Universalité de la distribution spectrale limite de matrices symétriques à entrées corrélées

Marwa Banna
En colaboration avec F. Merlevède et M. Peligrad

Matrices Et Graphes Aléatoires
IHP

16 Janvier 2015

Introduction et Motivation

- Soit $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_p \in \mathbb{R}^N$ des vecteurs i.i.d centrés et de matrice de covariance $\Sigma = \mathbb{E}(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^T) = \ldots = \mathbb{E}(\mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T)$.

Introduction et Motivation

- Soit $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_p \in \mathbb{R}^N$ des vecteurs i.i.d centrés et de matrice de covariance $\Sigma = \mathbb{E}(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^T) = \ldots = \mathbb{E}(\mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T)$.
- La matrice de covariance empirique $\mathbb{B}_N$ est définie par

$$\mathbb{B}_N = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T = \frac{1}{p} \mathcal{X}_{N,p} \mathcal{X}_{N,p}^T \text{ où } \mathcal{X}_{N,p} = (\mathbf{X}_1 \ldots \mathbf{X}_p) \in \mathbb{R}^{N \times p}$$

Introduction et Motivation

- Soit $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_p \in \mathbb{R}^N$ des vecteurs i.i.d centrés et de matrice de covariance $\Sigma = \mathbb{E}(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^T) = \ldots = \mathbb{E}(\mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T)$.
- La matrice de covariance empirique $\mathbb{B}_N$ est définie par

$$\mathbb{B}_N = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T = \frac{1}{p} \mathcal{X}_{N,p} \mathcal{X}_{N,p}^T \text{ où } \mathcal{X}_{N,p} = (\mathbf{X}_1 \ldots \mathbf{X}_p) \in \mathbb{R}^{N \times p}$$

- $\mathbb{E}(\mathbb{B}_N) = \Sigma$.
- Pour N fixé, la loi des grands nombres implique que

$$\lim_{p \to +\infty} \mathbb{B}_N = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T = \Sigma \quad \text{p.s.}$$

Introduction et Motivation

- Soit $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_p \in \mathbb{R}^N$ des vecteurs i.i.d centrés et de matrice de covariance $\Sigma = \mathbb{E}(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^T) = \ldots = \mathbb{E}(\mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T)$.
- La matrice de covariance empirique $\mathbb{B}_N$ est définie par

$$\mathbb{B}_N = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T = \frac{1}{p} \mathcal{X}_{N,p} \mathcal{X}_{N,p}^T \text{ où } \mathcal{X}_{N,p} = (\mathbf{X}_1 \ldots \mathbf{X}_p) \in \mathbb{R}^{N \times p}$$

- $\mathbb{E}(\mathbb{B}_N) = \Sigma$.
- Pour N fixé, la loi des grands nombres implique que

$$\lim_{p \to +\infty} \mathbb{B}_N = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T = \Sigma \quad \text{p.s.}$$

- Que se passe-t-il lorsque $N := N_p, p \to \infty$ t.q. $p \to \infty$?

- Soit $\mathbb{B}_N = \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}\mathcal{X}_{N,p}^T = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T$

$$\mathcal{X}_{N,p} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{N,1} & X_{N,2} & \dots & X_{N,p} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_p \end{array} \end{array}$$

- Soit $\mathbb{B}_N = \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}\mathcal{X}_{N,p}^T = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T$

$$\mathcal{X}_{N,p} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{N,1} & X_{N,2} & \dots & X_{N,p} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{X}_1 & \quad \mathbf{X}_2 & \quad \dots & \quad \mathbf{X}_p \end{matrix} \end{array}$$

- La mesure spectrale empirique de $\mathbb{B}_N$ est définie par

$$\mu_{\mathbb{B}_N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \delta_{\lambda_k}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont les valeurs propres de $\mathbb{B}_N$.

- Soit $\mathbb{B}_N = \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}\mathcal{X}_{N,p}^T = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T$

$$\mathcal{X}_{N,p} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{N,1} & X_{N,2} & \dots & X_{N,p} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_p \end{array} \end{array}$$

- La mesure spectrale empirique de $\mathbb{B}_N$ est définie par

$$\mu_{\mathbb{B}_N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \delta_{\lambda_k}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont les valeurs propres de $\mathbb{B}_N$.

- On suppose que $c_N := \frac{N}{p} \xrightarrow[N\to+\infty]{} c \in (0, \infty)$.

- Soit $\mathbb{B}_N = \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}\mathcal{X}_{N,p}^T$

$$\mathcal{X}_{N,p} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{N,1} & X_{N,2} & \dots & X_{N,p} \end{pmatrix}$$

- Boutet de Monvel, Khorunzhy et Vasilchuk '96

Entrées Gaussiennes Corrélées

- Soit $\mathbb{B}_N = \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}\mathcal{X}_{N,p}^T$

$$\mathcal{X}_{N,p} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{N,1} & X_{N,2} & \dots & X_{N,p} \end{pmatrix}$$

- Boutet de Monvel, Khorunzhy et Vasilchuk '96

Entrées Gaussiennes Corrélées

- Hachem, Loubaton et Najim '05

$$X_{i,j} = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} h(k,\ell) G_{i-k,j-\ell}$$

Le Modèle

- Soit $(\xi_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ une famille de v.a.r. i.i.d.

Le Modèle

- Soit $(\xi_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ une famille de v.a.r. i.i.d.
- Soit $g : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$,

$$X_{k,\ell} = g\left(\xi_{k-i,\ell-j}\ ;\ (i,j) \in \mathbb{Z}^2\right),$$

est bien définie, $\mathbb{E}(X_{0,0}) = 0$ et $\|X_{0,0}\|_2 < \infty$.

Le Modèle

- Soit $(\xi_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ une famille de v.a.r. i.i.d.
- Soit $g : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$,

$$X_{k,\ell} = g(\xi_{k-i,\ell-j}\ ;\ (i,j) \in \mathbb{Z}^2)\,,$$

  est bien définie, $\mathbb{E}(X_{0,0}) = 0$ et $\|X_{0,0}\|_2 < \infty$.
- Soit $(G_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ une famille de variables aléatoires Gaussiennes t.q. $\forall\,(i,j)\,,\,(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\mathbb{E}(G_{k,\ell}G_{i,j}) = \mathbb{E}(X_{k,\ell}X_{i,j})$$

Le Modèle

- Soit $(\xi_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ une famille de v.a.r. i.i.d.
- Soit $g : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$,

$$X_{k,\ell} = g(\xi_{k-i,\ell-j}\ ;\ (i,j) \in \mathbb{Z}^2)\,,$$

  est bien définie, $\mathbb{E}(X_{0,0}) = 0$ et $\|X_{0,0}\|_2 < \infty$.
- Soit $(G_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ une famille de variables aléatoires Gaussiennes t.q. $\forall\,(i,j)\,,\,(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\mathbb{E}(G_{k,\ell}G_{i,j}) = \mathbb{E}(X_{k,\ell}X_{i,j})$$

- Soit $\mathbb{H}_N = \frac{1}{p}\mathcal{G}_{N,p}\mathcal{G}_{N,p}^T$

Théorème

Lorsque $N, p \to \infty$ *t.q.* $N/p \to c \in (o, \infty)$, *on a* $\forall z \in \mathbb{C}_+$,

$$\lim_{N\to\infty} \left| S_{\mathbb{B}_N}(z) - \mathbb{E}\left(S_{\mathbb{H}_N}(z)\right) \right| = 0 \quad p.s.$$

Théorème

Lorsque $N, p \to \infty$ *t.q.* $N/p \to c \in (o, \infty)$, *on a* $\forall z \in \mathbb{C}_+$,

$$\lim_{N\to\infty} \left| S_{\mathbb{B}_N}(z) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{H}_N}(z)\big) \right| = 0 \quad p.s.$$

Corollaire

Si $N, p \to \infty$ *t.q.* $N/p \to c \in (o, \infty)$ *et s'il existe une mesure* μ *telle que pour toute fonction continue et bornée* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \int f \, d\mu_{\mathbb{H}_N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int f \, d\mu,$$

alors

$$\mu_{\mathbb{B}_N} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \mu \quad p.s.$$

On note pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, $\gamma_{k,\ell} = \mathbb{E}(X_{0,0} X_{k,\ell})$

On note pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, $\gamma_{k,\ell} = \mathbb{E}(X_{0,0}X_{k,\ell})$

Théorème

$N, p \to \infty$ t.q. $N/p \to c \in (0,\infty)$. Supposons que

$$\sum_{k,\ell\in\mathbb{Z}} |\gamma_{k,\ell}| < \infty$$

Alors, presque sûrement, $\mu_{\mathbb{B}_N}$ converge en loi vers une mesure de probabilité non aléatoire dont la transformée de Stieltjes $S = S(z)$ vérifie: pour tout $z \in \mathbb{C}^+$

$$S(z) = \int_0^1 h(x,z)dx$$

où $h(x,z)$ est une solution de l'équation

$$h(x,z) = \left(-z + \int_0^1 \frac{f(x,s)}{1+c\int_0^1 f(u,s)h(u,z)du} ds \right)^{-1},$$

avec

$$f(x,y) = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \gamma_{k,j} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(kx+jy)}$$

Application

- Soit $(a_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ une famille de nombres réelles t.q.

$$\sum_{k,\ell\in\mathbb{Z}} |a_{k,\ell}| < \infty$$

- Soit $(\xi_{i,j})_{i,j}$ famille de v.a. i.i.d., $\mathbb{E}(\xi_{0,0}) = 0$ et $\|\xi_{0,0}\|_2 < \infty$.

Application

- Soit $(a_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ une famille de nombres réelles t.q.

$$\sum_{k,\ell\in\mathbb{Z}} |a_{k,\ell}| < \infty$$

- Soit $(\xi_{i,j})_{i,j}$ famille de v.a. i.i.d., $\mathbb{E}(\xi_{0,0}) = 0$ et $\|\xi_{0,0}\|_2 < \infty$.

$$X_{i,j} = \sum_{k,\ell\in\mathbb{Z}} a_{k,\ell}\xi_{k+i,\ell+j} \, .$$

Application

- Soit $(a_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ une famille de nombres réelles t.q.

$$\sum_{k,\ell\in\mathbb{Z}} |a_{k,\ell}| < \infty$$

- Soit $(\xi_{i,j})_{i,j}$ famille de v.a. i.i.d., $\mathbb{E}(\xi_{0,0}) = 0$ et $\|\xi_{0,0}\|_2 < \infty$.

$$X_{i,j} = \sum_{k,\ell\in\mathbb{Z}} a_{k,\ell}\xi_{k+i,\ell+j} \,.$$

Lorsque $N, p \to \infty$ t.q. $N/p \to c \in (0,\infty)$, le résultat s'applique avec

$$\gamma_{k,j} = \|\xi_{0,0}\|_2^2 \sum_{u,v\in\mathbb{Z}} a_{u,v}a_{u+k,v+j}$$

- Soit $n = N + p$ et

$$\mathbb{X}_n = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{p,p} & \mathcal{X}_{N,p}^T \\ \mathcal{X}_{N,p} & \mathbf{0}_{N,N} \end{array} \right).$$

- Soit $n = N + p$ et

$$\mathbb{X}_n = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p,p} & \mathcal{X}_{N,p}^T \\ \mathcal{X}_{N,p} & \mathbf{0}_{N,N} \end{pmatrix}.$$

- On note que

$$\mathbb{X}_n^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}^T\mathcal{X}_{N,p} & \mathbf{0}_{p,p} \\ \mathbf{0}_{N,N} & \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}\mathcal{X}_{N,p}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_N^T & \mathbf{0}_{p,p} \\ \mathbf{0}_{N,N} & \mathbb{B}_N \end{pmatrix}.$$

- Soit $n = N + p$ et

$$\mathbb{X}_n = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p,p} & \mathcal{X}_{N,p}^T \\ \mathcal{X}_{N,p} & \mathbf{0}_{N,N} \end{pmatrix}.$$

- On note que

$$\mathbb{X}_n^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}^T \mathcal{X}_{N,p} & \mathbf{0}_{p,p} \\ \mathbf{0}_{N,N} & \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}\mathcal{X}_{N,p}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_N^T & \mathbf{0}_{p,p} \\ \mathbf{0}_{N,N} & \mathbb{B}_N \end{pmatrix}.$$

- Comme l'ensemble de valeurs propres de $\mathbb{X}_n$ est $\bigcup_k \{s_k(\mathcal{X}_{N,p}), -s_k(\mathcal{X}_{N,p})\}$, on a $z\, S_{\mathbb{X}_n^2}(z^2) = S_{\mathbb{X}_n}(z)$

- Soit $n = N + p$ et

$$\mathbb{X}_n = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p,p} & \mathcal{X}_{N,p}^T \\ \mathcal{X}_{N,p} & \mathbf{0}_{N,N} \end{pmatrix}.$$

- On note que

$$\mathbb{X}_n^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}^T\mathcal{X}_{N,p} & \mathbf{0}_{p,p} \\ \mathbf{0}_{N,N} & \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}\mathcal{X}_{N,p}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_N^T & \mathbf{0}_{p,p} \\ \mathbf{0}_{N,N} & \mathbb{B}_N \end{pmatrix}.$$

- Comme l'ensemble de valeurs propres de $\mathbb{X}_n$ est $\bigcup_k \{s_k(\mathcal{X}_{N,p}), -s_k(\mathcal{X}_{N,p})\}$, on a $z\, S_{\mathbb{X}_n^2}(z^2) = S_{\mathbb{X}_n}(z)$

$$\boxed{S_{\mathbb{B}_N}(z) = z^{-1/2}\frac{n}{2N} S_{\mathbb{X}_n}(z^{1/2}) + \frac{p-N}{2Nz}}$$

- Soient $\mathbb{H}_N = \frac{1}{p}\mathcal{G}_{N,p}\mathcal{G}_{N,p}^T$ et

$$\mathbb{G}_n = \frac{1}{\sqrt{p}}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p,p} & \mathcal{G}_{N,p}^T \\ \mathcal{G}_{N,p} & \mathbf{0}_{N,N} \end{pmatrix}.$$

- De même, on a

$$S_{\mathbb{H}_N}(z) = \frac{n}{2Nz^{1/2}} S_{\mathbb{G}_n}(z^{1/2}) + \frac{p-N}{2Nz}$$

- Soient $\mathbb{H}_N = \frac{1}{p}\mathcal{G}_{N,p}\mathcal{G}_{N,p}^T$ et

$$\mathbb{G}_n = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p,p} & \mathcal{G}_{N,p}^T \\ \mathcal{G}_{N,p} & \mathbf{0}_{N,N} \end{pmatrix}.$$

- De même, on a

$$S_{\mathbb{H}_N}(z) = \frac{n}{2Nz^{1/2}} S_{\mathbb{G}_n}(z^{1/2}) + \frac{p-N}{2Nz}$$

alors

$$S_{\mathbb{B}_N}(z) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{H}_N}(z)\big) = \frac{n}{2Nz^{1/2}} \Big(S_{\mathbb{X}_n}(z^{1/2}) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z^{1/2})\big)\Big)$$

Lorsque $N/p \to c$,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}_+,\ \lim_{N\to\infty} \left| S_{\mathbb{B}_N}(z) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{H}_N}(z)\big) \right| = 0 \quad \text{p.s.}}$$

où

$$\mathbb{B}_N = \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}\mathcal{X}_{N,p}^T \quad \text{et} \quad \mathbb{H}_N = \frac{1}{p}\mathcal{G}_{N,p}\mathcal{G}_{N,p}^T$$

Lorsque $N/p \to c$,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}_+, \ \lim_{N\to\infty} \left| S_{\mathbb{B}_N}(z) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{H}_N}(z)\big) \right| = 0 \quad \text{p.s.}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}_+, \lim_{n\to\infty} \left| S_{\mathbb{X}_n}(z) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big) \right| = 0 \quad \text{p.s.}}$$

où

$$\mathbb{B}_N = \frac{1}{p}\mathcal{X}_{N,p}\mathcal{X}_{N,p}^T \quad \text{et} \quad \mathbb{H}_N = \frac{1}{p}\mathcal{G}_{N,p}\mathcal{G}_{N,p}^T$$

$$\mathbb{X}_n = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p,p} & \mathcal{X}_{N,p}^T \\ \mathcal{X}_{N,p} & \mathbf{0}_{N,N} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{G}_n = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p,p} & \mathcal{G}_{N,p}^T \\ \mathcal{G}_{N,p} & \mathbf{0}_{N,N} \end{pmatrix}.$$

Matrices Symétriques

Soit $\mathbb{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{X}_n$ où

$$\mathcal{X}_n = \left\{ \begin{array}{ll} X_{i,j} & \text{si } j \leqslant i \\ X_{j,i} & \text{si } i < j \end{array} \right. = \begin{pmatrix} X_{1,1} & & & \\ X_{2,1} & X_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ X_{n,1} & X_{n,2} & \dots & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Wigner '58

Matrices Symétriques

Soit $\mathbb{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{X}_n$ où

$$\mathcal{X}_n = \begin{cases} X_{i,j} & \text{si } j \leqslant i \\ X_{j,i} & \text{si } i < j \end{cases} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & & & \\ X_{2,1} & X_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ X_{n,1} & X_{n,2} & \dots & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Wigner '58

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Khorunzhy et Pastur '94} \\ \bullet\ \text{Boutet de Monvel et Khorunzhy '99} \end{array}\right\} \text{Entrées Gaussiennes Correlées}$$

Le Modèle

- $X_{k,\ell} = g(\xi_{k-i,\ell-j} \; ; \; (i,j) \in \mathbb{Z}^2)$,
- Soit $\mathbb{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{X}_n$ où $\mathcal{X}_n$ est la matrice symétrique définie par

$$\mathcal{X}_n = \begin{cases} X_{i,j} & \text{si } j \leqslant i \\ X_{j,i} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Le Modèle

- $X_{k,\ell} = g(\xi_{k-i,\ell-j}\ ;\ (i,j) \in \mathbb{Z}^2)$,
- Soit $\mathbb{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{X}_n$ où $\mathcal{X}_n$ est la matrice symétrique définie par

$$\mathcal{X}_n = \begin{cases} X_{i,j} & \text{si } j \leqslant i \\ X_{j,i} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

- $\forall\,(i,j)\,,\,(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathbb{E}(G_{k,\ell}G_{i,j}) = \mathbb{E}(X_{k,\ell}X_{i,j})$
- Soit $\mathbb{G}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{G}_n$ où

$$\mathcal{G}_n = \begin{cases} G_{i,j} & \text{si } j \leqslant i \\ G_{j,i} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Théorème

Pour tout $z \in \mathbb{C}_+$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| S_{\mathbb{X}_n}(z) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big) \right| = 0 \quad \textit{presque sûrement.}$$

Théorème

Pour tout $z \in \mathbb{C}_+$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| S_{\mathbb{X}_n}(z) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big) \right| = 0 \quad \textit{presque sûrement.}$$

Corollaire

S'il existe une mesure μ telle que pour toute fonction continue et bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \int f \, d\mu_{\mathbb{G}_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int f \, d\mu,$$

alors

$$\mu_{\mathbb{X}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mu \quad \textit{presque sûrement.}$$

- On note pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, $\gamma_{k,\ell} = \mathbb{E}(X_{0,0}X_{k,\ell})$

Théorème

Supposons que

$$\gamma_{k,\ell} = \gamma_{\ell,k} \quad \textit{et} \quad \sum_{k,\ell\in\mathbb{Z}} |\gamma_{k,\ell}| < \infty$$

Alors, presque sûrement, $\mu_{\mathbb{X}_n}$ converge en loi vers une mesure de probabilité non aléatoire dont la transformée de Stieltjes $S = S(z)$ vérifie: pour tout $z \in \mathbb{C}^+$

$$S(z) = \int_0^1 h(x,z)dx$$

où $h(x,z)$ est une solution de l'équation

$$h(x,z) = \Big(-z + \int_0^1 f(x,y)h(y,z)dy \Big)^{-1}$$

avec

$$f(x,y) = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \gamma_{k,j} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(kx+jy)}$$

Stratégie de preuve

Montrer pour tout $z \in \mathbb{C}^+$, $|S_{\mu_{\mathbb{X}_n}}(z) - \mathbb{E}(S_{\mu_{\mathbb{G}_n}}(z))| \to 0$ p.s.

Stratégie de preuve

Montrer pour tout $z \in \mathbb{C}^+$, $|S_{\mu_{\mathbb{X}_n}}(z) - \mathbb{E}(S_{\mu_{\mathbb{G}_n}}(z))| \to 0$ p.s.

- $X_{k,\ell} = g(\xi_{k-i,\ell-j} \ ; \ (i,j) \in \mathbb{Z}^2)$
- Soit m un entier positif fixe pour le moment et $\forall (u,v) \in \mathbb{Z}^2$, on pose

$$X_{u,v}^{(m)} = \mathbb{E}\big(X_{u,v} | \mathcal{F}_{u,v}^{(m)}\big)\ ,$$

où $\mathcal{F}_{u,v}^{(m)} := \sigma(\xi_{i,j}\ ;\ u-m \leq i \leq u+m,\ \ v-m \leq j \leq v+m)$.

Stratégie de preuve

Montrer pour tout $z \in \mathbb{C}^+$, $|S_{\mu_{\mathbb{X}_n}}(z) - \mathbb{E}(S_{\mu_{\mathbb{G}_n}}(z))| \to 0$ p.s.

- $X_{k,\ell} = g(\xi_{k-i,\ell-j} \; ; \; (i,j) \in \mathbb{Z}^2)$
- Soit m un entier positif fixe pour le moment et $\forall (u,v) \in \mathbb{Z}^2$, on pose

$$X_{u,v}^{(m)} = \mathbb{E}\big(X_{u,v} | \mathcal{F}_{u,v}^{(m)}\big) \, ,$$

où $\mathcal{F}_{u,v}^{(m)} := \sigma(\xi_{i,j} \, ; \, u-m \le i \le u+m, \; v-m \le j \le v+m)$.

$$X_{u,v}^{(m)} \perp X_{u',v'}^{(m)} \quad \text{si} \quad \max\{|u-u'|, |v-v'|\} > 2m$$

Stratégie de preuve

Montrer pour tout $z \in \mathbb{C}^+$, $|S_{\mu_{\mathbb{X}_n}}(z) - \mathbb{E}(S_{\mu_{\mathbb{G}_n}}(z))| \to 0$ p.s.

- $X_{k,\ell} = g(\xi_{k-i,\ell-j} \; ; \; (i,j) \in \mathbb{Z}^2)$
- Soit m un entier positif fixe pour le moment et $\forall (u,v) \in \mathbb{Z}^2$, on pose

$$X_{u,v}^{(m)} = \mathbb{E}(X_{u,v} | \mathcal{F}_{u,v}^{(m)}) \, ,$$

où $\mathcal{F}_{u,v}^{(m)} := \sigma(\xi_{i,j} \, ; \, u-m \leq i \leq u+m, \; v-m \leq j \leq v+m)$.

$$X_{u,v}^{(m)} \perp X_{u',v'}^{(m)} \quad \text{si} \quad \max\{|u-u'|, |v-v'|\} > 2m$$

- Soit $\mathbb{X}_n^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{X}_n^{(m)}$ où

$$\mathcal{X}_n^{(m)} = \begin{cases} X_{i,j}^{(m)} & \text{si } j \leqslant i \\ X_{j,i}^{(m)} & \text{si } i < j \end{cases}$$

- $S_{\mathbb{X}_n}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(\mathbb{X}_n - zI)^{-1}$

- $S_{\mathbb{X}_n}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(\mathbb{X}_n - zI)^{-1}$
- Comme $R_z(A) - R_z(B) = R_z(A)(B - A)R_z(B)$ et $\|R_z\| \leqslant |\mathfrak{Im}(z)|^{-1}$, on a

- $S_{\mathbb{X}_n}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(\mathbb{X}_n - zI)^{-1}$
- Comme $R_z(A) - R_z(B) = R_z(A)(B - A)R_z(B)$ et $\|R_z\| \leqslant |\mathfrak{Im}(z)|^{-1}$, on a

$$\left|S_{\mathbb{X}_n}(z) - S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z)\right|^2 \leqslant \frac{1}{n^2 v^4}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_n^{(m)}\right)^2$$

- $S_{\mathbb{X}_n}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(\mathbb{X}_n - zI)^{-1}$
- Comme $R_z(A) - R_z(B) = R_z(A)(B - A)R_z(B)$ et $\|R_z\| \leqslant |\mathfrak{Im}(z)|^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}\left|S_{\mathbb{X}_n}(z) - S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z)\right|^2 &\leqslant \frac{1}{n^2 v^4}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_n^{(m)}\right)^2 \\ &\leqslant \frac{2}{n^2 v^4}\sum_{1\leq \ell \leq k \leq n}\left(X_{k,\ell} - X_{k,\ell}^{(m)}\right)^2\end{aligned}$$

- $S_{\mathbb{X}_n}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(\mathbb{X}_n - zI)^{-1}$
- Comme $R_z(A) - R_z(B) = R_z(A)(B-A)R_z(B)$ et $\|R_z\| \leqslant |\mathfrak{Im}(z)|^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}\left|S_{\mathbb{X}_n}(z) - S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z)\right|^2 &\leqslant \frac{1}{n^2 v^4}\mathrm{Tr}\big(\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_n^{(m)}\big)^2\\ &\leqslant \frac{2}{n^2 v^4}\sum_{1\leq \ell\leq k\leq n}\big(X_{k,\ell} - X_{k,\ell}^{(m)}\big)^2\end{aligned}$$

- Théorème ergodique implique que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\leq k,\ell\leq n}\big(X_{k,\ell}-X_{k,\ell}^{(m)}\big)^2 = \mathbb{E}\Big(\big(X_{0,0}-X_{0,0}^{(m)}\big)^2\Big) \text{ p.s. et en } \mathbb{L}^1\,.$$

- $S_{\mathbb{X}_n}(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(\mathbb{X}_n - zI)^{-1}$
- Comme $R_z(A) - R_z(B) = R_z(A)(B-A)R_z(B)$ et $\|R_z\| \leqslant |\Im\mathfrak{m}(z)|^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}\left|S_{\mathbb{X}_n}(z) - S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z)\right|^2 &\leqslant \frac{1}{n^2 v^4}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_n^{(m)}\right)^2 \\ &\leqslant \frac{2}{n^2 v^4}\sum_{1\le \ell \le k \le n}\left(X_{k,\ell} - X_{k,\ell}^{(m)}\right)^2\end{aligned}$$

- Théorème ergodique implique que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\le k,\ell\le n}\left(X_{k,\ell} - X_{k,\ell}^{(m)}\right)^2 = \mathbb{E}\left(\left(X_{0,0} - X_{0,0}^{(m)}\right)^2\right) \text{ p.s. et en } \mathbb{L}^1 .$$

$$\lim_m \limsup_n \left|S_{\mathbb{X}_n}(z) - S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z)\right| = 0 \text{ p.s.}$$

- Soit $(G_{i,j}^{(m)})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ une famille de variables aléatoires Gaussiennes t.q. pour tout $(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\mathbb{E}(G_{k,\ell}^{(m)}G_{i,j}^{(m)}) = \mathbb{E}(X_{k,\ell}^{(m)}X_{i,j}^{(m)})$$

- Soit $(G_{i,j}^{(m)})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ une famille de variables aléatoires Gaussiennes t.q. pour tout $(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\mathbb{E}(G_{k,\ell}^{(m)}G_{i,j}^{(m)}) = \mathbb{E}(X_{k,\ell}^{(m)}X_{i,j}^{(m)})$$

- Soit $\mathbb{G}_n^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{G}_n^{(m)}$ où

$$\mathcal{G}_n^{(m)} = \begin{cases} G_{i,j}^{(m)} & \text{si } j \leqslant i \\ G_{j,i}^{(m)} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

- Soit $(G_{i,j}^{(m)})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ une famille de variables aléatoires Gaussiennes t.q. pour tout $(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\mathbb{E}(G_{k,\ell}^{(m)}G_{i,j}^{(m)})=\mathbb{E}(X_{k,\ell}^{(m)}X_{i,j}^{(m)})$$

- Soit $\mathbb{G}_n^{(m)}=\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{G}_n^{(m)}$ où

$$\mathcal{G}_n^{(m)}=\begin{cases} G_{i,j}^{(m)} & \text{si } j\leqslant i\\ G_{j,i}^{(m)} & \text{si } i<j.\end{cases}$$

- On va montrer que $\forall z\in\mathbb{C}_+$

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left|\mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big)-\mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\big)\right|=0\,.$$

- $S_A(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A - zI)^{-1}$

- $S_A(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A - zI)^{-1}$
- Soit $N = n(n+1)/2$. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathbf{x} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^N \quad \text{où} \quad r_i = (x_{i,j})_{1 \leq j \leq i}$$

.

- Soit $A : \mathbb{R}^N \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$A(\mathbf{x})_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{cases} x_{i,j} & \text{if } i \geq j \\ x_{j,i} & \text{if } i < j \end{cases}$$

- $S_A(z) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A - zI)^{-1}$
- Soit $N = n(n+1)/2$. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathbf{x} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^N \quad \text{où} \quad r_i = (x_{i,j})_{1 \leq j \leq i}$$

.

- Soit $A : \mathbb{R}^N \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$A(\mathbf{x})_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{cases} x_{i,j} & \text{if } i \geq j \\ x_{j,i} & \text{if } i < j \end{cases}$$

- $z \in \mathbb{C}^+$, soit $f := f_{n,z}$ la fonction définie de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ par

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\big(A(\mathbf{x}) - z\mathbf{I}_n\big)^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

- $\mathbf{G} = (R_1, \ldots, R_n)$ avec $R_i = (G_{i,j})_{1 \leq j \leq i}$

$$S_{\mathbb{G}_n}(z) = f(\mathbf{G})$$

- $\mathbf{G} = (R_1, \ldots, R_n)$ avec $R_i = (G_{i,j})_{1 \leq j \leq i}$

$$S_{\mathbb{G}_n}(z) = f(\mathbf{G})$$

- $\mathbf{G}^{(m)} = (R_1^{(m)}, \ldots, R_n^{(m)})$ avec $R_i^{(m)} = (G_{i,j}^{(m)})_{1 \leq j \leq i}$

$$S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z) = f(\mathbf{G}^{(m)})$$

- $\mathbf{G} = (R_1, \ldots, R_n)$ avec $R_i = (G_{i,j})_{1 \leq j \leq i}$

$$S_{\mathbb{G}_n}(z) = f(\mathbf{G})$$

- $\mathbf{G}^{(m)} = (R_1^{(m)}, \ldots, R_n^{(m)})$ avec $R_i^{(m)} = (G_{i,j}^{(m)})_{1 \leq j \leq i}$

$$S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z) = f(\mathbf{G}^{(m)})$$

- On va montrer que

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \left| \mathbb{E} f(\mathbf{G}) - \mathbb{E} f(\mathbf{G}^{(m)}) \right| = 0\,.$$

Technique d'interpolation Gaussienne

- Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

Technique d'interpolation Gaussienne

- Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
- Soient $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(\widetilde{Z}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux familles de v.a. Gaussiennes centrées. On note les vecteurs aléatoires

$$\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_d) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{Z}} = (\widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_d).$$

Technique d'interpolation Gaussienne

- Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
- Soient $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(\widetilde{Z}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux familles de v.a. Gaussiennes centrées. On note les vecteurs aléatoires

$$\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_d) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{Z}} = (\widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_d).$$

Comment peut-on approximer $\mathbb{E}(f(\mathbf{Z}))$ par $\mathbb{E}(f(\widetilde{\mathbf{Z}}))$?

- Pour $t \in [0,1]$, $\mathbf{W}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{Z} + \sqrt{1-t}\,\widetilde{\mathbf{Z}}$. Alors

$$\mathbb{E}f(\mathbf{Z}) - \mathbb{E}f(\widetilde{\mathbf{Z}}) = \mathbb{E}\int_0^1 \frac{d}{dt} f(\mathbf{W}(t))\,dt$$
$$= \mathbb{E}\int_0^1 \sum_{i=1}^d \left(\frac{Z_i}{2\sqrt{t}} - \frac{\widetilde{Z}_i}{2\sqrt{1-t}} \right) \partial_i f(\mathbf{W}(t))\,dt\,.$$

- Pour $t \in [0,1]$, $\mathbf{W}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{Z} + \sqrt{1-t}\,\widetilde{\mathbf{Z}}$. Alors

$$\mathbb{E}f(\mathbf{Z}) - \mathbb{E}f(\widetilde{\mathbf{Z}}) = \mathbb{E}\int_0^1 \frac{d}{dt} f(\mathbf{W}(t))\,dt$$
$$= \mathbb{E}\int_0^1 \sum_{i=1}^d \left(\frac{Z_i}{2\sqrt{t}} - \frac{\widetilde{Z}_i}{2\sqrt{1-t}} \right) \partial_i\, f(\mathbf{W}(t))\,dt\,.$$

- **Identité de Stein:** (formule d'intégration par parties pour les vecteurs gaussiens)
  Pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$,

$$\mathbb{E}\big(Z_i\, h(\mathbf{Z})\big) = \sum_{\ell=1}^d \mathbb{E}(Z_i Z_\ell)\,\mathbb{E}\Big(\frac{\partial h}{\partial x_\ell}(\mathbf{Z})\Big)\,.$$

$$|\mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\big)| = |\mathbb{E}\big(f(\mathbf{G})\big) - \mathbb{E}\big(f(\mathbf{G}^{(m)})\big)|$$

$$|\mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\big)| = |\mathbb{E}\big(f(\mathbf{G})\big) - \mathbb{E}\big(f(\mathbf{G}^{(m)})\big)|$$

$$= \frac{1}{2}\Big| \sum_{1\le\ell\le k\le n} \sum_{1\le j\le i\le n} \big(\mathbb{E}(G_{k,\ell}G_{i,j}) - \mathbb{E}(G_{k,\ell}^{(m)}G_{i,j}^{(m)})\big)\mathbb{E}\big(\partial_{k\ell}\partial_{ij}f(\mathbf{g}(t))\big)\Big|$$

$$\mathbf{g}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{G} + \sqrt{1-t}\,\mathbf{G}^{(m)}$$

et

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\big(A(\mathbf{x}) - z\mathbf{I}_n\big)^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

- $R(\mathbf{x}) = (A(\mathbf{x}) - z\mathbf{I})^{-1}$

- $R(\mathbf{x}) = (A(\mathbf{x}) - z\mathbf{I})^{-1}$
- $f(x) = \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, R(x)$

$$R(A - z\mathbf{I}) = \mathbf{I} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial R}{\partial x_{i,j}} = -R \frac{\partial A}{\partial x_{i,j}} R$$

- $R(\mathbf{x}) = (A(\mathbf{x}) - z\mathbf{I})^{-1}$
- $f(x) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\, R(x)$

$$R(A - z\mathbf{I}) = \mathbf{I} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial R}{\partial x_{i,j}} = -R\frac{\partial A}{\partial x_{i,j}}R$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i,j}} = -\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(R\frac{\partial A}{\partial x_{i,j}}R\right)$$

- $R(\mathbf{x}) = (A(\mathbf{x}) - z\mathbf{I})^{-1}$
- $f(x) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\, R(x)$

$$R(A - z\mathbf{I}) = \mathbf{I} \quad \text{alors} \quad \frac{\partial R}{\partial x_{i,j}} = -R\frac{\partial A}{\partial x_{i,j}}R$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i,j}} = -\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\Big(R\frac{\partial A}{\partial x_{i,j}}R\Big)$$

Comment peut-on contrôler des termes comme par exemple

$$\Big|\mathrm{Tr}\big(R(\partial_{x_{i,j}}A)R(\partial_{x_{k,\ell}}A)R\big)\Big|?$$

Soient B et C deux matrices d'ordre N

- $|\mathrm{Tr}(BC)| \leqslant \|B\|_2 \|C\|_2$
- $\max\{\|BC\|_2, \|CB\|_2\} \leqslant |\lambda_{max}(B)| \, \|C\|_2$

Soient B et C deux matrices d'ordre N

- $|\mathrm{Tr}(BC)| \leqslant \|B\|_2 \|C\|_2$
- $\max\{\|BC\|_2, \|CB\|_2\} \leqslant |\lambda_{max}(B)| \, \|C\|_2$

$$\|R\| \leqslant \frac{1}{|\mathfrak{Im}(z)|}$$

Soient B et C deux matrices d'ordre N

- $|\mathrm{Tr}(BC)| \leqslant \|B\|_2 \|C\|_2$
- $\max\{\|BC\|_2, \|CB\|_2\} \leqslant |\lambda_{max}(B)| \, \|C\|_2$

$$\|R\| \leqslant \frac{1}{|\mathfrak{Im}(z)|}$$

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{Tr}\big(R(\partial_{x_{i,j}}A)R(\partial_{x_{k,\ell}}A)R\big)\right| &\leqslant \|\partial_{x_{i,j}}A\|_2 \|R(\partial_{x_{u,v}}A)R^2\|_2 \\ &\leqslant \|\partial_{x_{i,j}}A\|_2 \|\partial_{x_{k,\ell}}A\|_2 |\mathfrak{Im}(z)|^{-3} \end{aligned}$$

Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}\right| \leq \frac{2}{y^2 n^{3/2}}$$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,j}\partial x_{k,\ell}}\right| \leq \frac{4}{y^3 n^2}$$

$$\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x_{i,j}\partial x_{k,\ell}\partial x_{u,v}}\right| \leq \frac{3 \times 2^{5/2}}{y^4 n^{5/2}}$$

$$
\begin{aligned}
&|\mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\big)| \\
&= \frac{1}{2}\Big| \sum_{1\leq \ell \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \big(\mathbb{E}(G_{k,\ell} G_{i,j}) - \mathbb{E}(G_{k,\ell}^{(m)} G_{i,j}^{(m)})\big)\mathbb{E}\big(\partial_{k\ell}\partial_{ij} f(\mathbf{g}(t))\big)\Big|
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{g}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{G} + \sqrt{1-t}\,\mathbf{G}^{(m)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\big)\right| \\
&= \frac{1}{2}\Big| \sum_{1\le\ell\le k\le n} \sum_{1\le j\le i\le n} \big(\mathbb{E}(G_{k,\ell}G_{i,j}) - \mathbb{E}(G_{k,\ell}^{(m)}G_{i,j}^{(m)})\big)\mathbb{E}\big(\partial_{k\ell}\partial_{ij}f(\mathbf{g}(t))\big)\Big|
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{g}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{G} + \sqrt{1-t}\,\mathbf{G}^{(m)}
$$

$$
\mathbb{E}(X_{k,\ell}X_{i,j}) = \mathbb{E}(G_{k,\ell}G_{i,j}) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_{k,\ell}^{(m)}X_{i,j}^{(m)}) = \mathbb{E}(G_{k,\ell}^{(m)}G_{i,j}^{(m)})
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\big)\right| \\
&= \frac{1}{2}\Big|\sum_{1\le\ell\le k\le n}\sum_{1\le j\le i\le n}\big(\mathbb{E}(X_{k,\ell}X_{i,j}) - \mathbb{E}(X_{k,\ell}^{(m)}X_{i,j}^{(m)})\big)\mathbb{E}\big(\partial_{k\ell}\partial_{ij}f(\mathbf{g}(t))\big)\Big|
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{g}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{G} + \sqrt{1-t}\,\mathbf{G}^{(m)}
$$

$$
\mathbb{E}(X_{k,\ell}X_{i,j}) = \mathbb{E}(G_{k,\ell}G_{i,j}) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_{k,\ell}^{(m)}X_{i,j}^{(m)}) = \mathbb{E}(G_{k,\ell}^{(m)}G_{i,j}^{(m)})
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\big)\right| \\
&= \frac{1}{2}\Bigg| \sum_{1\le \ell\le k\le n} \sum_{1\le j\le i\le n} \Big(\mathbb{E}(X_{k,\ell}X_{i,j}) - \mathbb{E}(X_{k,\ell}^{(m)}X_{i,j}^{(m)})\Big)\mathbb{E}\big(\partial_{k\ell}\partial_{ij} f(\mathbf{g}(t))\big)\Bigg| \\
&\qquad\qquad\qquad \leqslant C \|X_{0,0}^{(m)} - X_{0,0}\|_2 \|X_{0,0}\|_2
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{g}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{G} + \sqrt{1-t}\,\mathbf{G}^{(m)}
$$

$$
\mathbb{E}(X_{k,\ell}X_{i,j}) = \mathbb{E}(G_{k,\ell}G_{i,j}) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_{k,\ell}^{(m)}X_{i,j}^{(m)}) = \mathbb{E}(G_{k,\ell}^{(m)}G_{i,j}^{(m)})
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\big)\right| \\
&= \frac{1}{2}\Big| \sum_{1\le \ell \le k \le n} \sum_{1 \le j \le i \le n} \big(\mathbb{E}(X_{k,\ell}X_{i,j}) - \mathbb{E}(X_{k,\ell}^{(m)}X_{i,j}^{(m)})\big)\mathbb{E}\big(\partial_{k\ell}\partial_{ij} f(\mathbf{g}(t))\big)\Big| \\
&\qquad\qquad \leqslant C\|X_{0,0}^{(m)} - X_{0,0}\|_2 \|X_{0,0}\|_2
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{g}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{G} + \sqrt{1-t}\,\mathbf{G}^{(m)}
$$

$$
\mathbb{E}(X_{k,\ell}X_{i,j}) = \mathbb{E}(G_{k,\ell}G_{i,j}) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_{k,\ell}^{(m)}X_{i,j}^{(m)}) = \mathbb{E}(G_{k,\ell}^{(m)}G_{i,j}^{(m)})
$$

$$
\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left|\mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n}(z)\big) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\big)\right| = 0\,.
$$

Il reste à montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^+$,

$$\left| S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z) - \mathbb{E}\left(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\right) \right| \to 0 \quad \text{p.s.}$$

Il reste à montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^+$,

$$\left| S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z) - \mathbb{E}\left(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\right) \right| \to 0 \quad \text{p.s.}$$

1. $\left| S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z) - \mathbb{E}\left(S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z)\right) \right| \to 0 \quad \text{p.s.}$
2. $\left| \mathbb{E}\left(S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z)\right) - \mathbb{E}\left(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\right) \right| \to 0$

Il reste à montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^+$,

$$\left| S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\big) \right| \to 0 \quad \text{p.s.}$$

1. $\left| S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z)\big) \right| \to 0 \quad \text{p.s.}$ Inégalité de concentration
2. $\left| \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z)\big) - \mathbb{E}\big(S_{\mathbb{G}_n^{(m)}}(z)\big) \right| \to 0$ Méthode de Lindeberg

Une inégalité de concentration pour les mesures spectrales

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée et $(X_{i,j}^{(K)})_{i,j}$ une famille de v.a. K-dépendantes. Alors pour tous $n > K$ et $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big| \int f \, d\mu_{\mathbb{X}_n^{(K)}} - \mathbb{E} \int f \, d\mu_{\mathbb{X}_n^{(K)}} \Big| \geq t \Big) \leq 2 \exp\left(- \frac{nt^2}{160 K V_f^2} \right)$$

Une inégalité de concentration pour les mesures spectrales

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée et $(X_{i,j}^{(K)})_{i,j}$ une famille de v.a. K-dépendantes. Alors pour tous $n > K$ et $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left| \int f \, d\mu_{\mathbb{X}_n^{(K)}} - \mathbb{E} \int f \, d\mu_{\mathbb{X}_n^{(K)}} \right| \geq t \right) \leq 2 \exp\left(-\frac{nt^2}{160 K V_f^2} \right)$$

On applique l'inégalité avec $K = 2m$ et

$$f_1(x) = \mathrm{Re}(f_z(x)) = \frac{x-u}{(x-u)^2 + v^2}$$

$$f_2(x) = \mathrm{Im}(f_z(x)) = \frac{v}{(x-u)^2 + v^2}$$

si $z = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}^+$. On a $V_{f_1} = V_{f_2} = \frac{2}{v}$

La Méthode de Lindeberg (Chatterjee 2006)

- Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable.

La Méthode de Lindeberg (Chatterjee 2006)

- Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable.
- Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes bornées centrées réduites. On note les vecteurs aléatoires

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d) \quad \text{et} \quad \mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_d).$$

La Méthode de Lindeberg (Chatterjee 2006)

- Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable.
- Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes bornées centrées réduites. On note les vecteurs aléatoires

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d) \quad \text{et} \quad \mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_d).$$

Comment peut-on approximer $\mathbb{E}(f(\mathbf{X}))$ par $\mathbb{E}(f(\mathbf{Z}))$?

La Méthode de Lindeberg (Chatterjee 2006)

- Avec la notation $\mathbf{Y}_i = (X_1, \ldots, X_i, Z_{i+1}, \ldots, Z_d)$, on a

$$\mathbb{E}f(\mathbf{X}) - \mathbb{E}f(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{d} \big(\mathbb{E}f(\mathbf{Y}_i) - \mathbb{E}f(\mathbf{Y}_{i-1})\big)$$

La Méthode de Lindeberg (Chatterjee 2006)

- Avec la notation $\mathbf{Y}_i = (X_1, \dots, X_i, Z_{i+1}, \dots, Z_d)$, on a

$$\mathbb{E}f(\mathbf{X}) - \mathbb{E}f(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{d} \left(\mathbb{E}f(\mathbf{Y}_i) - \mathbb{E}f(\mathbf{Y}_{i-1})\right)$$

- On note $\mathbf{Y}_i^0 = (X_1, \dots, X_{i-1}, 0, Z_{i+1}, \dots, Z_d)$.

$$f(\mathbf{Y}_i) - f(\mathbf{Y}_{i-1}) = f(\mathbf{Y}_i) - f(\mathbf{Y}_i^0) - \left(f(\mathbf{Y}_{i-1}) - f(\mathbf{Y}_i^0)\right)$$

La Méthode de Lindeberg (Chatterjee 2006)

- Avec la notation $\mathbf{Y}_i = (X_1, \ldots, X_i, Z_{i+1}, \ldots, Z_d)$, on a

$$\mathbb{E}f(\mathbf{X}) - \mathbb{E}f(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{d} \left(\mathbb{E}f(\mathbf{Y}_i) - \mathbb{E}f(\mathbf{Y}_{i-1})\right)$$

- On note $\mathbf{Y}_i^0 = (X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, Z_{i+1}, \ldots, Z_d)$.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Y}_i) - f(\mathbf{Y}_{i-1}) = {} & (X_i - Z_i)\partial_i f(\mathbf{Y}_i^0) + (X_i^2 - Z_i^2)\partial_i^2 f(\mathbf{Y}_i^0) \\ & + \frac{1}{6} X_i^3 \partial_i^3 f(\mathbf{Y}_i^*) + \frac{1}{6} Z_i^3 \partial_i^3 f(\mathbf{Y}_i^{**}) \end{aligned}$$

La Méthode de Lindeberg (Chatterjee 2006)

- Avec la notation $\mathbf{Y}_i = (X_1, \ldots, X_i, Z_{i+1}, \ldots, Z_d)$, on a

$$\mathbb{E}f(\mathbf{X}) - \mathbb{E}f(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{d} \left(\mathbb{E}f(\mathbf{Y}_i) - \mathbb{E}f(\mathbf{Y}_{i-1})\right)$$

- On note $\mathbf{Y}_i^0 = (X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, Z_{i+1}, \ldots, Z_d)$.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Y}_i) - f(\mathbf{Y}_{i-1}) = (X_i - Z_i)\partial_i f(\mathbf{Y}_i^0) + (X_i^2 - Z_i^2)\partial_i^2 f(\mathbf{Y}_i^0) \\ + \frac{1}{6} X_i^3 \partial_i^3 f(\mathbf{Y}_i^*) + \frac{1}{6} Z_i^3 \partial_i^3 f(\mathbf{Y}_i^{**}) \end{aligned}$$

Alors

$$\left|\mathbb{E}f(\mathbf{Y}_i) - \mathbb{E}f(\mathbf{Y}_{i-1})\right| \leqslant \frac{1}{6}\|X_i\|_\infty^3 \mathbb{E}|\partial_i^3 f(\mathbf{Y}_i^*)| + \frac{1}{6}\|Z_i\|_\infty^3 \mathbb{E}|\partial_i^3 f(\mathbf{Y}_i^{**})|$$

- Soit $p \to \infty$ t.q. $p/n \to 0$ et $m/p \to 0$.
- Soient $K = 2m$ et $q = \left[\frac{n}{p+K}\right]$.

- Soit $p \to \infty$ t.q. $p/n \to 0$ et $m/p \to 0$.
- Soient $K = 2m$ et $q = \left[\frac{n}{p+K}\right]$.

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & & & & & \dots & & & \\
\mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{0} & & & & \dots & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \dots & & & \\
\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{2,2} & \mathbf{0} & & \dots & & & \\
\vdots & & & & \ddots & & \dots & \dots & \\
\mathbf{B}_{q-1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{q-1,2} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{q-1,3} & \ddots & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & & \\
\mathbf{B}_{q,1} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{q,2} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{q,3} & \dots & \mathbf{B}_{q,q} & \mathbf{0} & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\left|S_{\mathbb{X}_n^{(m)}}(z) - S_{\hat{\mathbb{X}}_n^{(m)}}(z)\right| &= \left| \int f d\mu_{\mathbb{X}_n^{(m)}} - \int f d\mu_{\hat{\mathbb{X}}_n^{(m)}} \right| \\
&\leqslant \frac{\pi}{v} \| F^{\mathbb{X}_n^{(m)}} - F^{\hat{\mathbb{X}}_n^{(m)}} \|_\infty \\
&\leqslant \frac{\pi}{vn} \mathrm{Rang}\,(\mathcal{X}_n^{(m)} - \hat{\mathcal{X}}_n^{(m)})
\end{aligned}
$$

Merci de votre attention!