{M}) + \sum_{k=1}^{r} \det\left(M_1 \middle| \ldots \middle| H_k \middle| \ldots \middle| M_r\right) \\
&+ \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq r} \det\left(M_1 \middle| \ldots \middle| H_{k_1} \middle| \ldots \middle| H_{k_2} \middle| \ldots \middle| M_r\right) \\
&+ \ldots + \sum_{k=1}^{r} \det\left(H_1 \middle| \ldots \middle| M_k \middle| \ldots \middle| H_r\right) + \det \mathbf{H}
\end{aligned}$$