PROCESSUS DÉTERMINANTAUX FINIS ET SOUS-GRAPHES ALÉATOIRES

THIERRY LÉVY

Résumé. Dans ce mini-cours, nous allons examiner les processus ponctuels déterminantaux sur un ensemble fini du point de vue de la géométrie euclidienne, et l'idée qu'un langage agréable pour les calculs qui concernent ces processus est celui de l'algèbre extérieure. Nous aboutirons à une démonstration « euclidienne » du théorème classique de Kirchhoff qui énumère les arbres couvrants d'un graphe fini connexe.

L'originalité de ce texte, pour autant qu'il y en ait une, tient non pas aux résultats, qui sont tous classiques (sauf un), mais plutôt au point de vue adopté, qui a été en particulier développé au cours de travaux avec Adrien Kassel.

Table des matières

1. Déterminants, mineurs, et formule de Cauchy–Binet

Commençons par définir quelques notations. Pour tout entier naturel d, on note $[d] = \{1, \dots, d\}$. Pour tout entier naturel n, on note $\binom{[d]}{n}$ l'ensemble des parties à n éléments de $[d]$.

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,d}$ une matrice. Pour tous $I \subseteq [n]$ et $J \subseteq [d]$, on note A_{IJ} la sous-matrice $(A_{ij})_{i\in I, j\in J}$ de A, les éléments de I et de J étant pris dans l'ordre croissant. On note $A_{I\bullet} = A_{I[d]}$ et $A_{\bullet J} = A_{[n]J}$.

Nous allons établir trois formules concernant les déterminants, valables pour des matrices à coefficients dans un anneau commutatif quelconque.

Proposition 1.1 (Formule de Cauchy–Binet). *Soient $A \in \mathrm{M}_{n,d}$ et $B \in \mathrm{M}_{d,n}$ deux matrices dont le produit est bien défini et carré. Alors*

$$\det(AB) = \sum_{I \in \binom{[d]}{n}} \det(A_{\bullet I}) \det(B_{I\bullet}). \tag{1}$$

Démonstration. Calculons la j-ième colonne de AB en fonction des colonnes de A :

$$(AB)_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{d} B_{ij} A_{\bullet i}$$

Date: 10 mars 2023. Mini-cours donné à l'IHP dans le cadre du GDR MEGA.

et développons le déterminant de AB en utilisant sa multilinéarité par rapport aux colonnes :

$$\det(AB) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{d} B_{i_1 1}\ldots B_{i_n n} \det(A_{\bullet i_1}\ldots A_{\bullet i_n}).$$

Dans les termes où au moins deux indices sont égaux, le déterminant est nul. Restent les termes où tous les indices sont distincts, que nous réorganisons comme une somme sur des parties de $[d]$, en prenant garde à l'ordre :

$$\det(AB) = \sum_{I=\{i_1<\ldots<i_n\}\in\binom{[d]}{n}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} B_{i_{\sigma(1)}1}\ldots B_{i_{\sigma(n)}n}\ \epsilon(\sigma)\det A_{\bullet I}.$$

Dans la somme des termes dépendant de la permutation σ, nous reconnaissons $\det(B_{I\bullet})$. □

On peut s'amuser à voir ce que dit cette formule lorsque $n > d$, lorsque $n = d$, ou lorsque $n = 1$, qui sont des cas où on connaissait déjà le résultat. Le cas intéressant est celui où $n < d$.

Proposition 1.2. *Soit $M \in \mathrm{M}_n$ une matrice carrée. On a*

$$\det(I_n + M) = \sum_{J\subseteq[n]} \det(M_{JJ}). \tag{2}$$

Dans le membre de droite, on a la somme de tous les mineurs principaux de M. Il est entendu que le déterminant de la matrice vide vaut 1, et correspond au terme $J = \varnothing$.

Démonstration. On développe $\det(I_n+M)$ en utilisant par exemple la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes. □

Proposition 1.3. *Soient $A \in \mathrm{M}_{n,d}$ et $B \in \mathrm{M}_{d,n}$ deux matrices dont le produit est bien défini et carré. Alors*

$$\det(I_n + AB) = \det(I_d + BA). \tag{3}$$

Démonstration. En effet, en vertu de (2) et de la formule de Cauchy–Binet, le terme de gauche est égal à

$$\sum_{I\subseteq[n],J\subseteq[d],|I|=|J|} \det(A_{IJ})\det(B_{JI}),$$

qui est manifestement une expression symétrique en A et B. □

2. Théorème de Pythagore et processus ponctuels

Soit E un espace euclidien. Étant donné deux sous-espaces vectoriels F et G de E de même dimension n, notons

$$\cos^2(F,G) = \left|\det\left(\langle f_i, g_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right|^2, \tag{4}$$

où $(f_1,\ldots,f_n)$ et $(g_1,\ldots,g_n)$ sont des bases orthonormées de F et de G. Ce nombre ne dépend pas des bases orthonormées choisies. C'est le carré du volume de la projection orthogonale sur G d'un cube unité de F (ou de la projection orthogonale sur F d'un cube unité de G).

Donnons-nous une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_d)$ de E. Pour tout sous-ensemble $I\subseteq[d]$, notons

$$E_I = \mathrm{Vect}(e_i : i\in I)$$

Donnons-nous enfin un sous-espace vectoriel H de E, de dimension n.

Théorème 2.1 (Pythagore)**.** *On a l'égalité*

$$\sum_{I\in\binom{[d]}{n}} \cos^2(H,E_I) = 1.$$

Démonstration. Choisissons une base orthonormée $(h_1, \ldots, h_n)$ de H. Notons $A \in \mathrm{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ la matrice des vecteurs $h_1, \ldots, h_n$ dans la base $e_1, \ldots, e_d$. La matrice A^*A est la matrice de Gram de la famille $(h_1, \ldots, h_n)$, c'est-à-dire la matrice I_n. La formule de Cauchy–Binet nous donne donc

$$1 = \det(A^*A) = \sum_{I \in \binom{[d]}{n}} \det((A^*)_{\bullet I}) \det(A_{I\bullet}) = \sum_{I \in \binom{[d]}{n}} \left|\det(A_{I\bullet})\right|^2 = \sum_{I \in \binom{[d]}{n}} \cos^2(H, E_I),$$

ce qui donne l'égalité annoncée. □

Le fait de nous être donné
— un espace euclidien E de dimension d,
— une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_d)$ de E,
— un sous-espace vectoriel H de dimension n de E
nous a donc fourni, d'après le théorème de Pythagore, une mesure de probabilité sur l'ensemble des parties à n éléments de $[d] = \{1, \ldots, d\}$.

Considérons un sous-ensemble aléatoire $\mathbb{X}$ de $[d]$ distribué selon cette mesure de probabilité. Pour tout $I \subseteq [d]$ tel que $|I| = n$, on a donc

$$\mathbb{P}(\mathbb{X} = I) = \cos^2(H, E_I) = |\det(A_{I\bullet})|^2, \tag{5}$$

où $A \in \mathrm{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ est la matrice des vecteurs d'une base orthonormée de H dans la base $e_1, \ldots, e_d$.

Nous allons maintenant calculer la mesure d'incidence de $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la probabilité que $\mathbb{X}$ contienne une partie J donnée de $[d]$. Pour cela, commençons par calculer une sorte de fonction génératrice de la loi de $\mathbb{X}$.

Pour toute fonction $f : [d] \to \mathbb{R}$, notons M_f la matrice $\mathrm{diag}(f(1), \ldots, f(d))$.

Lemme 2.2. *Pour toute fonction $f : [d] \to \mathbb{R}$, on a l'égalité*

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i \in \mathbb{X}} f(i)\Big] = \det(A^* M_f A).$$

Démonstration. On applique la formule de Cauchy–Binet au membre de droite. On trouve

$$\det(A^* M_f A) = \sum_{I \in \binom{[d]}{n}} \det((A^*)_{\bullet I}) \det((M_f A)_{I\bullet}) = \sum_{I \in \binom{[d]}{n}} |\det(A_{I\bullet})|^2 \prod_{i \in I} f(i)$$

qui est bien l'espérance annoncée. □

Une forme plus utile nous sera donnée en prenant la fonction f sous la forme $f = 1 + g$ et en effectuant un petit calcul. Notons $K \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ la matrice dans la base orthonormée de E de la projection orthogonale sur H. Notons qu'avec notre notation, cette matrice n'est autre que AA^*.

Proposition 2.3. *Soit $g : [d] \to \mathbb{R}$ une fonction. On a l'égalité*

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i \in \mathbb{X}} (1 + g(i))\Big] = \det(I_d + K M_g). \tag{6}$$

Démonstration. D'après le lemme, le membre de gauche vaut $\det(A^*(I_d + M_g)A)$. On calcule ce déterminant en se souvenant que $A^*A = I_n$ et en utilisant la proposition 1.3 :

$$\det(A^*(I_d + M_g)A) = \det(I_n + A^* M_g A) = \det(I_d + AA^* M_g)$$

et on conclut grâce à l'égalité $K = AA^*$. □

Nous pouvons maintenant calculer la mesure d'incidence de $\mathbb{X}$.

Théorème 2.4. *Pour tout $J \subseteq [d]$, on a*

$$\mathbb{P}(J \subseteq \mathbb{X}) = \det(K_{JJ}). \tag{7}$$

Démonstration. Le membre de gauche de (6) vaut

$$\sum_{I\subseteq[d]} \mathbb{P}(\mathbb{X}=I)\prod_{i\in I}(1+g(i)) = \sum_{I\subseteq[d]} \mathbb{P}(\mathbb{X}=I)\sum_{J\subseteq I}\prod_{j\in J} g(j) = \sum_{J\subseteq[d]} \mathbb{P}(J\subseteq \mathbb{X})\prod_{j\in J} g(j).$$

Le membre de droite vaut, quant à lui, grâce à (2),

$$\sum_{J\subseteq[d]} \det((KM_g)_{JJ}) = \sum_{J\subseteq[d]} \det(K_{JJ})\prod_{j\in J} g(j).$$

En comparant les deux expressions, qui sont égales pour toute fonction g, on obtient l'égalité. □

L'équation (7) est en général prise comme définition du fait que $\mathbb{X}$ est un sous-ensemble aléatoire déterminantal de $[d]$ de noyau K. Lorsqu'on part de cette définition, il n'est pas du tout évident qu'un tel sous-ensemble aléatoire existe, il faut le démontrer. Le chemin que nous avons pris nous fait voir cette existence comme une conséquence du théorème de Pythagore.

3. Géométrie euclidienne dans l'algèbre extérieure

Indiquons comment nos calculs peuvent être formulés dans l'algèbre extérieure de E. Disons d'abord ce qu'est cette algèbre : c'est une algèbre associative avec unité qui contient E, qui est engendrée en tant qu'algèbre par E, dans laquelle les éléments de E anticommutent entre eux, et qui est universelle (au sens de « la plus grande possible ») avec ces propriétés.

Une manière de formaliser cette définition est de dire que l'algèbre extérieure de E est une algèbre associative avec unité $\bigwedge E$, dont le produit est noté $\wedge$, munie d'une application $i : E \to \bigwedge E$, et qui a la propriété que pour toute algèbre associative avec unité $\mathcal{A}$ et toute application linéaire $f : E \to \mathcal{A}$ telle que pour tout $e \in E$ on ait $f(e)^2 = 0$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\tilde{f} : \bigwedge E \to \mathcal{A}$ tel que $f = \tilde{f} \circ i$.

Une manière de construire l'algèbre extérieure de E est de prendre le quotient de l'algèbre tensorielle de E par l'idéal engendré par les tenseurs de la forme $e \otimes e$, et d'identifier E avec l'image dans ce quotient des tenseurs de degré 1.

Une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de E détermine une base de $\bigwedge E$, qui est la base formée des tenseurs

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k},\ 0 \leqslant k \leqslant d,\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant d.$$

En particulier, $\bigwedge E$ est un espace vectoriel de dimension finie, en l'occurrence 2^d.

Lorsque $I = \{i_1 < \ldots < i_k\}$, nous noterons $e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$. Ainsi, la famille $(e_I : I \subseteq [d])$ est une base de $\bigwedge E$, que nous dirons associée à la base $(e_1, \ldots, e_d)$ de E. Le sous-espace de $\bigwedge E$ engendrée par les e_I pour I de cardinal k est noté $\bigwedge^k E$. Dans la construction de $\bigwedge E$ à partir de l'algèbre tensorielle de E, c'est l'image des tenseurs de degré k.

Tout endomorphisme u de E détermine un endomorphisme noté $\bigwedge u$ de $\bigwedge E$. Si la matrice de u dans une base de E est la matrice M, alors la matrice de $\bigwedge u$ dans la base associée de $\bigwedge E$ est la matrice $\bigwedge M$ donnée par

$$(\textstyle\bigwedge M)_{IJ} = \det(M_{IJ})$$

si I et J sont des parties de $[d]$ de même cardinal, et $(\bigwedge M)_{IJ} = 0$ sinon.

Plus généralement, toute application linéaire u entre deux espaces vectoriels E et F détermine une application linéaire $\bigwedge u : \bigwedge E \to \bigwedge F$. Les coefficients de la matrice de $\bigwedge u$ dans les bases de $\bigwedge E$ et $\bigwedge F$ associées à des bases de E et F sont les mineurs de la matrice de u dans ces bases.

Cette construction respecte la composition des applications linéaires : si $u : E \to F$ et $v : F \to G$ sont des applications linéaires, alors $\bigwedge(v \circ u) = \bigwedge v \circ \bigwedge u$.

Dans ce langage, la formule de Cauchy–Binet se démontre en une ligne. Nous avons un espace E de dimension d et un espace F de dimension n, et deux applications $a : E \to F$ et $b : F \to E$. Nous choisissons des bases de E et F et écrivons les matrices A et B de a et b dans ces bases. Alors

$$\det(AB) = \big(\textstyle\bigwedge(AB)\big)_{[n][n]} = (\bigwedge A \bigwedge B)_{[n][n]} = \displaystyle\sum_{I\in\binom{[d]}{n}} (\textstyle\bigwedge A)_{[n]I}(\bigwedge B)_{I[n]} = \displaystyle\sum_{I\in\binom{[d]}{n}} \det(A_{\bullet I})\det(B_{I\bullet}).$$

Si E est euclidien, et si la base associée $(e_1,\ldots,e_d)$ est orthonormée, on peut munir $\bigwedge E$ d'une structure euclidienne en déclarant la base $(e_I : I \subseteq [d])$ orthonormée. Il semblerait que cette structure puisse dépendre non seulement de la structure euclidienne de E mais aussi du choix de la base orthonormée $(e_1,\ldots,e_d)$, mais il n'en est rien. En effet, une application de la formule de Cauchy–Binet permet de vérifier que si une matrice M est orthogonale, alors la matrice $\bigwedge M$ l'est aussi.

Repartons maintenant des données de notre construction d'un sous-ensemble aléatoire de $[d]$, à savoir : un espace euclidien E, une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_d)$ de E, et un sous-espace vectoriel H de E de dimension n.

Au sous-espace H, nous associons l'élément $\iota_H = h_1\wedge\ldots\wedge h_n$ de $\bigwedge E$, où $(h_1,\ldots,h_n)$ est une base orthonormée de H. Cet élément n'est défini qu'au signe près, mais il est de norme 1. Le théorème de Pythagore dans l'espace euclidien $\bigwedge E$ muni de sa base orthonormée $(e_I : I \subseteq [d])$ s'écrit alors

$$1 = \|\iota_H\|^2 = \sum_{I\subseteq[d]} |\langle e_I, \iota_H\rangle|^2$$

et seules les parties I de cardinal n donnent une contribution possiblement non nulle, puisque les sous-espaces $\bigwedge^k E$ et $\bigwedge^n E$ sont orthogonaux pour $k \neq n$.

Le nombre que nous avons noté $\cos^2(H, E_I)$ est donc vraiment le carré du cosinus d'un angle, à savoir l'angle entre les vecteurs ι_H et $e_I = \iota_{E_I}$ de $\bigwedge E$.

L'idée d'utiliser le langage de l'algèbre extérieure pour parler des processus déterminantaux est déjà présente dans le travail de R. Lyons [Lyo03], Elle est aussi présente dans [KL22a].

4. Un sous-espace vectoriel aléatoire

Bien que cela s'éloigne un peu du point de vue habituel sur les processus déterminantaux, il est assez naturel, du point de vue que nous avons adopté, de considérer le sous-espace aléatoire

$$E_{\mathbb{X}} = \mathrm{Vect}(e_i : i \in \mathbb{X})$$

de E. On peut y penser comme à un substitut aléatoire au sous-espace H, choisi parmi les $\binom{d}{n}$ sous-espaces vectoriels de dimension n de E qui sont « adaptés », en un sens naturel, à la base que nous avons choisie.

Un énoncé précis qui va dans ce sens est le suivant.

Proposition 4.1. *Presque sûrement, on a* $E = H \oplus E_{\mathbb{X}}^{\perp} = E_{\mathbb{X}} \oplus H^{\perp}$.

Démonstration. Notons que pour deux sous-espaces F et G de E de même dimension, les égalités $E = F \oplus G^{\perp}$ et $E = G \oplus F^{\perp}$ sont équivalentes. En effet, si la première a lieu, alors $(G \oplus F^{\perp})^{\perp} = F \cap G^{\perp} = \{0\}$ et la deuxième a lieu.

Soit maintenant $I \in \binom{[d]}{n}$ tel que $H \cap E_I^{\perp} \neq \{0\}$. Alors on peut construire une base orthonormée de H dont au moins un vecteur est orthogonal à E_I, et une matrice qui a une colonne nulle et dont le carré du déterminant vaut $\cos^2(H, E_I)$. Ainsi, $\mathbb{P}(\mathbb{X} = I) = 0$. □

Une conséquence de ce résultat est que si $e_{i_0} \in H$ pour un certain $i_0 \in [d]$, alors $i_0 \in \mathbb{X}$ presque sûrement. En effet, pour tout I ne contenant pas i_0, on a $H \cap E_I^{\perp} \neq \{0\}$, et $\mathbb{P}(\mathbb{X} = I) = 0$.

Une autre conséquence de la proposition ci-dessus est que presque sûrement, la projection sur $E_{\mathbb{X}}$ parallèlement à $H^{\perp}$ est bien définie. Notons-la $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$ et identifions cet endomorphisme de E à sa matrice dans la base que nous en avons choisie. Rappelons que K est la projection orthogonale sur H.

Théorème 4.2. *On a $\mathbb{E}[\mathrm{P}_{\mathbb{X}}] = K$. Plus généralement, pour tous $I, J \subseteq [d]$ de même cardinal,*

$$\mathbb{E}\big[\det\big((\mathrm{P}_{\mathbb{X}})_{IJ}\big)\big] = \det(K_{IJ}).$$

Ce résultat, que nous avons démontré avec Adrien Kassel, est le seul résultat de ce texte qui ne fasse pas partie de la théorie classique des processus déterminantaux. Sa démonstration est donnée en annexe (Section 7).

Le fait que la moyenne de $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$ soit égale à K avait été démontré avant notre travail par Russell Lyons. Le théorème ci-dessus affirme en plus que la moyenne de n'importe quel mineur de $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$ est égal au mineur correspondant de K.

La classe des matrices aléatoires dont la moyenne de n'importe quel mineur est égal au mineur correspondant de la moyenne a été considérée de manière accessoire par quelques auteurs, mais n'a pas, à notre connaissance, fait l'objet d'une étude détaillée.

Notons que dans le langage de l'algèbre extérieure, ce théorème s'écrit simplement :

$$\mathbb{E}\big[\textstyle\bigwedge \mathrm{P}_{\mathbb{X}}\big] = \textstyle\bigwedge K.$$

Pour voir une application de ce théorème dans l'esprit de ce texte, on peut consulter [KL22b].

5. Un sous-graphe aléatoire déterminantal

Faisons maintenant fonctionner la machine à produire des sous-ensembles aléatoires que nous venons de construire dans un cas particulier, celui d'un graphe.

Considérons un graphe $\mathsf{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{E})$, où V est un ensemble fini et E est un ensemble de paires d'éléments de V. Nous supposons notre graphe connexe, et qu'une orientation de chaque arête a été choisie une fois pour toutes. Ainsi, à chaque arête $e = \{v, w\}$ est associé l'un des deux couples (v, w) ou (w, v). Aucune des constructions que nous allons faire ne dépend essentiellement de ce choix d'orientation.

Le graphe G produit deux espaces vectoriels, $\mathbb{R}^{\mathsf{V}}$ et $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$, et une application linéaire $d : \mathbb{R}^{\mathsf{V}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{E}}$ de dérivée discrète. Si $f \in \mathbb{R}^{\mathsf{V}}$ est vu comme une fonction sur V, et si $e = \{v, w\}$ est une arête, orientée en le couple (v, w), on pose

$$df(e) = f(w) - f(v).$$

L'espace $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$ est muni de sa base canonique, que nous identifions à l'ensemble E lui-même. Nous définissons une structure euclidienne sur $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$ en associant à chaque arête e un réel strictement positif x_e et en posant

$$\langle e, e' \rangle = \delta_{e,e'} x_e.$$

La base $(e : e \in \mathsf{E})$ est donc orthogonale, mais pas orthonormée ; il n'est pas difficile de la normer.

Il nous manque un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$: nous allons considérer $H = \operatorname{im} d$.

Avec ces ingrédients :
— l'espace $E = \mathbb{R}^{\mathsf{E}}$,
— la base orthonormée $(e/\sqrt{x_e} : e \in \mathsf{E})$,
— le sous-espace $H = \operatorname{im} d$,
nous pouvons construire le processus déterminantal sur E de noyau Π_H, la projection orthogonale sur H. C'est un sous-ensemble aléatoire de E, que nous allons noter $\mathbb{T}$, et auquel nous pensons comme un sous-graphe de G.

Notre but est de comprendre la distribution de $\mathbb{T}$.

Proposition 5.1. *Presque sûrement, $\mathbb{T}$ est un arbre couvrant de G.*

Démonstration. Par définition, $\mathbb{T}$ a presque sûrement un cardinal égal à la dimension de H, c'est-à-dire au rang de d. Or puisque nous avons supposé G connexe, le noyau de d est constitué des fonctions constantes, et il est de dimension 1. Ainsi, le rang de d vaut $|\mathsf{V}| - 1$ et presque sûrement,

$$|\mathbb{T}| = |\mathsf{V}| - 1.$$

Montrons maintenant que $\mathbb{T}$ est presque sûrement couvrant et connexe, au sens où presque sûrement, le graphe $(\mathsf{V}, \mathbb{T})$ est connexe.

Pour cela, considérons un sous-ensemble S de E qui a $|\mathsf{V}| - 1$ éléments et tel que le graphe (V, S) ne soit pas connexe. Notons V_1 l'ensemble des sommets d'une des composantes connexes de (V, S) et $V_2 = \mathsf{V} \setminus V_1$. Notons $\mathbb{1}_{V_1}$ l'indicatrice de V_1, vue comme un élément de $\mathbb{R}^{\mathsf{V}}$. L'image par d de cette indicatrice est un élément de $\operatorname{im} d$, qui est non nul parce que ni V_1 ni V_2 ne sont vides, et qui est orthogonal au sous-espace E_S de $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$: en effet, c'est une fonction sur les arêtes qui est non identiquement nulle, mais qui est nulle sur toutes les arêtes de S. Ainsi, $H \cap E_S^{\perp}$ contient $d(\mathbb{1}_{V_1})$ et n'est donc pas nul, si bien que $\mathbb{P}(\mathbb{T} = S) = 0$.

Nous avons donc établi que presque sûrement, $(\mathsf{V}, \mathbb{T})$ est un graphe connexe à $|\mathsf{V}| - 1$ arêtes. En général, pour un graphe fini, les nombres c_0 de sommets, c_1 d'arêtes, b_0 de composantes connexes et b_1 de cycles [1] sont liés par la relation $b_0 - b_1 = c_0 - c_1$. Dans notre cas, nous en déduisons que $c_1 = c_0 - b_0 + b_1 = 1 - |\mathsf{V}| + |\mathsf{V}| - 1 = 0$, si bien que $(\mathsf{V}, \mathbb{T})$ est acyclique : c'est une forêt, et en l'occurrence un arbre, et même un arbre couvrant. □

Nous voudrions maintenant déterminer la loi de $\mathbb{T}$ sur l'ensemble des arbres couvrants, c'est-à-dire évaluer, pour tout arbre couvrant T, la probabilité $\mathbb{P}(\mathbb{T} = T)$. Revenons pour cela à notre définition du sous-ensemble aléatoire $\mathbb{T}$, qui nous est donnée par (5) et (4). Nous devons nous donner une base orthonormée, disons $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $\operatorname{im} d$, où nous adoptons la notation $n = |\mathsf{V}| - 1$, et calculer

$$\mathbb{P}(\mathbb{T} = T) = \left| \det \left(\langle \alpha_i, e/\sqrt{x_e} \rangle \right)_{i \in [n], e \in T} \right|^2. \tag{8}$$

Un problème est que nous ne disposons pas d'une base orthonormée de $\operatorname{im} d$. Nous disposons néanmoins d'une famille simple de bases, qui va nous permettre de calculer cette probabilité.

Pour construire cette famille de bases, notons $\mathbb{1}_v$, pour tout sommet $v \in \mathsf{V}$, la fonction sur V qui vaut 1 en v et 0 ailleurs. Marquons un sommet v_0. La famille

$$\left(d(\mathbb{1}_v) : v \in \mathsf{V} \setminus \{v_0\} \right)$$

est une base de $\operatorname{im} d$, pas orthonormée en général, ni même orthogonale, mais une base tout de même. Elle dépend du choix de v_0, raison pour laquelle nous parlons d'une famille de bases.

Proposition 5.2. *Soit v_0 un sommet de V. On a*

$$\left| \det \left(\langle d(\mathbb{1}_v), e/\sqrt{x_e} \rangle \right)_{v \in \mathsf{V} \setminus \{v_0\}, e \in T} \right|^2 = \prod_{e \in T} x_e.$$

Démonstration. Un sommet v et une arête e étant donnés, le produit scalaire $\langle d(\mathbb{1}_v), e/\sqrt{x_e} \rangle$ est égal à $\pm\sqrt{x_e}$ si v est l'une des extrémités de e, et nul sinon.

Le déterminant qui nous intéresse est une somme indexée par les bijections entre $\mathsf{V} \setminus \{v_0\}$ et T, et seule une bijection qui à chaque sommet associe une arête qui lui est incidente donne une contribution non nulle. Or, en partant des feuilles de T, qui sont les sommets incidents à une unique arête de T, et en progressant itérativement vers la racine de T, on voit que la seule bijection qui contribue au déterminant est celle qui à chaque sommet v associe la première arête de l'unique chemin simple dans T joignant v à v_0. La contribution de cette permutation est

$$\pm \prod_{e \in T} \sqrt{x_e},$$

ce qui entraîne immédiatement le résultat. □

À cause du fait que la base que $\operatorname{im} d$ que nous avons choisi n'est pas orthonormée, cette proposition ne calcule la probabilité $\mathbb{P}(\mathbb{T} = T)$ qu'à une constante près, que nous allons déterminer. Notons $\mathcal{T}(\mathsf{G})$ l'ensemble des arbres couvrants de G.

1. Le « nombre de cycles » désigne ici le nombre de cycles linéairement indépendants, c'est-à-dire le rang du groupe abélien des cycles. Par exemple, pour un graphe en forme de thêta, ce nombre vaut 2.

Lemme 5.3. *Soit v_0 un sommet. On a*

$$\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathsf{G})}\prod_{e\in T} x_e = \det\big(\langle d(\mathbb{1}_v), d(\mathbb{1}_w)\rangle\big)_{v,w\in\mathsf{V}\setminus\{v_0\}}.$$

En particulier, ce nombre, qui est le carré du volume du cube de $\operatorname{im} d$ s'appuyant sur les vecteurs de la base $(d(\mathbb{1}_v) : v \in \mathsf{V}\setminus\{v_0\})$, ne dépend pas du choix du sommet v_0.

Démonstration. Prenons le carré de l'égalité

$$\det\big(\langle d(\mathbb{1}_v), e/\sqrt{x_e}\rangle\big)_{v\in\mathsf{V}\setminus\{v_0\},e\in T} = \pm\det\big(\langle d(\mathbb{1}_v), \alpha_j\rangle\big)_{v\in\mathsf{V}\setminus\{v_0\},j\in[n]}\det\big(\langle \alpha_i, e/\sqrt{x_e}\rangle\big)_{i\in[n],e\in T}$$

et sommons-le sur tous les $T\in\mathcal{T}(\mathsf{G})$. Grâce à l'égalité (8) et à la proposition 5.2, nous trouvons

$$\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathsf{G})}\prod_{e\in T} x_e = \Big|\det\big(\langle d(\mathbb{1}_v), \alpha_j\rangle\big)_{v\in\mathsf{V}\setminus\{v_0\},j\in[n]}\Big|^2.$$

Il ne reste plus qu'à reconnaître dans le membre de droite le déterminant de Gram de la famille $(d(\mathbb{1}_v) : v\in\mathsf{V}\setminus\{v_0\})$. □

Munissons $\mathbb{R}^{\mathsf{V}}$ du produit scalaire pour lequel la base $(\mathbb{1}_v : v\in\mathsf{V})$ est orthonormée. Grâce à cette structure supplémentaire, nous pouvons considérer l'adjoint d^* de l'opérateur d, et définir le laplacien

$$\Delta = d^* d.$$

Cet opérateur laisse stable le sous-espace $(\ker d)^\perp$ de $\mathbb{R}^{\mathsf{V}}$ formé des fonctions de moyenne nulle.

Théorème 5.4. *On a*

$$\det\big(\Delta_{|(\ker d)^\perp}\big) = |\mathsf{V}|\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathsf{G})}\prod_{e\in T} x_e \tag{9}$$

et, pour tout $T\in\mathcal{T}(\mathsf{G})$,

$$\mathbb{P}(\mathbb{T}=T) = |\mathsf{V}|\det\big(\Delta_{|(\ker d)^\perp}\big)^{-1}\prod_{e\in T} x_e.$$

Démonstration. D'après le lemme 5.3, le membre de droite de (9) est la somme de tous les mineurs principaux de taille $|\mathsf{V}|-1$ de la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{\mathsf{V}}$. C'est donc le produit des $|\mathsf{V}|-1$ valeurs propres non nulles de Δ, c'est-à-dire le déterminant de sa restriction à l'orthogonal de son noyau.

La deuxième assertion se déduit immédiatement de la première. □

L'arbre couvrant aléatoire $\mathbb{T}$ est donc l'arbre couvrant « uniforme » de G, et il est vraiment uniforme si tous les nombres x_e sont pris égaux à 1. Le fait que l'arbre couvrant uniforme d'un graphe fini soit un sous-ensemble déterminantal de l'ensemble de ses arêtes a été démontré par Pemantle [Pem91]. L'égalité (9), qui dit que le produit des valeurs propres non nulles du laplacien est égal au nombre d'arbres couvrants enracinés, est connue sous le nom de théorème « matrix-tree », et en général attribuée à Kirchhoff [Kir47].

6. Une identité multilinéaire

Pour conclure ce texte, nous allons montrer une identité qui fait écho à plusieurs des idées qui y ont été évoquées. Le contenu de cette section n'a pas été mentionné pendant l'exposé.

Considérons comme précédemment un graphe fini connexe $\mathsf{G}=(\mathsf{V},\mathsf{E})$. L'opérateur d envoie non seulement $\mathbb{R}^{\mathsf{V}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$, mais aussi $\mathbb{Z}^{\mathsf{V}}$ dans $\mathbb{Z}^{\mathsf{E}}$. L'image de $d:\mathbb{Z}^{\mathsf{V}}\to\mathbb{Z}^{\mathsf{E}}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^{\mathsf{E}}$, et plus précisément un sous-groupe abélien libre de rang $|\mathsf{V}|-1$.

Considérons un arbre couvrant T de G. Pour toute arête $e \in T$, le graphe $(\mathsf{V}, T \setminus \{e\})$ a exactement deux composantes connexes. Notons V_1 l'ensemble des sommets de celle qui contient l'extrémité de e, et notons

$$\kappa_T(e) = d(\mathbb{1}_{V_1}).$$

C'est un élément de $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$ qui, vu comme une fonction sur E, vaut 1 sur e et 0 sur toutes les autres arêtes de T.

Proposition 6.1. *Pour tout $T \in \mathcal{T}(\mathsf{G})$, la famille $(\kappa_T(e) : e \in T)$ est une base entière de $d(\mathbb{Z}^{\mathsf{V}})$.*

Ceci signifie que l'image par d de toute fonction à valeurs entières sur V s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de la famille $(\kappa_T(e) : e \in T)$.

Démonstration. Soit $\alpha = \sum_{e \in \mathsf{E}} \alpha_e e$ un élément de $d(\mathbb{Z}^{\mathsf{V}})$. Alors

$$\beta = \alpha - \sum_{e \in T} \alpha_e \kappa_T(e)$$

est un élément de $\operatorname{im} d$ qui est nul sur toutes les arêtes de T. Ainsi, si $f \in \mathbb{Z}^{\mathsf{V}}$ est tel que $\beta = df$, alors f a la même valeur en deux sommets quelconques reliés par un chemin dans T, donc f est constante, donc $\beta = 0$.

Ceci montre que la famille est génératrice. Pour voir qu'elle est libre, on écrit une combinaison linéaire

$$\sum_{e \in T} \lambda_e \kappa_T(e) = 0$$

et on observe que pour tout $e \in T$, le coefficient λ_e est la valeur sur l'arête e de cette somme, qui est nulle. $\square$

Au cours de cette démonstration, nous avons utilisé le fait suivant. Soit T un arbre couvrant. Notons Π_T la projection orthogonale sur E_T, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$ qui met à 0 toutes les composantes sur des arêtes qui n'appartiennent pas à T. Notons par ailleurs κ_T l'application qui à l'élément e de la base canonique de $\mathbb{R}^E$ associe $\kappa_T(e)$. Alors nous avons montré que

$$\big(\kappa_T \circ \Pi_T\big)_{|\operatorname{im} d} = \mathrm{id}_{\operatorname{im} d}. \tag{10}$$

Fixons maintenant une base entière arbitraire $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{|\mathsf{V}|-1})$ de $d(\mathbb{Z}^{\mathsf{V}})$. Donnons-nous aussi un ordre total sur l'ensemble E des arêtes de notre graphe. Pour tout arbre couvrant T, les bases β et $(\kappa(T, e) : e \in T)$ sont deux bases entières d'un même réseau, la deuxième base étant ordonnée par l'ordre total que nous venons de choisir sur E. La matrice de passage entre ces deux bases est donc une matrice inversible à coefficients entiers. Son déterminant est donc 1 ou -1, et nous le notons $\epsilon(\beta, T)$.

Enfin, pour toute partie $S = \{e_1 < \ldots < e_k\}$ de E, notons e_S l'élément $e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$ de l'algèbre extérieure $\bigwedge \mathbb{R}^{\mathsf{E}}$. (L'ordre sur E nous permet ici de lever une ambiguïté de signe.)

Proposition 6.2. *Dans $\bigwedge \mathbb{R}^{\mathsf{E}}$, on a l'égalité*

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_{|\mathsf{V}|-1} = \sum_{T \in \mathcal{T}(\mathsf{G})} \epsilon(\beta, T)\ e_T.$$

Démonstration. Posons $n = |\mathsf{V}| - 1$. Décomposons l'élément $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n$ de $\bigwedge^n \mathbb{R}^{\mathsf{E}}$ dans la base $(e_S : S \subset \mathsf{E}, |S| = n)$:

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n = \sum_{S \in \binom{\mathsf{E}}{n}} a_S\, e_S. \tag{11}$$

Considérons d'abord une partie S_0 de E qui n'est pas un arbre couvrant. Alors, en vertu de l'argument déjà utilisé dans la démonstration de la proposition 5.1, le graphe (V, S_0) n'est pas connexe. Notant comme précédemment V_1 une de ses composantes connexes, l'élément $d(\mathbb{1}_{V_1})$ est un élément non nul de $d(\mathbb{Z}^{\mathsf{V}})$, qui s'écrit donc comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de $\beta_1, \ldots, \beta_n$. On a donc $d(\mathbb{1}_{V_1}) = c_1\beta_1 + \ldots + c_n\beta_n$ et quitte à changer la numérotation, on peut supposer c_1 non nul. On a donc

$$d(\mathbb{1}_{V_1}) \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_n = c_1\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_n = c_1 \sum_{S \in \binom{\mathsf{E}}{n}} a_S \, e_S.$$

En appliquant $\bigwedge \Pi_{E_{S_0}}$ à chaque côté de cette égalité, on trouve

$$0 = c_1 a_{S_0} e_{S_0},$$

si bien que $a_{S_0} = 0$. Ainsi,

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n = \sum_{T \in \mathcal{T}(\mathsf{G})} a_T \, e_T.$$

Donnons-nous maintenant un arbre couvrant $T_0 = \{e_1 < \ldots < e_n\}$. En appliquant l'identité (10) pour l'arbre T_0 à notre décomposition de $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n$, nous trouvons

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n = a_{T_0} \kappa_{T_0}(e_1) \wedge \ldots \wedge \kappa_{T_0}(e_n).$$

Autrement dit, a_{T_0} est le déterminant du changement de base entre $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ et $(\kappa_{T_0}(e) : e \in T_0)$, c'est-à-dire $\epsilon(\beta, T_0)$. □

Cette identité et une autre tout à fait analogue sont à la base de l'étude menée dans [KL22b] de sous-graphes aléatoires déterminantaux d'un graphe fini connexe autres que des arbres couvrants, associés à des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$ plus gros ou plus petits que $\operatorname{im} d$.

7. Annexe : démonstration du théorème 4.2.

Commençons par donner une nouvelle expression du cosinus carré de l'angle entre deux sous-espaces, défini par (4). Nous travaillons dans l'espace euclidien E et adoptons la notation suivante : pour tout sous-espace F de E, nous notons Π_F la projection orthogonale sur F.

Lemme 7.1. *Soient F et G deux sous-espaces de E de même dimension. On a*

$$\cos^2(F, G) = \det(\Pi_F \Pi_G + \Pi_{F^\perp} \Pi_{G^\perp}).$$

Démonstration. Construisons une base orthonormée de E en juxtaposant des bases orthonormées de G et de $G^\perp$. Écrivons la matrice de Π_F dans cette base, en faisant apparaître sa structure 2×2 par blocs :

$$\Pi_F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Il découle de la définition (4) que $\cos^2(F, G) = \det A$. Il nous faut donc vérifier que

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A & -B \\ C & I - D \end{pmatrix}, \tag{12}$$

le membre de droite de cette égalité étant celui de l'égalité que nous cherchons à démontrer.

Le cas où $\det A = 0$ est particulier et nous aurions pu le traiter tout de suite. Dans ce cas, $\cos^2(F, G) = 0$, ce qui signifie que $F \cap G^\perp$ n'est pas nul. Or ce sous-espace est inclus dans le noyau de $\Pi_F \Pi_G + \Pi_{F^\perp} \Pi_{G^\perp}$. Ainsi, dans ce cas, les deux membres de l'égalité à démontrer sont nuls.

Supposons maintenant A inversible. Comme la matrice Π_F est de rang égal à la taille de A, les lignes de la matrice $\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}$ sont des combinaisons linéaires des lignes de la matrice $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$, et il nous suffit de regarder C pour savoir quelles sont ces combinaisons :

$$\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} = CA^{-1} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix},$$

égalité qui nous montre que $D = CA^{-1}B$. Il ne nous reste qu'à calculer le membre de droite de (12). Nous utilisons pour cela la formule du complément de Schur [2], et obtenons

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ C & I-D \end{pmatrix} = \det(A)\det(I - D + CA^{-1}B) = \det A,$$

ce qui conclut la démonstration. □

Ce lemme va nous permettre de faire un calcul qui nous donnera presque le théorème 4.2.

Proposition 7.2. *Soit u un endomorphisme de E. On a l'égalité*

$$\mathbb{E}[\det(\mathrm{id} + u\mathrm{P}_{\mathbb{X}})] = \det(\mathrm{id} + u\Pi_H).$$

Dans la démonstration qui suit, pour toute partie I de $[d]$ telle que $E = E_I \oplus H^\perp$, nous notons P_{E_I} la projection sur E_I parallèlement à $H^\perp$.

Démonstration. Par définition de la loi de $\mathbb{X}$ et d'après le lemme précédent, on a

$$\mathbb{E}[\det(\mathrm{id} + u\mathrm{P}_{\mathbb{X}})] = \sum_{I\in\binom{[d]}{n}} \det(\mathrm{id} + u\mathrm{P}_{E_I})\det(\Pi_H\Pi_{E_I} + \Pi_{H^\perp}\Pi_{E_I^\perp}).$$

Nous allons multiplier les déterminants, après avoir observé deux choses. D'abord, $\mathrm{P}_{E_I}\Pi_{H^\perp} = 0$, car $H^\perp$ est le noyau de P_{E_I}. Ensuite, $\mathrm{P}_{E_I}\Pi_H\Pi_{E_I} = \Pi_{E_I}$. En effet, sur $E_I^\perp$, ces deux endomorphismes sont nuls ; et si v est un vecteur de E_I, alors $\Pi_H v$ diffère de v par un vecteur de $H^\perp$, qui est dans le noyau de P_{E_I}, si bien que $\mathrm{P}_{E_I}\Pi_H v = \mathrm{P}_{E_I} v = v$. Nous trouvons donc, après une petite simplification,

$$\mathbb{E}[\det(\mathrm{id} + u\mathrm{P}_{\mathbb{X}})] = \sum_{I\in\binom{[d]}{n}} \det\big((u + \Pi_H)\Pi_{E_I} + \Pi_{H^\perp}\Pi_{E_I^\perp}\big).$$

Pour calculer le membre de droite, faisons l'observation suivante. Si a et b sont deux endomorphismes de E, et si t est une indéterminée, alors en écrivant les matrices de nos endomorphismes dans la base $(e_1, \dots, e_d)$ et en utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes, nous trouvons

$$\det(ta + b) = \sum_{I\subseteq[d]} t^{|I|}\det(a\Pi_{E_I} + b\Pi_{E_I^\perp}).$$

Ceci nous permet de calculer le membre de droite de notre dernière égalité : nous avons donc

$$\mathbb{E}[\det(\mathrm{id} + u\mathrm{P}_{\mathbb{X}})] = \text{ coefficient de } t^n \text{ dans } \det(t(u + \Pi_H) + \Pi_{H^\perp}).$$

Pour calculer ce dernier déterminant, écrivons les endomorphismes dans une nouvelle base de E formée en juxtaposant des bases orthonormées de H et $H^\perp$. Si dans cette base on a

$$u = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

alors $\mathbb{E}[\det(\mathrm{id} + u\mathrm{P}_{\mathbb{X}})]$ est le coefficient de t^n dans

$$\det\begin{pmatrix} t(1+A) & tB \\ tC & 1+tD \end{pmatrix}.$$

Ce coefficient vaut

$$\det(1 + A) = \det\begin{pmatrix} 1+A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} = \det(\mathrm{id} + u\Pi_H),$$

ce qui achève la démonstration. □

2. Cette formule se démontre (avec des notations locales) en prenant le déterminant de part et d'autre de l'égalité

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant conclure.

Démonstration du théorème 4.2. Soient $I = \{i_1 < \ldots < i_k\}$ et $J = \{j_1 < \ldots < j_k\}$ des parties de $[d]$ de même cardinal. Notons u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_d)$ a tous ses coefficients nuls, sauf

$$u_{j_1 i_1} = \ldots = u_{j_k i_k} = 1.$$

Introduisons à nouveau une indéterminée t, et calculons, grâce à la relation (2) et la formule de Cauchy–Binet,

$$\det(\mathrm{id} + tu\Pi_H) = \sum_{R,S \subseteq [d], |R|=|S|} t^{|R|} \det(u_{RS}) \det((\Pi_H)_{SR}).$$

Seules des parties R et S telles que $R \subseteq J$ et $S \subseteq I$ donnent des contributions éventuellement non nulles à cette somme, qui est donc un polynôme en t de degré au plus k. De plus, le coefficient de t^k est $\det((\Pi_H)_{IJ})$.

Un raisonnement analogue montre que le coefficient de t^k dans $\mathbb{E}[\det(\mathrm{id}+tu\mathrm{P}_{\mathbb{X}})]$ vaut $\mathbb{E}[\det(\mathrm{P}_{\mathbb{X}})_{IJ}]$, et la démonstration est complète. □

Références

[Kir47] Gustav Kirchhoff. Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. *Ann. Phys. und Chem.*, 72(12) :497–508, 1847.

[KL22a] Adrien Kassel and Thierry Lévy. Determinantal probability measures on Grassmannians. *Ann. Inst. Henri Poincaré D*, 9(4) :659–732, 2022.

[KL22b] Adrien Kassel and Thierry Lévy. Determinantal random subgraphs. 2022. arXiv:2212.06819.

[Lyo03] Russell Lyons. Determinantal probability measures. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (98) :167–212, 2003.

[Pem91] Robin Pemantle. Choosing a spanning tree for the integer lattice uniformly. *Ann. Probab.*, 19(4) :1559–1574, 1991.