3-2.1 Groupe « Analyse Non-Linéaire »

Productions scientifiques du groupe

• Optimisation, calcul des variations
(A. Chambolle, J. Dolbeault, M. J. Esteban, J. Lamboley, I. Mazari)

Au cours de ces années, les résultats les plus marquants obtenus par **A. Chambolle** sont les premiers résultats d'existence d'évolutions de surfaces par courbure cristalline quelconque en toute dimension, dans un cadre très général [A281, A282], et des résultats de compacité et de régularité garantissant l'existence de solutions au « problème de Griffith » de minimisation d'un déplacement élastique et d'une énergie de fracture [A273, A275, A277]. Il a également continué de développer des méthodes d'optimisation non lisse, notamment en travaillant sur l'optimisation des discrétisations de fonctionnelles singulières de type variation totale [A111, A284, A285].

J. Dolbeault et M. J. Esteban ont poursuivi un programme de recherches sur les méthodes d'entropie appliquées aux inégalités fonctionnelles. La principale nouveauté a consisté à les utiliser de manière systématique en conjonction avec des flots non-linéaires. Ces méthodes permettent d'aborder des problèmes laissés ouverts avec d'autres techniques, par exemple de démontrer des inégalités optimales, des inégalités améliorées avec termes de correction, des résultats de stabilité, des taux de convergence, des résultats de symétrie, etc. Il s'agit d'une thématique à l'interface entre analyse non-linéaire, physique mathématique, théorie spectrale, physique mathématique, théorie des probabilités et étude des semi-groupes, à forte visibilité internationale. Un projet ANR a joué un rôle crucial au niveau français (en particulier pour la formation de jeunes chercheurs, doctorants et post-doctorants). Comme articles de J. Dolbeault avec des étudiants, post-doctorants et collaborateurs sur ce sujet, on peut citer [A116, P47, A257]. Des publications relatives à ces aspects, souvent dans un cadre plus physique et qui sont des articles joints de J. Dolbeault et M. J. Esteban, avec des collaborateurs sont, par exemple, [A120, A371]. Récemment, avec A. Figalli, R. Frank et M. Loss, ils ont obtenu dans [P92] un résultat important sur la stabilité des inégalités de Sobolev et de Sobolev logarithmique, le premier dans son genre. Lorsqu'il était encore au Ceremade, **J. Lamboley** a entamé une collaboration internationale avec Eduardo Teixeira, spécialiste des questions de régularité de frontières libres. Ils ont débuté l'étude des problèmes de type « Alt-Caffarelli » lorsqu'on ajoute un poids singulier devant le terme de gradient. Dans cette situation il est nécessaire d'étudier la régularité de la fonction d'état à l'intersection de la frontière libre et de la zone de singularité, ce qu'ils ont accompli dans [A597].

L'une des contributions principales d'**I. Mazari** est l'analyse des contrôles optimaux dans les problèmes d'optimisation en écologie spatiale. Plus précisément, en collaboration avec G. Nadin et Y. Privat [A694], une nouvelle approche reposant sur des méthodes harmoniques a été introduite, qui permet de répondre dans des cas très généraux à la question suivante : si on impose des contraintes L^∞ sur les contrôles admissibles, les contrôles saturent-ils ces contraintes ? Sinon, que peut-on en dire? Cette nouvelle méthode spectrale a permis de répondre à plusieurs questions ouvertes en écologie spatiale. Son usage a été systématisé et, dans un cadre parabolique, a été couplé à une nouvelle procédure de développements multi-échelle sans séparation d'échelles. Un autre axe de recherche en développement est l'étude de problèmes de théorie des jeux en dynamique des populations, mené en collaboration avec D. Ruiz-Balet [A699]. Enfin, avec D. Ruiz-Balet, une nouvelle approche systématique des inégalités quantitatives en contrôle optimal a été proposée [A698].

• Transport optimal, transport de masse
(J.-D. Benamou, G. Carlier, P. Pegon, G. Turinici et l'équipe projet Mokaplan)

Le Transport Optimal standard a une formulation variationnelle dynamique naturelle : la minimisation de l'énergie cinétique d'un flot de densités de probabilité préservant la mesure avec densités initiales et finales prescrites. Il incarne la forme la plus simple d'un Mean-Field Games (MGFs) du premier ordre. Dans [A67, A68] **J.-D. Benamou** et ses collaborateurs ont proposé une relaxation de type Transport Optimal multi-marges et étendu les méthodes efficaces de régularisation entropique. La pénalisation entropique peut être interprétée comme ajoutant un bruit brownien au flot, modélisant un MFG du second ordre plus difficile à résoudre avec les méthodes de discrétisation classiques. Cette stratégie peut être adaptée pour calculer les flots Euler incompressibles généralisés, une relaxation du formalisme d'Arnold. Dans [A70] **J.-D. Benamou** et ses collaborateurs ont identifié une extension naturelle des conditions aux limites de type transport optimal pour les solutions de Brenier/Transport Optimal de l'équation de Monge-Ampère. On identifie aussi une propriété de surestimation locale pour une discrétisation de type différences finies qui permet de montrer la convergence au sens d'Aleksandrov, puis Brenier pour la duale. On obtient un algorithme optimal (linéaire) en dimension 2 pour cette classe de solutions.

Ces dernières années plusieurs résultats ont été obtenus par **G. Carlier** concernant la régularisation entropique du transport optimal multi-marges : la dépendance analytique des potentiels par rapport aux marges dans [A245], la convergence linéaire de l'algorithme de Sinkhorn dans [A237] et plus récemment l'obtention de taux de convergence optimaux pour des classes assez générales dans [P61] avec **P. Pegon** et L. Tamanini. Le lien avec le problème des ponts de Schrödinger a également permis de développer une nouvelle méthode numérique [A68] de flots incompressibles optimaux généralisés à la Brenier.

Dans un travail avec M. Colombo et co-auteurs [A320] **P. Pegon** a apporté une contribution qui conclut une série de travaux sur la stabilité (non-quantitative) en transport branché. La preuve repose sur des techniques de théorie géométrique de la mesure développées pour les *traffic plans*, similaires à ce qui est connu pour les 1-*courants*. Par ailleurs, avec A. Monteil, P. Pegon a étudié le phénomène de concentration de masse pour une vaste classe de fonctionnelles intégrales du premier ordre renormalisées [P172]. Il s'agit d'un résultat de Γ-convergence, qui repose notamment sur un argument de type concentration-compacité. Ils récupèrent en particulier le phénomène de concentration des fluides de Cahn-Hilliard en gouttelettes établi par Bouchitté, Dubs et Seppecher (1996, 1998).

Dans [A610] **G. Legendre** et **G. Turinici** ont obtenu diverses contributions en transport de masse.

• Traitement d'images et du signal, problèmes inverses
(L. Cohen, V. Duval, I. Waldspurger)

Les méthodes géodésiques sont au centre de la recherche de **L. Cohen** avec de nombreuses contributions, notamment avec l'utilisation de diverses métriques de Finsler permettant de résoudre des problèmes de segmentation d'images de manière plus robuste, aussi bien à l'aide de chemins les plus courts que par la carte de distance obtenue par propagation asymétrique selon ces métriques. La formulation par chemin minimal de la pénalisation de la courbure ou de terme région est une contribution majeure de cette période [A291, A293, A294, A315, Ch12, A656]. Parmi les nombreux autres travaux citons : la segmentation et le recalage d'arbre vasculaire cérébral en imagerie ultrasonore ultrarapide, en collaboration avec l'institut Langevin de l'ESPCI [C27]. Dans le cadre d'un contrat CIFRE, le recalage non rigide d'images de radiographie de véhicules par minimisation de fonctionnelle de déformation dans le but de la recherche d'armes ou de drogue [C54]; différents problèmes de traitement d'images couleurs, comme la correction d'images naturelles pour l'assemblage d'images [A805] ou l'homogénéisation de collections d'images, par analyse et transfert d'histogramme [A804]; l'apprentissage structuré pour les formes 3D définies comme des nuages de points [C45, C46]; la déformation géométrique d'objets dans des images basée sur les GAN, *Generative Adversarial Networks* [C41].

Dans [A263, A358], **V. Duval** et ses collaborateurs ont proposé deux algorithmes « sans grille » pour la reconstruction de sources ponctuelles par minimisation de la variation totale des mesures, dans le cadre notamment de la microscopie à super-résolution. Ils se sont appuyés sur l'algorithme Frank-Wolfe qui permet d'apporter des garanties de convergence, tout en entremêlant des étapes sans grille, non convexes. Cet algorithme est considéré comme l'état de l'art dans la communauté. Dans [A179, A402] l'on trouve un principe de représentation des solutions des problèmes variationnels, qui permet d'étendre ce type d'approche à des cadres plus généraux que les sources ponctuelles. Dans [A261], avec son doctorant R. Petit, ils ont proposé un algorithme de minimisation de la variation totale du gradient, qui ne souffre pas des problèmes de discrétisation habituels. Le théorème des représentants montre que les solutions sont des fonctions constantes par morceaux et l'algorithme ajoute itérativement des formes qui s'ajustent pour que l'itérée converge vers un minimiseur. Dans [P204], avec son post-doctorant R. Tovey, ils ont étudié un problème de reconstruction de trajectoires de sources ponctuelles (courbe en espace-temps). À nouveau, ils ont exploité la structure des solutions. Cette méthode est 100 fois plus rapide que l'état de l'art.

Les problèmes de reconstruction de phase consistent à reconstruire un vecteur à coordonnées complexes à partir du module de mesures linéaires. Les algorithmes les plus employés en pratique sont des heuristiques simples. Celles-ci peuvent *a priori* échouer à cause de la non-convexité des problèmes et renvoyer un « optimum local » au lieu de la solution cherchée, mais fonctionnent bien en pratique. Dans [A822] **I. Waldspurger** a démontré qu'une variante de la plus connue de ces heuristiques, dans un cadre assez simple, trouvait la solution avec grande probabilité. Ce résultat s'inscrit dans un foisonnement de travaux visant à établir des garanties de correction rigoureuses pour des algorithmes similaires. I. Waldspurger a également étudié les limites d'une heuristique largement employée, la factorisation de Burer-Monteiro, pour une classe plus générale de problèmes inverses, les problèmes de reconstruction de matrices de bas rang. Un résultat de Boumal, Voroninski et Bandeira garantissait que cette factorisation était correcte sous une hypothèse étonnamment forte. Dans [A823], I. Waldspurger a montré que cette hypothèse était nécessaire.

• Physique mathématique, mécanique statistique
(I. Catto, J. Dolbeault, M. J. Esteban, D. Gontier, M. Lewin, É. Séré)

Dans la prépublication [P64], **I. Catto** et **É. Séré**, en collaboration avec L. Meng et É. Paturel, ont prouvé l'existence d'un état fondamental pour les cristaux relativistes dans le cadre d'un modèle de Dirac-Fock périodique lorsque le nombre d'électrons par cellule n'est pas trop grand. Le modèle proposé et la preuve d'existence d'un état fondamental reposent sur la nouvelle définition de l'état fondamental de Dirac-Fock pour les atomes et les molécules due à É. Séré [P199]. Pour ce faire, ils ont adopté la méthode de rétraction introduite récemment dans [P199] dans un contexte périodique.

Dans [A424] **M. J. Esteban, M. Lewin et É. Séré** ont caractérisé de plusieurs manières la réalisation auto-adjointe naturelle de l'opérateur de Dirac-Coulomb et ont établi un principe variationnel pour ses valeurs propres en fonction de la charge du potentiel de Coulomb. Dans [A422] ils ont étendu ses résultats au cas d'un potentiel plus général pouvant correspondre à des modèles moléculaires, c'est-à-dire, le cas de potentiels avec plusieurs singularités ; dans [A423] ils ont formulé une conjecture : la première valeur propre positive de l'opérateur de Dirac-Coulomb en présence de Z protons est minimale lorsque les protons sont tous au même point. Ils ont donné des résultats partiels sur cette conjecture.

Dans une série d'articles [A441, Ch23, A491], **D. Gontier, M. Lewin** , F. Nazar (post-doctorant) et R. Frank (Caltech & Munich) ont étudié les minimiseurs de l'inégalité fermionique de Lieb-Thirring. Ils ont notamment démontré qu'un système à $2N$ particules pouvait toujours améliorer la constante obtenue avec un système à N particules. Leur résultat infirme en particulier une conjecture de Lieb et Thirring formulée en 1976. Ils ont proposé que le scénario optimal pour la meilleure constante est obtenue pour un arrangement infini périodique de particules.

Dans [A482, A483], **D. Gontier** a étudié le spectre d'opérateurs périodiques coupés. Dans cette situation, des modes de bords peuvent apparaître à la coupure, ce qui se traduit par la présence d'un spectre « de bord ». Il a notamment démontré que ce spectre de bord était dense lorsque la coupure était incommensurable avec la périodicité du système.

Le projet ERC Consolidator « Mathematics of Density Functional Theory » de **M. Lewin** (2017-2022) avait pour objectif l'étude de divers modèles Non-Linéaires intervenant en physique quantique et en mécanique statistique. Plusieurs résultats marquants ont été obtenus au sein de ce projet, certains ayant connu un accueil très positif en physique et en chimie quantique. Par exemple, l'article [A628] a fourni la première justification rigoureuse de l'approximation de densité locale, qui est la méthode de base en chimie quantique. Un autre exemple concerne la meilleure constante de l'inégalité de Lieb-Oxford qui intéresse fortement les chimistes car ils l'utilisent pour calibrer certains modèles. Dans [A625, A626], l'estimée sur cette constante a été grandement améliorée, en partie à l'aide de simulations numériques sur le cluster du Ceremade. Dans une autre direction, l'équation de Vlasov au voisinage d'une distribution uniforme de type Maxwell dans tout l'espace a été obtenue dans une limite semi-classique [A635] ce qui a permis de fournir la première preuve d'existence globale dans l'espace d'énergie relative.

Finalement, les mesures de Gibbs en dimension infinie font actuellement l’objet de multiples travaux en EDP et EDPS ; elles ont été obtenues pour la première fois dans une limite de type champ moyen dans [A631].

Dans [A495] en collaboration avec P. Gravejat, **M. Lewin** et **É. Séré** ont étudié le vide du champ des électrons-positrons de Dirac en la présence d’un champ magnétique fort lentement variable (limite semi-classique). Dans [A303] **M. Chupin**, M.-S. Dupuy, **G. Legendre** et **É. Séré** ont proposé une nouvelle méthode adaptative d’accéleration d’algorithmes itératifs, du type Anderson. Ils ont montré rigoureusement la convergence et l’accélèration pour cette méthode et l’ont testée sur des problèmes de chimie quantique.

Dans [A411] **I. Ekeland** et **É. Séré** ont introduit une nouvelle procédure itérative utilisant le principe variationnel d’Ekeland, pour résoudre des problèmes perturbatifs dont le linéarisé et son inverse « perdent des dérivées ». Cette alternative à la méthode de Nash-Moser permet de traiter des perturbations de plus grande taille.

• Systèmes dynamiques, mécanique céleste
(P. Bernard, A. Bounemoura, J. Féjoz, A. Florio)

Les outils introduits par **P. Bernard** et S. Suhr permettent d’élargir le cadre des résultats connus en relativité générale sur l’existence de fonctions temps. Ils fournissent aussi des outils utiles dans les contextes les plus classiques, comme celui des espaces temps globalement hyperboliques. Dans ce contexte, le nouveau concept de fonction temps uniforme est introduit dans [A80]. C’est une notion proche de la notion classique de fonction temps de Cauchy, mais plus facile à étudier. **P. Bernard** et S. Suhr ont précisé le lien entre ces deux notions, ce qui offre un outil efficace pour répondre à diverses questions d’existence de fonctions de Cauchy satisfaisant certaines contraintes.

Les propriétés des orbites périodiques pour un potentiel générique sont les mêmes que celle des géodésiques fermées pour une métrique générique. Les spécialistes du sujets pensaient il y a peu que ces propriétés se démontrent à peu près de la même façon. Toutefois, **P. Bernard** et S. Aslani ont mis à jour un certain nombre de fautes et d’omissions dans la littérature existante, qui ont largement réouvert le sujet. Dans un premier temps, dans [A40] ils ont corrigé une forme normale, essentielle dans les preuves, qui avait été énoncée (et démontrée) de manière incorrecte. La démonstration permet d’ailleurs d’étendre cette forme normale en dehors du cadre convexe dans un preprint soumis. Dans un second temps, P. Bernard a mis à jour une omission bien plus importante qui remet en question la validité des résultats, et appelle des travaux totalement nouveaux, lesquels sont en cours.

En collaboration avec **J. Féjoz** [A171, A172], **A. Bounemoura** a obtenu une extension de la théorie KAM (généralement restreinte aux cas des fonctions lisses ou analytiques) a des classes de régularités plus générales, sous des conditions arithmétiques adaptées. Plus récemment [A164], dans le cas particulier mais important des classes Gevrey, J. Féjoz a obtenu la condition arithmétique optimale. Toujours en théorie KAM, mais pour des Hamiltoniens en différentiabilité finie, il a amélioré [A165] la régularité minimale (de manière essentiellement optimale) nécéssaire pour avoir l’existence d’un ensemble de mesure positive de tores invariants. Enfin, avec B. Fayad et L. Niederman [A168, A170] ils ont étendu la théorie de Nekhoroshev au voisinage des points fixes elliptiques (et tores invariants) pour obtenir des résultats de stabilité en temps doublement exponentiel, sous des conditions génériques.

J. Féjoz a étudié des questions de théorie du contrôle (non-intégrabilité du problème de Kepler en temps minimum, nature des singularités des systèmes avec un contrôle affine en temps minimum) ; la théorie des perturbations en classes Gevrey ou ultra-différentiable, pour mieux comprendre la compétition entre la taille de la perturbation (mesurée en termes de croissance des dérivées) et l’arithmétique de la dynamique ou le temps de stabilité : le scattering classique dans le problème des N corps Newtonien ou Coulombien; et les variétés invariantes en dyamique conformément symplectique, une extension encore peu étudiée des systèmes conservatifs, qui inclut les systèmes mécaniques avec un frottement proportionnel à la vitesse (cette étude généralise en dimension quelconque une partie des résultats de Le Calvez obtenus dans les années 1980 sur les attracteurs de Birkhoff) et il a proposé une démonstration topologique d’existence de diffusion d’Arnold, sous des hypothèses très souples en vue d’applications à la mécanique céleste.

Dans [P104], **A. Florio** et U. Hryniewicz ont étudié des flots de Reeb dynamiquement convexes sur une sphère homologique 3-dimensionnelle : ils ont donné des conditions pour garantir que le flot soit lévogyre au sens de Ghys. Pour faire cela, ils ont précisé le lien entre indice de Maslov et nombre d'enlacement. Dans [P16] M.-C. Arnaud, A. Florio et V. Roos ont montré l'existence de mesures d'indice de Maslov nul, invariantes pour des difféomorphismes conformément symplectiques sur le fibré cotangent d'une variété compacte de dimension n. Dans [P105], A. Florio et M. Leguil ont étudié des questions de rigidité spectrale pour des flots 3-dimensionels. Dans [P27], P. Berger, A. Florio et D. Peralta-Salas ont montré qu'il existe un sous-ensemble non vide de champs de vecteurs Beltrami, c'est-à-dire des solutions stationnaires de l'équation d'Euler, qui sont universels (tout difféomorphisme conservative du disque peut être presque réalisé comme application de Poincaré de tels flots).

• Théorie du Contrôle, mécanique des fluides, analyse des systèmes hyperboliques
(O. Glass, B. Haspot, P. Lissy, B. Melinand, G. Turinici)

O. Glass et ses collaborateurs ont poursuivi leurs recherches sur la description de l'évolution de solides au sein d'un fluide parfait incompressible, en décrivant plus précisément le système et en particulier les interactions à distance entre solides [A480]. Lorsque la taille des solides devient petite on peut justifier un certain nombre de modèles de vortex classiques, comme le système des vortex massifs ou le « wave-vortex system » [A481, P122]. Dans le champ des systèmes hyperboliques 1D, **O. Glass** et ses collaborateurs ont poursuivi leurs recherches sur la mesure de l'effet « compactifiant » des lois de conservation (le fait qu'une boule soit envoyée sur un compact par le semi-groupe associé), ce qui permet de mesurer leur caractère irréversible. Dans [A33], le cas de lois de conservation non convexes est considéré. En matière de théorie du contrôle, **O. Glass** a étudié différentes questions sur la commandabilité des systèmes hyperboliques et des modèles fluide-solides. Concernant le contrôle des systèmes hyperboliques, il a obtenu un résultat de stabilisation asymptotique frontière pour une classe de ces systèmes, dans le cadre de solutions d'entropie; dans le cadre des systèmes fluide-solides, la question était de pouvoir contrôler l'évolution des solides par une action distante sur le fluide [A478, A479]. Par des méthodes de contrôle, O. Glass et ses collaborateurs ont obtenu un résultat de stabilité pour le système de Vlasov-Navier-Stokes [A712] décrivant le couplage entre un fluide et un spray. Enfin, un résultat de type stabilisation asymptotique a été obtenu pour un modèle de croissance de plantes [A32].

Dans [A655], **P. Lissy** et collaborateurs resolvent partiellement un problème ouvert posé par Fernandez-Cara *et al* en 2015, réputé difficile, en donnant un résultat de contrôle distribué optimal pour des systèmes généraux sous-actionnés d'équations de la chaleur avec couplage constant et diffusion non diagonalisable. La principale difficulté provient de la diffusion, qui empêche d'utiliser certaines méthodes usuelles. Notre démonstration repose sur la méthode spectrale de Lebeau-Robbiano et une nouvelle estimation du coût du contrôle pour certaines EDO paramétrisées. Dans [A652, A653], **P. Lissy** *et al* considèrent des EDP contrôlées d'évolution type ondes avec Laplacien usuel ou fractionnaire, semi-discrétisé en espace (il s'agit d'une approche dite discrète, qui a été beaucoup étudiée notamment par Ervedoza, Micu, Zuazua et d'autres auteurs). On obtient un système d'EDO contrôlable dont les contrôles explosent quand h tend vers 0, et on ne peut donc pas passer à la limite. Dans ces articles, ils ont notamment exhibé des classes quasiment optimales de filtrages des conditions initiales qui permettent de restaurer un coût du contrôle uniforme en h. La démonstration repose sur la méthode des moments, qui se ramène à construire des familles bi-orthogonales à certaines familles d'exponentielles complexes faisant intervenir les valeurs propres discrètes. Dans [A395], **P. Lissy** *et al* considèrent l'équation de Fokker-Planck avec pour contrôle le drift, supposé localisé en espace, qui n'avait essentiellement été étudiée que du point de vue du contrôle optimal par Fleig et Guglielmi. Ils démontrent un résultat général de contrôlabilité locale aux trajectoires, puis, sous certaines conditions algébriques, un même résultat quand le drift n'agit que dans certaines directions. Les principales nouveautés sont une nouvelle inégalité de Carleman faisant intervenir dans le membre de droite le gradient localisé, ainsi que l'utilisation de la méthode de résolubilité algébrique directement sur le problème adjoint pour le second résultat.

L'étude de propagation des vagues est un vieux problème physique. Il a connu un essor du point de vue mathématiques depuis les années 90 avec l'apparition de résultats d'existence local et la justification de premiers modèles asymptotiques. La littérature mathématique est globalement centrée sur le cas dit d'eau peu profonde (modèle type Saint-Venant). L'angle d'attaque de **B. Melinand** est de se concentrer sur le cas de la haute mer. Les techniques mathématiques qu'il utilise sont des méthodes d'estimations d'énergie couplées à des estimations de dispersions : [P97, A702]. Concernant la stabilité d'ondes, B. Melinand a concentré ses recherches sur le cas de l'intervalle et le cas périodique. Le cas d'un domaine borné est très peu étudié, principalement à cause des effets de bords et rien que sur l'intervalle, beaucoup de choses restent à faire. **B. Melinand** et ses collaborateurs montrent enfin que si le profil est linéaire stable, alors il est non-linéairement stable : [P24, A703].

G. Turinici a publié plusieurs articles en contrôle quantique sur la robustesse du contrôle, partie critique des utilisations envisagées notamment en ordinateur quantique; en gros il s'agit de traiter de manière numérique la variabilité quantique modélisée par des lois de proba ou l'hétérogénéité du matériaux (avec Y. Fu, ancienne thésarde, avec H. Rabitz ou individuellement) : [A446, A813].

• Équations de Hamilton-Jacobi, équations totalement non-linéaires
(P. Cardaliaguet, P.-L. Lions)

Le principal résultat obtenu dans la période par **P. Cardaliaguet** en analyse est l'homogénéisation stochastique d'équations de courbure moyenne [A36] : il s'agit d'un des premiers résultats concernant l'homogénéisation d'équations de Hamilton-Jacobi avec un Hamiltonien non convexe. Cet article introduit des méthodes quantitatives nouvelles, qui seront reprises dans de nombreux travaux.

Les principaux résultats en analyse non-linéaire de **P.-L. Lions** sur la période sont les suivants. Dans une monographie avec C. Le Bris, il a généralisé la théorie de « di Perna-Lions » à des équations paraboliques dégénérées et à coefficients discontinus. Il a montré (avec X. Blanc et C. Le Bris) l'existence de correcteurs pour des équations elliptiques, à coefficients périodiques en espace perturbés par des défauts localisés : voir [A105] pour les équations sous forme divergence et [A106] pour les équations de type advection-diffusion. Il a obtenu (avec B. Seeger et P. Souganidis) de nouveaux résultats d'existence pour des équations de Hamilton-Jacobi stochastiques (sous forme « pathwise ») et discuté des relations entre la régularité du « path » et la régularité de la solution : les résultats reposent sur des techniques fines d'interpolation. Finalement, avec P. Souganidis, il a également prouvé de nouveaux résultats de comportement en temps long de ces équations.

• Équations cinétiques avec applications à la biologie et aux sciences sociales
(É. Bouin, J. Dolbeault, A. Frouvelle, S. Mischler, D. Tonon)

É. Bouin a recherché des taux de propagation précis dans des modèles non locaux qui découlent très naturellement de la modélisation des invasions biologiques. Il a montré avec Henderson et Ryzhik que dans l'équation dite non locale de Fisher-KPP, suivre précisément la position du front implique le taux de décroissance du noyau à l'infini. Ensuite, sur la question des accélérations de fronts, il a prouvé de manière quantitative avec Henderson et Ryzhik que l'équation entièrement non locale des crapauds buffles présente un phénomène d'accélération. Dans un article écrit avec Mouhot [A161], É. Bouin a proposé un cadre unifié et général pour étudier les approximations fluides des équations cinétiques linéaires dans l'espace complet. Finalement, il a travaillé sur l'extension de la méthode dite de Dolbeault-Mouhot-Schmeiser (DMS). Son travail (voir [A154, A156] à ce sujet est d'expliquer comment modifier et étendre l'approche DMS à des situations pour lesquelles certains ou même tous les ingrédients qui lui sont nécessaires ne sont pas disponibles. Cela se produit par exemple lorsque le confinement spatial est faible, tuant l'inégalité de Poincaré dans l'espace.

J. Dolbeault a travaillé sur les méthodes d'hypocoercivité L^2 : dans un cadre de régularité naturelle pour le type d'équations cinétiques considérées, la flexibilité de ces méthodes a permis de caractériser des taux de convergence dans des situations très diverses, avec ou sans confinement, pour des équilibres locaux de différents type, avec des limites diffusives classiques ou fractionnaires, qui permet une classification à peu près complète des taux de convergence avec des estimations du bon ordre de grandeur (pour les benchmarks).

La série d'articles [A350, A351, A352] concerne la dérivation de nouveaux modèles fluides pour des systèmes d'alignement de particules auto-propulsées avec une interaction d'alignement de corps rigides, modélisés par des matrices de rotation (ou des quaternions unitaires).

La méthode des invariants collisionnels généralisés, adaptée dans le cadre de $SO(3)$, permet d'obtenir la bonne limite d'échelle sur une équation cinétique n'ayant *a priori* pas suffisamment de quantités conservées. L'étude du comportement en temps long de l'équation cinétique (de type BGK) homogène en espace correspondante a été faite dans le cadre du doctorat d'A. Diez (dont **A. Frouvelle** est co-directeur de thèse) : l'article [A348] décrit de façon fine le phénomène de transition de phase du premier ordre, en se basant (grâce aux quaternions unitaires) sur un lien entre ce modèle et un modèle d'alignement de suspensions de polymères, généralisé en dimension 4. Dans [Ch24] **A. Frouvelle** a pu obtenir le comportement en temps long pour le modèle original de Fokker–Planck, via des techniques d'entropie relative par rapport à des états hors équilibre.

Dans [A154, A255, A565] **S. Mischler** et ses collaborateurs montrent des estimations quantitives sous exponentielles de retour vers l'équilibre pour les solutions d'une équation de Fokker-Planck avec confinement faible, pour les solutions de l'équation de Landau associée au potentiel de Coulomb et pour les solutions d'équations cinétiques sans confinement qui correspondent à des situations sans trou spectral. Les preuves reposent entre autres sur des techniques de factorisation.

Dans [A86, P62] sont montrées des estimations d'hypo-coercivité dans deux situations de confinement réaliste (confinement par un potentiel extérieur, confinement par reflection au bord d'un domaine) pour l'équation de Boltzmann linéarisé. Les preuves reposent essentiellement sur des méthodes de perturbations/torsions de la norme de dissipation dégénérée.Ces travaux sont donc des contributions au « programme de C. Vilani » (IHP 2001) de preuves constructives du retour à l'équilibre pour des EDP linéaires et non-linéaires. **É. Bouin** et **J. Dolbeault** s'intéressent également à cette question.

Avant de quitter le Ceremade, dans [A501] **D. Tonon** en collaboration avec Y. Guo, C. Kim et A. Trescases a étudié la régularité des solutions de l'équation de Boltzmann dans un domaine borné strictement convexe. Ce cadre est particulièrement difficile à étudier car les solutions présentent des singularités concentrées au bord rasant. Grâce à des estimations d'entropie, qui reposent sur des estimations pour l'opérateur de collision et sur une analyse fine des traces, ils ont démontré des estimations de Sobolev $W^{1,p}$ pour $1 < p < 2$, pour la solution de Boltzmann avec réflexion diffusive au bord. Dans [A306], avec M. Cirant, D Tonon a considéré un système MFG avec un couplage local, décroissant et non borné. Dans ce cadre, l'existence des solutions peut être montrée via un processus de convexification (à l'aide des techniques variationnelles), mais la perte d'unicité des solutions est possible. Dans [A493], avec P.J. Graber, A. R. Mészáros, et F.J. Silva, **D. Tonon** a exploité la formulation variationnelle des MFG pour étudier le problème de planification, c'est-à-dire le problème de transport dans lequel ils prescrivent la densité de population initiale et finale, plutôt que le coût final d'un joueur. Ils ont prouvé l'existence et l'unicité des solutions pour ce problème ainsi que des estimations de Sobolev. Dans [A524], avec F. Hérau et I. Tristani, D ; Tonon a étudié le problème de Cauchy et la stabilité exponentielle pour l'équation de Boltzmann non homogène. Cet article améliore les résultats précédents sur la théorie de Cauchy pour cette équation car on considère des grands espaces. Finalement, dans [P6, P7], avec Y. Achdou, G. Carlier et Q. Petit (doctorant de 2018 à 2022), D. Tonon a étudié les interactions entre le marché du travail et les marchés de l'immobilier locatif pour les professionnels et pour les particuliers via des modèles économiques pour lesquels on montre l'existence et l'unicité des équilibres.

• Phénomènes d'explosion dans les EDP, équations dispersives
(N. Nouaili)

Dans un travail récement soumis en collaboration avec G.K.Duong et H.Zaag [P100], **N. Nouaili** s'est intéressée à l'élaboration d'une nouvelle technique qui utilise la modulation pour construire une solution explosive *flat* de type I pour l'équation de la chaleur non-linéaire.

• Calcul scientifique, analyse numérique
(M. Chupin, G. Legendre, O. Mula, J. Salomon, G. Turinici)

Des travaux numériques et de calcul ont été cités dans les paragraphes précédents. Ci-dessous nous complétons ces informations.

Un des principaux résultat de **M. Chupin** est son travail en collaboration avec M-S Dupuy (LJLL), **G. Legendre** et **É. Séré** sur l'accélération d'Anderson-Pulay, méthode d'accélération pour résolution de problème par méthode de point fixe. Ce travail a donné lieu à [A303], où est prouvée, dans un cadre abstrait et très général et sous des hypothèses naturelles, la convergence locale et l'accélération de deux variantes de l'accélération classique d'Anderson. Ces résultats s'appliquent à la technique DIIS pour les problèmes de calcul d'état fondamental en chimie quantique. Ainsi, au travers d'expériences numériques dans le contexte de la chimie quantique, il est montré que les deux variantes adaptatives présentent une convergence plus rapide qu'un schéma standard à profondeur fixe et nécessitent en moyenne moins d'effort de calcul par itération.

G. Legendre et **G. Turinici** ont proposé l'un des premiers schémas variationnels pour les flots de gradients dans des espaces métriques [A610], basé sur une méthode implicite de Runge–Kutta et constituant une alternative au schéma de Jordan-Kinderlehrer-Otto. **G. Legendre** et **J. Salomon** ont travaillé sur l'analyse de convergence unifiée et générale de la méthode des réflexions [A604], une méthode de décomposition de frontière initialement introduite par Smoluchowski pour l'hydrodynamique et redécouverte indépendamment plusieurs fois dans différents domaines. En collaboration, **G. Legendre** a enfin réalisé des simulation numériques illustrant des résultats théoriques pour plusieurs modèles de dynamique des populations faisant notamment intervenir des non-linéarités et des opérateurs de diffusion non-locaux, en utilisant des méthodes d'éléments finis [A121, A160] ou des méthodes de différences finies basées sur des formules de quadrature adaptées aux noyaux de diffusion [P44].

Dans la problématique des problèmes inverses, et avant son départ du Ceremade, **O. Mula** a travaillé sur le développement d'une théorie complète sur les algorithmes optimaux d'estimation d'état. Les algorithmes sont optimaux au sens où ils donnent la meilleure reconstruction possible étant donné les mesures d'observation fournies. La théorie peut se comprendre comme une voie alternative aux méthodes bayésiennes, qui souffrent très vite de la malédiction de la dimension, et pour lesquelles il n'est pas possible de prouver que les algorithmes utilisés sont optimaux. O. Mula a utilisé cette théorie à une panoplie d'applications : problèmes inverses en hémodynamique, en neutronique, en pollution. Ces résultats ont attiré l'attention à l'international. Ils ont été développés dans une série d'articles, le plus marquant étant [A314]. Concernant les schémas adaptatifs de résolution d'EDP, O. Mula a travaillé sur le développement d'un algorithme parareel adaptatif [A667] et celui d'un schéma de résolution adaptatif de l'équation de Boltzmann linéaire qui apparaît en neutronique [A341]. Finalement, dans le cadre des techniques de réduction de modèle : développement de schémas Non-Linéaires pour des équations de conservation basés sur des barycentres de Wasserstein [A405].

Pendant cette période, **G. Turinici** a continué son travail numérique sur les « Mean Field Games » avec applications diverses [A414, A810] : l'algorithme de convergence numérique vers la solution [A811] a nécessité un investissement théorique assez conséquent (équations d'évolution sur les espaces métriques généraux) et est original en ce qui concerne le traitement d'une équation à potentiel dépendant du temps. G. Turinici a également fait des contributions numériques dans ce qu'on appelle maintenant *machine learning* : il s'intéresse aux aspects numériques des réseaux dits « génératifs » (stabilités, utilisation des métriques particulières qui donnent une convergence plus aisée etc) [C5, C13, C70, C71, A812] ou statistique numérique plus générale [P211].

Dans le cadre des travaux sur des modèles d'épidémiologie des chercheurs du Ceremade lors de la période de l'épidémie de Covid-19, **G. Turinici** a travaillé sur des questions liées à la vaccination avec F. Salvarani [A793], ou plus récemment, [A810], avec **J. Dolbeault** [A378, A379]; avec A. Danchin et collaborateurs [P80, A311, A343, A344, A345]; avec R. Elie et É. Hubert [A414]. L'originalité a été de proposer très tôt des approches basées sur des modèles à inspiration biologique et génétique; deux des travaux, notamment celui du début 2020 sur la transmission par d'autres voies que celles « classiques » et celui sur l'immunité (le fait que les paramètres immunologiques lors de la réinfection changent [A344, A345]) ont été confirmés plus tard par des validations empiriques et font partie du bagage de connaissances standard du domaine.