1-3.1 Groupe thématique « Analyse Non-Linéaire » (ANL)

Thèmes de recherche

L'optimisation et le **calcul des variations** sont très présents au Ceremade sous différents aspects, analytique et numérique, dans des contextes très variés : optimisation de forme dans le cadre de problèmes à frontière libre, d'objets géométriques (interfaces, discontinuités dans des cristaux) et optimisation des problèmes convexes non-lisses associés ; optimisation en écologie spatiale, sujet actif au niveau international (notamment en Amérique et en Asie). Ces travaux ont conduit à l'étude de la stabilité pour les problèmes de contrôle ainsi qu'à des problèmes de théorie des jeux ; finalement l'utilisation de nouvelles méthodes d'entropie ont facilité l'étude des inégalités fonctionnelles, leurs meilleures constantes et optimiseurs, ainsi que plus récemment, leur stabilité quantitative. (A. Chambolle, J. Dolbeault, M. J. Esteban, J. Lamboley, I. Mazari).

Le transport optimal et le **transport de masse**, avec la modélisation, l'analyse et la simulation numérique de problèmes de transport optimal multi-marges liés à des flots de densités préservant la mesure et/ou minimisant leur énergie cinétique. Le transport entropique dans le cadre de problèmes inverses issus de la physique; la stabilité (non quantitative) en transport branché; le transport de masse (vision numérique des schémas d'intégration d'ordre élevé); la régularisation entropique et les flots gradients dans la théorie du transport optimal, etc. (J.-D. Benamou, G. Carlier, P. Pegon, G. Turinici et l'équipe projet Mokaplan).

Le traitement d'images et du signal et l'**étude de problèmes inverses** sont des thématiques traditionnelles au Ceremade, avec la proposition récente de nouvelles méthodes pour la segmentation d'objets à l'aide de modèles déformables et de chemins minimaux géodésiques, et l'étude de problèmes inverses issues du traitement du signal et des images pour la reconstruction d'un objet d'intérêt à partir d'un certain nombre d'observations : quels algorithmes permettent de résoudre quels problèmes inverses non-convexes ? (L. Cohen, V. Duval, I. Waldspurger).

Un autre domaine de recherche traditionnel au Ceremade est **la physique mathématique**, contenant en particulier la **mécanique statistique**, avec l'étude des modèles issus de la mécanique quantique, des applications en matière condensée (modèles périodiques), en chimie quantique (équation de Schrödinger et de Dirac pour les atomes et les molécules) ou en physique statistique (gaz de Coulomb, transport optimal). L'étude du Hamiltonien de Dirac-Coulomb en physique atomique et moléculaire avec des résultats très complets, mais aussi la génération de conjectures importantes dans un cadre moléculaire relativiste; le modèle de champ moyen pour le vide de Dirac; l'étude d'un modèle de Dirac-Fock périodique pour les cristaux relativistes, avec la première preuve de l'existence d'un état fondamental. Ce programme de recherche est basé sur l'utilisation de méthodes variationnelles, l'étude d'équations et de systèmes d'EDP linéaires et non-linéaires, la théorie spectrale, l'algorithmique et le calcul. (I. Catto, J. Dolbeault, M. J. Esteban, D. Gontier, M. Lewin, É. Séré).

L'analyse des **systèmes dynamiques** et la **mécanique céleste** occupe une équipe du Ceremade qui travaille sur l'étude des propriétés des orbites périodiques d'un système Hamiltonien pour un potentiel générique, que la communauté pensait résolues ; sur une nouvelle approche pour l'étude des relations de causalité en relativité générale; sur la théorie du contrôle (non-intégrabilité du problème de Kepler en temps minimum, nature des singularités des systèmes avec un contrôle affine en temps minimum) ; sur la théorie des perturbations en classes Gevrey ou ultra-différentiable; sur le scattering classique dans le problème des N corps Newtonien ou Coulombien; sur les variétés invariantes en dynamique conformément symplectique, avec une extension encore peu étudiée des systèmes conservatifs. L'étude des phénomènes de stabilité des perturbations de systèmes Hamiltoniens intégrables, telles que la théorie KAM (existence de solutions quasi-périodiques) et la théorie de Nekhoroshev (stabilité des solutions en temps fini mais long) et l'étude de la dynamique symplectique, dynamique de contact, questions de rigidité, dynamique des flots d'Euler stationnaires et dynamique topologique sont aussi présentes au Ceremade. Finalement, une nouvelle démonstration topologique d'existence de diffusion d'Arnold, sous des hypothèses très souples en vue d'applications à la mécanique céleste a également été proposée récemment. (P. Bernard, A. Bounemoura, J. Féjoz, A. Florio).

Au Ceremade la **théorie du Contrôle** est très présente en relation avec l'étude des problèmes en **mécanique des fluides** et l'**analyse des systèmes hyperboliques.** Font partie des thématiques de recherche de ce groupe l'analyse des modèles fluides-solides et leur évolution ainsi que l'étude de la limite lorsque les solides sont très petits et l'étude de la propagation de vagues en haute mer, où des effets dispersifs apparaissent couplés à des non-linéarités fortes. On trouve aussi une recherche intense sur les questions de la contrôlabilité de systèmes d'EDP (équation de la chaleur avec éventuellement termes non locaux, de Schrödinger, des ondes) sous-actionnés en prenant en compte des questions de robustesse et de contraintes sur l'état, importantes dans les applications. Également des méthodes de discrétisation en espace de problèmes de contrôle, l'enjeu étant de raffiner et de généraliser des méthodes de filtrages. Par rapport aux questions de stabilité et stabilisation, réalisation d'une étude sur la stabilisation d'équations aux dérivées partielles paraboliques dégénérées, ainsi que sur des questions de non-contrôlabilité de systèmes d'EDO affines avec dérive en présence de deux contrôles, et leurs applications à des modèles de micro-nageurs magnétisés et sur la stabilité des ondes pour des EDP provenant de la mécanique des fluides (comme l'équation de Navier-Stokes ou des systèmes de réaction-diffusion). Finalement, des travaux sur le contrôle quantique sont toujours présents au Ceremade. (O. Glass, B. Haspot, P. Lissy, B. Melinand, G. Turinici).

Ces dernières années l'étude des **équations de Hamilton-Jacobi** et des **équations totalement non-linéaires** a été souvent liée au Ceremade au développement récent et important de la théorie des jeux à champ moyen. Mais on y trouve aussi des recherches liées à des questions d'homogénéisation d'équations de Hamilton-Jacobi en milieu aléatoire; au passage micro-macro dans des modèles de trafic routier; aux équations de Hamilton-Jacobi sur des jonctions ; au comportement en temps long d'équations de Hamilton-Jacobi ou de réaction-diffusion stochastiques ; à la régularité de solutions d'équations de Hamilton-Jacobi stochastiques ; au caractère bien-posé d'équations paraboliques dégénérées avec coefficients discontinus ; à des problèmes de correcteur en homogénéisation d'équations elliptiques avec défauts et à des problèmes de conditions initiales et de conditions au bord pour des lois de conservation scalaires. (P. Cardaliaguet, P.-L. Lions).

Un autre type de recherche en EDP au Ceremade concerne **l'étude des équations cinétiques avec des applications à la biologie et aux sciences sociales.** Sont considérées des questions d'analyse asymptotique quantitative pour des EDP linéaires à l'aide d'estimations d'hypo-coercivité L^1 et L^2 et de techniques de semi-groupes, permettant, par exemple, le calcul d'un taux de convergence vers des solutions asymptotiques en temps grand ou aussi le développement de techniques d'hypo-coercivité pour des équations avec équilibres microscopiques et macroscopiques faiblement confinants. D'autres recherches ont consisté à étudier des phénomènes de propagation dans des équations de réaction-diffusion (ou assimilées) locales et non-locales, et notamment les phénomènes d'accélération; des modèles de particules auto-propulsées pour l'étude de l'alignement de corps rigides ; les méthodes de contraction L^1 inspirées des techniques de couplage probabiliste dans des cas difficiles : présence de plusieurs invariants de collisions dans un confinement « réaliste » d'une part, absence de trou spectral d'autre part. Finalement des résultats nouveaux de régularité des solutions l'équation de Boltzmann, dans le cadre des domaines bornés ont été prouvés. (É. Bouin, J. Dolbeault, A. Frouvelle, S. Mischler, D. Tonon).

Dans le cadre de l'étude des **phénomènes d'explosion dans les EDP**, des résultats ont été obtenus pour l'équation complexe de Ginzburg. (N. Nouaili).

Les activités de **calcul scientifique et analyse numérique** sont souvent liées à l'une ou plusieurs des thématiques de recherche citées ci-dessus, mais nous faisons le choix de les singulariser pour mieux montrer leur importance au niveau du Ceremade. On trouve ainsi le développement de méthodes numériques d'accélération de résolution de problèmes issus de la chimie quantique; d'algorithmes optimaux pour résoudre des problèmes inverses, de certains schémas parallèles et adaptatifs de résolution d'EDP et des méthodes Non-Linéaires de réduction de modèle; la résolution numérique des équations de transport radiatif (dans le cadre d'un contrat CEA) ; des travaux sur la méthode des réflexions : cette méthode, qui consiste à résoudre itérativement un problème aux limites dans un domaine « troué », en ne résolvant que des problèmes à un « trou ». Basée sur une décomposition des bords du domaine, elle est particulièrement bien adaptée aux méthodes d'élément de frontière. Il y a eu également des études numériques d'optimisation de forme autour des problèmes de minimisation ou maximisation de périmètre et de volume sous certaines contraintes ; une recherche d'algorithmes constituant une alter- native à la méthode de Nash-Moser ; des méthodes numériques pour l'étude de matériaux, les propriétés des isolants topologiques et des transitions de phase dans des modèles de gaz d'électrons. Dans un domaine très différent, en Mécanique céleste, production (non achevée) d'une bibliothèque Python autour du problème des N -corps, mais aussi le travail d'exploration numérique sur certaines configurations du problème des 4 corps. (M. Chupin, I. Ekeland, J. Féjoz, J. Lamboley, G. Legendre, O. Mula, J. Salomon, É. Séré, G. Turinici).

Finalement, **des travaux de modélisation et calcul en épidemiologie** ont été développés au moment de l'épidémie de Covid-19, et ils ont occupé un certain nombre de chercheurs au Ceremade, entre autres, certains analystes (J. Dolbeault, G. Turinici).

[…]