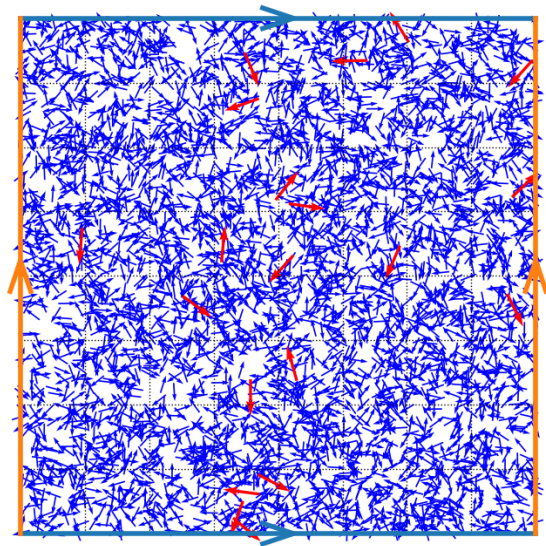


Modèles d'alignement de type saut au point-milieu et dynamiques de populations sexuées

Amic Frouvelle – CEREMADE – Université Paris Dauphine PSL

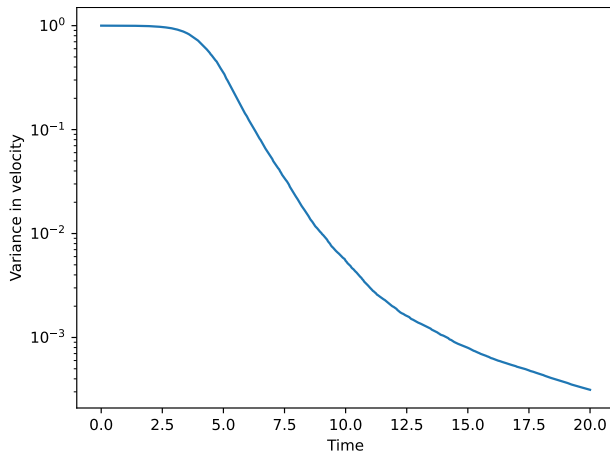
Travaux en collaboration avec Pierre Degond, Gaël Raoul, Cécile Taing

Séminaire de Mathématiques Appliquées, Nantes, 5 décembre 2023



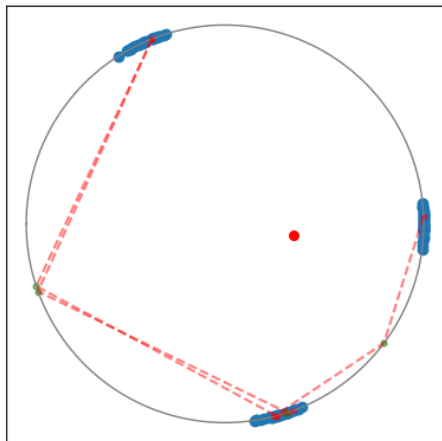
1. Bertin, Droz, Grégoire, *Phys. Rev. A*, 2006 [BDG06]

Motivation : particules autopropulsées, modèle BDG (sans bruit) ¹

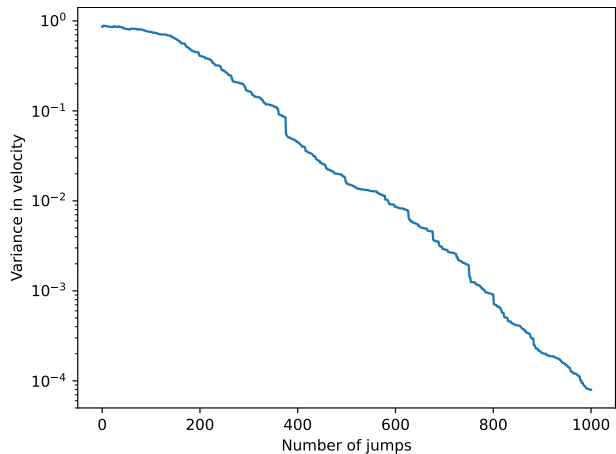


1. Bertin, Droz, Grégoire, *Phys. Rev. A*, 2006 [BDG06]

Version homogène en espace : processus de saut sur le cercle



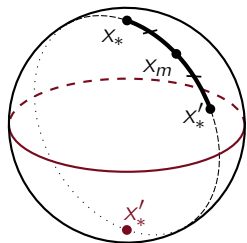
Version homogène en espace : processus de saut sur le cercle



Noyau de collision $K(\cdot, x_*, x'_*) = \delta_{x_m}$, où $x_m = \frac{x_* + x'_*}{\|x_* + x'_*\|}$:

Évolution en temps d'une mesure de probabilité f

$$\partial_t f(t, x) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S}} K(x, x_*, x'_*) f(t, x_*) dx_* f(t, x'_*) dx'_* - f(t, x).$$

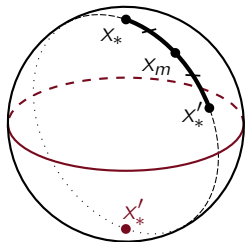


2. Degond, F, Raoul, *J. Stat. Phys.*, 2014 [DFR14]

Noyau de collision $K(\cdot, x_*, x'_*) = \delta_{x_m}$, où $x_m = \frac{x_* + x'_*}{\|x_* + x'_*\|}$:

Évolution en temps d'une mesure de probabilité f

$$\partial_t f(t, x) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S}} K(x, x_*, x'_*) f(t, x_*) dx_* f(t, x'_*) dx'_* - f(t, x).$$



Version à plat, dans \mathbb{R}^d : particules « sticky », modèles d'économie^{3, 4, 5}.

- Conservation du centre de masse $\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^d} x f(x) dx$.
- EDO linéaire pour le 2nd moment $m_2 = \int_{\mathbb{R}^d} |x - \bar{x}|^2 f(x) dx$: $\frac{d}{dt} m_2 = -\frac{m_2}{2}$.
- Convergence exponentielle vers une masse de Dirac : $W_2(f, \delta_{\bar{x}}) = W_2(f_0, \delta_{\bar{x}}) e^{-\frac{t}{4}}$.

2. Degond, F, Raoul, *J. Stat. Phys.*, 2014 [DFR14]

3. Bisi, Carrillo, Toscani, *J. Stat. Phys.*, 2005 [BCT05]

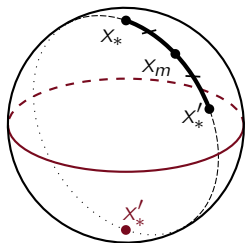
4. Pareschi, Toscani, *J. Stat. Phys.* 2006 [PT06]

5. Matthes, Toscani, *J. Stat. Phys.* 2008 [MT08]

Noyau de collision $K(\cdot, x_*, x'_*) = \delta_{x_m}$, où $x_m = \frac{x_* + x'_*}{\|x_* + x'_*\|}$:

Évolution en temps d'une mesure de probabilité f

$$\partial_t f(t, x) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S}} K(x, x_*, x'_*) f(t, x_*) dx_* f(t, x'_*) dx'_* - f(t, x).$$



Version à plat, dans \mathbb{R}^d : particules « sticky », modèles d'économie^{3, 4, 5}.

- Conservation du centre de masse $\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^d} x f(x) dx$.
- EDO linéaire pour le 2nd moment $m_2 = \int_{\mathbb{R}^d} |x - \bar{x}|^2 f(x) dx$: $\frac{d}{dt} m_2 = -\frac{m_2}{2}$.
- Convergence exponentielle vers une masse de Dirac : $W_2(f, \delta_{\bar{x}}) = W_2(f_0, \delta_{\bar{x}}) e^{-\frac{t}{4}}$.

Comment se débarrasser de \bar{x} ? L'énergie $E(f) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y|^2 f(x) dx f(y) dy$ vaut en fait $2m_2$!

2. Degond, F, Raoul, *J. Stat. Phys.*, 2014 [DFR14]
3. Bisi, Carrillo, Toscani, *J. Stat. Phys.*, 2005 [BCT05]
4. Pareschi, Toscani, *J. Stat. Phys.* 2006 [PT06]
5. Matthes, Toscani, *J. Stat. Phys.* 2008 [MT08]

Se débarrasser de la non-conservation du centre de masse ?

- Energie : $E(f) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S}} d(x, y)^2 f(x) dx f(y) dy$.

Lemme utile : lien Énergie – Wasserstein (+ inégalités de Markov autour de \bar{x})

Pour $f \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$, il existe $\bar{x} \in \mathbb{S}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{S}$:

$$W_2(f, \delta_{\bar{x}})^2 \leq E(f) \leq 4 W_2(f, \delta_x)^2.$$

De plus, pour tout $\kappa > 0$ (et $\ell = 0$ ou 1) : $\int_{\{x \in \mathbb{S}; d(x, \bar{x}) \geq \kappa\}} |d(x, \bar{x})|^\ell f(x) dx \leq \frac{1}{\kappa^{2-\ell}} E(f)$.

Se débarrasser de la non-conservation du centre de masse ?

- Énergie : $E(f) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S}} d(x, y)^2 f(x) dx f(y) dy.$

Lemme utile : lien Énergie – Wasserstein (+ inégalités de Markov autour de \bar{x})

Pour $f \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$, il existe $\bar{x} \in \mathbb{S}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{S}$:

$$W_2(f, \delta_{\bar{x}})^2 \leq E(f) \leq 4 W_2(f, \delta_x)^2.$$

De plus, pour tout $\kappa > 0$ (et $\ell = 0$ ou 1) : $\int_{\{x \in \mathbb{S}; d(x, \bar{x}) \geq \kappa\}} |d(x, \bar{x})|^\ell f(x) dx \leq \frac{1}{\kappa^{2-\ell}} E(f).$

- Évolution de l'énergie : $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(f) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}} \alpha(x_*, x'_*, y) df(x_*) df(x'_*) df(y).$

Se débarrasser de la non-conservation du centre de masse ?

- Energie : $E(f) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S}} d(x, y)^2 f(x) dx f(y) dy$.

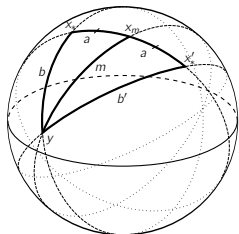
Lemme utile : lien Énergie – Wasserstein (+ inégalités de Markov autour de \bar{x})

Pour $f \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$, il existe $\bar{x} \in \mathbb{S}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{S}$:

$$W_2(f, \delta_{\bar{x}})^2 \leq E(f) \leq 4 W_2(f, \delta_x)^2.$$

De plus, pour tout $\kappa > 0$ (et $\ell = 0$ ou 1) : $\int_{\{x \in \mathbb{S}; d(x, \bar{x}) \geq \kappa\}} |d(x, \bar{x})|^\ell f(x) dx \leq \frac{1}{\kappa^{2-\ell}} E(f)$.

- Évolution de l'énergie : $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(f) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}} \alpha(x_*, x'_*, y) df(x_*) df(x'_*) df(y)$.



- Configuration d'Apollonius : $\alpha(x_*, x'_*, y) = m^2 - \frac{b^2 + b'^2}{2}$.

Se débarrasser de la non-conservation du centre de masse ?

- Energie : $E(f) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S}} d(x, y)^2 f(x) dx f(y) dy.$

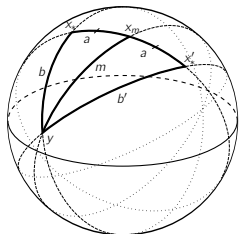
Lemme utile : lien Énergie – Wasserstein (+ inégalités de Markov autour de \bar{x})

Pour $f \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$, il existe $\bar{x} \in \mathbb{S}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{S}$:

$$W_2(f, \delta_{\bar{x}})^2 \leq E(f) \leq 4 W_2(f, \delta_x)^2.$$

De plus, pour tout $\kappa > 0$ (et $\ell = 0$ ou 1) : $\int_{\{x \in \mathbb{S}; d(x, \bar{x}) \geq \kappa\}} |d(x, \bar{x})|^\ell f(x) dx \leq \frac{1}{\kappa^{2-\ell}} E(f).$

- Évolution de l'énergie : $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(f) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}} \alpha(x_*, x'_*, y) df(x_*) df(x'_*) df(y).$



- Configuration d'Apollonius : $\alpha(x_*, x'_*, y) = m^2 - \frac{b^2 + b'^2}{2}.$
- Estimations globale et locale (pour des distances toutes inférieures à κ) :

$$\alpha(x_*, x'_*, y) \leq -\frac{1}{4} d(x_*, x'_*)^2 + \begin{cases} 2 d(x_*, x'_*) \min(d(x_*, y), d(x'_*, y)) \\ C \kappa^2 d(x_*, x'_*)^2. \end{cases}$$

- On coupe l'intégrale triple selon un κ -voisinage de \bar{x} :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(f) \leq -\frac{1}{4} E(f) + \underbrace{C \kappa^2 E(f)}_{\text{lemme local}} + \underbrace{12 \frac{E(f)^{\frac{3}{2}}}{\kappa} + 24 \frac{E(f)^2}{\kappa^2}}_{\substack{\text{lemme global + Markov} \\ \text{(et Cauchy-Schwarz)}}}.$$

- On coupe l'intégrale triple selon un κ -voisinage de \bar{x} :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(f) \leq -\frac{1}{4} E(f) + \underbrace{C \kappa^2 E(f)}_{\text{lemme local}} + \underbrace{12 \frac{E(f)^{\frac{3}{2}}}{\kappa} + 24 \frac{E(f)^2}{\kappa^2}}_{\substack{\text{lemme global + Markov} \\ \text{(et Cauchy-Schwarz)}}}.$$

- Même style de découpage pour montrer que $\bar{x}(t)$ vérifie le critère de Cauchy (en $t \rightarrow \infty$) et converge au même taux que $\sqrt{E(f)}$.

- On coupe l'intégrale triple selon un κ -voisinage de \bar{x} :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(f) \leq -\frac{1}{4} E(f) + \underbrace{C \kappa^2 E(f)}_{\text{lemme local}} + \underbrace{12 \frac{E(f)^{\frac{3}{2}}}{\kappa} + 24 \frac{E(f)^2}{\kappa^2}}_{\substack{\text{lemme global + Markov} \\ \text{(et Cauchy-Schwarz)}}}.$$

- Même style de découpage pour montrer que $\bar{x}(t)$ vérifie le critère de Cauchy (en $t \rightarrow \infty$) et converge au même taux que $\sqrt{E(f)}$.

Théorème : stabilité locale des masses de Dirac [DFR14]

Il existe $C_1 > 0$ et $\eta > 0$ telles que pour toute solution $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}(\mathbb{S}))$ avec condition initiale f_0 vérifiant $W_2(f_0, \delta_{x_0}) < \eta$ pour un $x_0 \in \mathbb{S}$ donné, il existe $x_\infty \in \mathbb{S}$ tel que

$$W_2(f(t, \cdot), \delta_{x_\infty}) \leq C_1 W_2(f_0, \delta_{x_0}) e^{-\frac{1}{4}t}.$$

Stabilité non-linéaire des masses de Dirac

- On coupe l'intégrale triple selon un κ -voisinage de \bar{x} :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(f) \leq -\frac{1}{4} E(f) + \underbrace{C \kappa^2 E(f)}_{\text{lemme local}} + \underbrace{12 \frac{E(f)^{\frac{3}{2}}}{\kappa} + 24 \frac{E(f)^2}{\kappa^2}}_{\substack{\text{lemme global + Markov} \\ \text{(et Cauchy-Schwarz)}}}.$$

- Même style de découpage pour montrer que $\bar{x}(t)$ vérifie le critère de Cauchy (en $t \rightarrow \infty$) et converge au même taux que $\sqrt{E(f)}$.

Théorème : stabilité locale des masses de Dirac [DFR14]

Il existe $C_1 > 0$ et $\eta > 0$ telles que pour toute solution $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}(\mathbb{S}))$ avec condition initiale f_0 vérifiant $W_2(f_0, \delta_{x_0}) < \eta$ pour un $x_0 \in \mathbb{S}$ donné, il existe $x_\infty \in \mathbb{S}$ tel que

$$W_2(f(t, \cdot), \delta_{x_\infty}) \leq C_1 W_2(f_0, \delta_{x_0}) e^{-\frac{1}{4}t}.$$

Question ouverte : est-ce que toute solution converge soit vers une masse de Dirac, soit vers l'état isotrope (éventuellement sur une sphère de dimension inférieure) ?

Stabilité non-linéaire des masses de Dirac

- On coupe l'intégrale triple selon un κ -voisinage de \bar{x} :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(f) \leq -\frac{1}{4} E(f) + \underbrace{C \kappa^2 E(f)}_{\text{lemme local}} + \underbrace{12 \frac{E(f)^{\frac{3}{2}}}{\kappa} + 24 \frac{E(f)^2}{\kappa^2}}_{\substack{\text{lemme global + Markov} \\ \text{(et Cauchy-Schwarz)}}}.$$

- Même style de découpage pour montrer que $\bar{x}(t)$ vérifie le critère de Cauchy (en $t \rightarrow \infty$) et converge au même taux que $\sqrt{E(f)}$.

Théorème : stabilité locale des masses de Dirac [DFR14]

Il existe $C_1 > 0$ et $\eta > 0$ telles que pour toute solution $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}(\mathbb{S}))$ avec condition initiale f_0 vérifiant $W_2(f_0, \delta_{x_0}) < \eta$ pour un $x_0 \in \mathbb{S}$ donné, il existe $x_\infty \in \mathbb{S}$ tel que

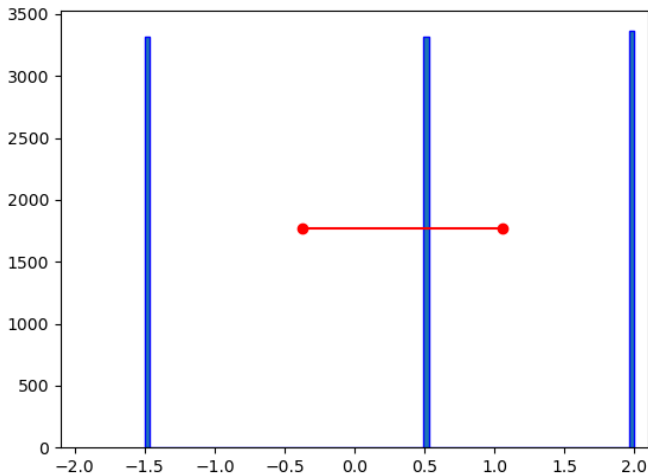
$$W_2(f(t, \cdot), \delta_{x_\infty}) \leq C_1 W_2(f_0, \delta_{x_0}) e^{-\frac{1}{4}t}.$$

Question ouverte : est-ce que toute solution converge soit vers une masse de Dirac, soit vers l'état isotrope (éventuellement sur une sphère de dimension inférieure) ?

Extensions : autres variétés (avec conditions sur la courbure), ou modèle ne sautant pas exactement au milieu (mais contractant quand même).

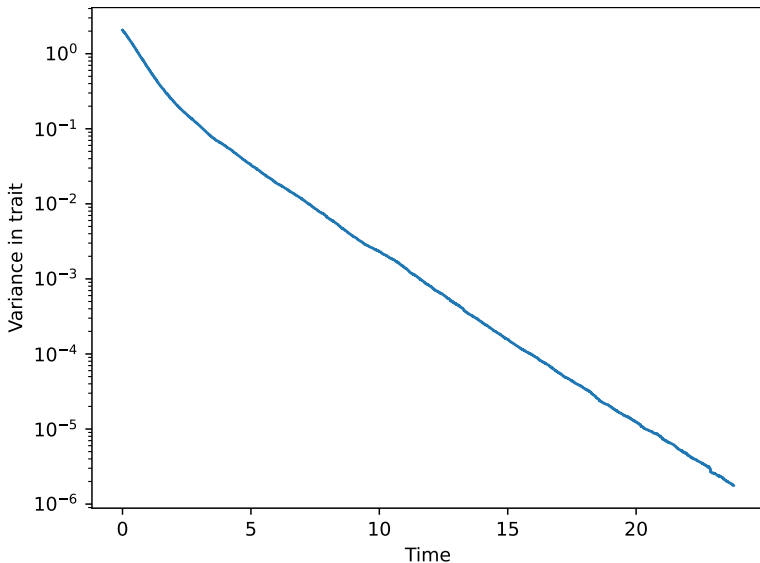
Retour à un modèle sur \mathbb{R} : dynamique des populations

- À taux N , reproduction : parents de traits x, x_* , descendant de trait $\frac{x+x_*}{2}$, remplaçant aléatoirement un autre individu.
- À taux $m(x)$ un individu de trait x meurt (remplacé par un doublon aléatoire).

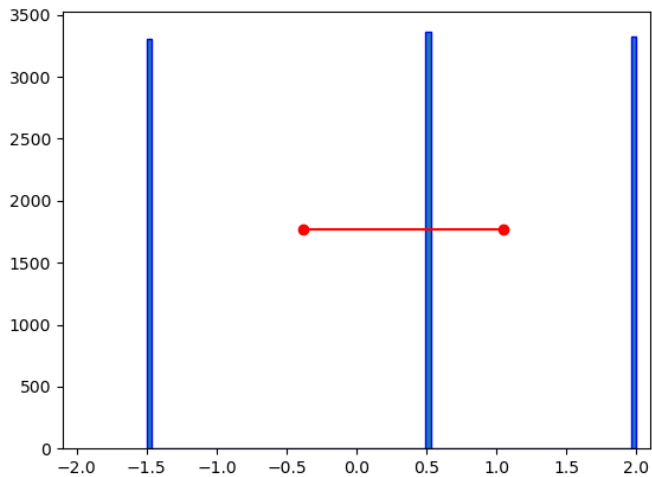


Retour à un modèle sur \mathbb{R} : dynamique des populations

- À taux N , reproduction : parents de traits x, x_* , descendant de trait $\frac{x+x_*}{2}$, remplaçant aléatoirement un autre individu.
- À taux $m(x)$ un individu de trait x meurt (remplacé par un doublon aléatoire).



La forme auto-similaire de la distribution



Un modèle de population sexuée^{7, 8} (avec variabilité gaussienne de variance ε)

Densité de population $f(t, x)$ structurée par le trait $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) = B_\varepsilon[f(t, \cdot)](x) - m(x)f(t, x), \\ B_\varepsilon[f](x) := \iint_{\mathbb{R}^2} G_{\frac{z_1+z_2}{2}, \varepsilon}(x) f(z_1) \frac{f(z_2)}{\int_{\mathbb{R}} f(z') dz'} dz_1 dz_2. \end{cases}$$

Notre contribution⁶ : pas de variabilité ($\varepsilon = 0$). Modèle point-milieu avec mortalité non-constante (pas de conservation de masse, ni de centre de masse après normalisation).

6. AF, Taing, *arXiv :2307.12735*, 2023+ [FT23]

7. Calvez, Garnier, Patout, *J. Éc. Polytech., Math.*, 2019 [CGP19]

8. Guerand, Hillairet, Mirrahimi *arXiv :2309.09567*, 2023+ [GHM23]

Un modèle de population sexuée^{7, 8} (avec variabilité gaussienne de variance ε)

Densité de population $f(t, x)$ structurée par le trait $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) = B_\varepsilon[f(t, \cdot)](x) - m(x)f(t, x), \\ B_\varepsilon[f](x) := \iint_{\mathbb{R}^2} G_{\frac{z_1+z_2}{2}, \varepsilon}(x) f(z_1) \frac{f(z_2)}{\int_{\mathbb{R}} f(z') dz'} dz_1 dz_2. \end{cases}$$

Notre contribution⁶ : pas de variabilité ($\varepsilon = 0$). Modèle point-milieu avec mortalité non-constante (pas de conservation de masse, ni de centre de masse après normalisation).

Existence et unicité de solutions à valeur mesure [FT23]

Si m est mesurable, bornée inférieurement, alors solution unique de $\partial_t f = B_0[f] - mf$:

$$\int_A f(t, x) dx = \int_A e^{-m(x)t} f^0(x) dx + \int_0^t \int_A e^{-m(x)(t-s)} B_0[f(s, \cdot)](x) dx ds.$$

Basé sur un point fixe en variation totale (B_0 est 3-Lipschitz).

6. AF, Taing, *arXiv :2307.12735*, 2023+ [FT23]

7. Calvez, Garnier, Patout, *J. Éc. Polytech., Math.*, 2019 [CGP19]

8. Guerand, Hillairet, Mirrahimi *arXiv :2309.09567*, 2023+ [GHM23]

Le cas où le taux de mortalité est constant : $m = 1$

- Si $m = 1$ ($\varepsilon = 0$), résultats connus⁹.
- Conservation de la masse et du centre de masse. On a déjà $m_2(t) = m_2(0)e^{-\frac{1}{2}t}$: convergence exponentielle vers une masse de Dirac.
- Après normalisation, $f \rightsquigarrow \gamma$ est centrée réduite.
- Fourier particulièrement utile : $\widehat{B_0[\gamma]}(\xi) = \widehat{\gamma}(\frac{\xi}{2})^2$. Utilisation de distance type Fourier (pour $s \in (2, 3)$) :

$$d_s(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{\xi \neq 0} \frac{|\widehat{\gamma}_1(\xi) - \widehat{\gamma}_2(\xi)|}{|\xi|^s}.$$

9. par exemple Pareschi, Toscani, *J. Stat. Phys.* 2006 [PT06]

Le cas où le taux de mortalité est constant : $m = 1$

- Si $m = 1$ ($\varepsilon = 0$), résultats connus⁹.
- Conservation de la masse et du centre de masse. On a déjà $m_2(t) = m_2(0)e^{-\frac{1}{2}t}$: convergence exponentielle vers une masse de Dirac.
- Après normalisation, $f \rightsquigarrow \gamma$ est centrée réduite.
- Fourier particulièrement utile : $\widehat{B_0[\gamma]}(\xi) = \widehat{\gamma}(\frac{\xi}{2})^2$. Utilisation de distance type Fourier (pour $s \in (2, 3)$) :

$$d_s(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{\xi \neq 0} \frac{|\widehat{\gamma}_1(\xi) - \widehat{\gamma}_2(\xi)|}{|\xi|^s}.$$

Équation contractante pour γ (B_0 est 2^{1-s} -Lipschitz pour d_s , seulement $\frac{1}{2}$ -Lipschitz pour W_2)

$$\partial_t \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}(t, \frac{\xi}{2})^2 - \widehat{\gamma}(t, \xi) + \frac{1}{4} \xi \partial_\xi \widehat{\gamma}(t, \xi).$$

Pour $\lambda_s = 1 - \frac{s}{4} - 2^{1-s} (> 0)$, et pour deux solutions :

$$d_s(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq d_s(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) e^{-\lambda_s t}.$$

En fait, un (unique) état stationnaire explicite $\gamma_\infty(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)^2}$ (à queue lourde). Et donc convergence vers ce profil d'autosimilarité !

9. par exemple Pareschi, Toscani, *J. Stat. Phys.* 2006 [PT06]

Mortalité m non-constante : stabilité locale des masses de Dirac

Densité de proba $g = \frac{1}{\rho}f$, centre de masse $\bar{x}(t)$.

Quantité clé (positive si pas trop de mortalité) : $\eta(\bar{x}) = \inf_{\mathbb{R}} m + \frac{1}{2} - m(x)$.

Mortalité m non-constante : stabilité locale des masses de Dirac

Densité de proba $g = \frac{1}{\rho} f$, centre de masse $\bar{x}(t)$.

Quantité clé (positive si pas trop de mortalité) : $\eta(\bar{x}) = \inf_{\mathbb{R}} m + \frac{1}{2} - m(x)$.

Évolution des moments centrés M_2 et M_4 of g

Hypothèse : m localement Lipschitz, à croissance au plus quadratique.

Si $\eta(\bar{x}_0) > \delta_0 > 0$, et M_4^0 petit, alors :

$$\eta(\bar{x}(t)) \geq \delta_0, \quad M_2(t) \leq M_2^0 e^{-\delta_0 t}, \quad M_4(t) \leq M_4^0 e^{-\delta_0 t}.$$

De plus $\bar{x}(t)$ converge exponentiellement vite vers un $\bar{x}_\infty \in \mathbb{R}$. Donc si g est proche d'une masse de Dirac en \bar{x}_0 (pour W_4), elle converge vers une masse de Dirac mass située proche de \bar{x}_0 .

Mortalité m non-constante : stabilité locale des masses de Dirac

Densité de proba $g = \frac{1}{\rho} f$, centre de masse $\bar{x}(t)$.

Quantité clé (positive si pas trop de mortalité) : $\eta(\bar{x}) = \inf_{\mathbb{R}} m + \frac{1}{2} - m(x)$.

Évolution des moments centrés M_2 et M_4 of g

Hypothèse : m localement Lipschitz, à croissance au plus quadratique.

Si $\eta(\bar{x}_0) > \delta_0 > 0$, et M_4^0 petit, alors :

$$\eta(\bar{x}(t)) \geq \delta_0, \quad M_2(t) \leq M_2^0 e^{-\delta_0 t}, \quad M_4(t) \leq M_4^0 e^{-\delta_0 t}.$$

De plus $\bar{x}(t)$ converge exponentiellement vite vers un $\bar{x}_\infty \in \mathbb{R}$. Donc si g est proche d'une masse de Dirac en \bar{x}_0 (pour W_4), elle converge vers une masse de Dirac mass située proche de \bar{x}_0 .

Malheureusement, ce n'est pas assez précis pour obtenir la convergence vers un profil autosimilaire...

$$\frac{d}{dt} M_{2k} \leq \left(-1 + \frac{1}{2^{2k-1}} + \varepsilon\right) M_{2k} + \left(\frac{1}{2^{2k}} \sum_{\ell=2}^{2k-2} \binom{2k}{\ell}\right) M_2 M_{2k-2} + \begin{cases} C_\varepsilon M_{2k+2} \\ \left(\frac{1}{2} - \delta_0\right) M_{2k} \end{cases}.$$

Mortalité m non-constante : stabilité locale des masses de Dirac

Densité de proba $g = \frac{1}{\rho} f$, centre de masse $\bar{x}(t)$.

Quantité clé (positive si pas trop de mortalité) : $\eta(\bar{x}) = \inf_{\mathbb{R}} m + \frac{1}{2} - m(x)$.

Évolution des moments centrés M_2 et M_4 of g

Hypothèse : m localement Lipschitz, à croissance au plus quadratique.

Si $\eta(\bar{x}_0) > \delta_0 > 0$, et M_4^0 petit, alors :

$$\eta(\bar{x}(t)) \geq \delta_0, \quad M_2(t) \leq M_2^0 e^{-\delta_0 t}, \quad M_4(t) \leq M_4^0 e^{-\delta_0 t}.$$

De plus $\bar{x}(t)$ converge exponentiellement vite vers un $\bar{x}_\infty \in \mathbb{R}$. Donc si g est proche d'une masse de Dirac en \bar{x}_0 (pour W_4), elle converge vers une masse de Dirac mass située proche de \bar{x}_0 .

Malheureusement, ce n'est pas assez précis pour obtenir la convergence vers un profil autosimilaire...

$$\frac{d}{dt} M_{2k} \leq \left(-1 + \frac{1}{2^{2k-1}} + \varepsilon \right) M_{2k} + \left(\frac{1}{2^{2k}} \sum_{\ell=2}^{2k-2} \binom{2k}{\ell} \right) M_2 M_{2k-2} + \begin{cases} C_\varepsilon M_{2k+2} \\ \left(\frac{1}{2} - \delta_0 \right) M_{2k} \end{cases}.$$

Améliorations sur les taux : si un moment suffisamment grand est initialement fini, alors M_{2k} a un taux presque $\min\left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}, \frac{1}{2} + \delta_0\right)$.

Pourquoi on a besoin d'estimations plus précises sur les moments

Équation perturbée : $\partial_t \widehat{\gamma}(t, \xi) = \widehat{\gamma}(t, \frac{\xi}{2})^2 - \widehat{\gamma}(t, \xi) + \frac{1}{4} \xi \partial_\xi \widehat{\gamma}(t, \xi) + R(t, \xi)$.

Proposition : contrôle du reste R implique convergence vers l'auto-similarité.

On fixe $s \in (2, 3)$, on pose $\lambda_s = 1 - \frac{s}{4} - 2^{1-s}$ (positif par concavité).

Supposons l'existence de $K > 0$ et $c > 0$ avec $|R(t, \xi)| \leq |\xi|^s K e^{-ct}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tout temps t , $d_s(\gamma, \gamma_\infty)(t) \leq d_s(\gamma_0, \gamma_\infty) e^{-\lambda_s t} + K \frac{e^{-ct} - e^{-\lambda_s t}}{\lambda_s - c}$.

Pourquoi on a besoin d'estimations plus précises sur les moments

Équation perturbée : $\partial_t \widehat{\gamma}(t, \xi) = \widehat{\gamma}(t, \frac{\xi}{2})^2 - \widehat{\gamma}(t, \xi) + \frac{1}{4} \xi \partial_\xi \widehat{\gamma}(t, \xi) + R(t, \xi)$.

Proposition : contrôle du reste R implique convergence vers l'auto-similarité.

On fixe $s \in (2, 3)$, on pose $\lambda_s = 1 - \frac{s}{4} - 2^{1-s}$ (positif par concavité).

Supposons l'existence de $K > 0$ et $c > 0$ avec $|R(t, \xi)| \leq |\xi|^s K e^{-ct}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tout temps t , $d_s(\gamma, \gamma_\infty)(t) \leq d_s(\gamma_0, \gamma_\infty) e^{-\lambda_s t} + K \frac{e^{-ct} - e^{-\lambda_s t}}{\lambda_s - c}$.

On a $|R(t, \xi)| \leq \begin{cases} \frac{5}{2} \left(\alpha \sqrt{\frac{M_4}{M_2}} + \beta \frac{M_4}{M_2} \right) |\xi|^2 \\ \left(\alpha \frac{M_4}{M_2^{\frac{3}{2}}} + \beta \frac{\sqrt{M_4 M_6}}{M_2^{\frac{3}{2}}} \right) |\xi|^3 \end{cases}$, il nous faut une borne inférieure pour $M_2 \dots$

Pourquoi on a besoin d'estimations plus précises sur les moments

Équation perturbée : $\partial_t \widehat{\gamma}(t, \xi) = \widehat{\gamma}(t, \frac{\xi}{2})^2 - \widehat{\gamma}(t, \xi) + \frac{1}{4} \xi \partial_\xi \widehat{\gamma}(t, \xi) + R(t, \xi)$.

Proposition : contrôle du reste R implique convergence vers l'auto-similarité.

On fixe $s \in (2, 3)$, on pose $\lambda_s = 1 - \frac{s}{4} - 2^{1-s}$ (positif par concavité).

Supposons l'existence de $K > 0$ et $c > 0$ avec $|R(t, \xi)| \leq |\xi|^s K e^{-ct}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tout temps t , $d_s(\gamma, \gamma_\infty)(t) \leq d_s(\gamma_0, \gamma_\infty) e^{-\lambda_s t} + K \frac{e^{-ct} - e^{-\lambda_s t}}{\lambda_s - c}$.

On a $|R(t, \xi)| \leq \begin{cases} \frac{5}{2} \left(\alpha \sqrt{\frac{M_4}{M_2}} + \beta \frac{M_4}{M_2} \right) |\xi|^2 \\ \left(\alpha \frac{M_4}{M_2^{\frac{3}{2}}} + \beta \frac{\sqrt{M_4 M_6}}{M_2^{\frac{3}{2}}} \right) |\xi|^3 \end{cases}$, il nous faut une borne inférieure pour $M_2 \dots$

Proposition : borne inférieure pour M_2 si le profil est « rétracté ».

Si $\frac{M_{2k_0}}{M_2}$ est initialement petit (avec $\frac{1}{2^{2k_0-1}} < \delta_0$), alors il décroît à taux $(\delta_0 - \frac{1}{2^{2k_0-1}})$.

De plus, dans ce cas, $M_2(t) \geq C_{k_0} M_2^0 e^{-\frac{t}{2}}$ (avec $C_{k_0} \rightarrow 1$ lorsque $\frac{M_{2k_0}^0}{M_2^0} \rightarrow 0$).

Par conséquent, pour tout $k \geq 2$ (avec $k \leq k_0$), $\frac{M_{2k}}{M_2}$ décroît à taux $\min(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2k-1}}, \delta_0 - \frac{1}{2^{2k_0-1}})$.

Pourquoi on a besoin d'estimations plus précises sur les moments

Équation perturbée : $\partial_t \widehat{\gamma}(t, \xi) = \widehat{\gamma}(t, \frac{\xi}{2})^2 - \widehat{\gamma}(t, \xi) + \frac{1}{4} \xi \partial_\xi \widehat{\gamma}(t, \xi) + R(t, \xi)$.

Proposition : contrôle du reste R implique convergence vers l'auto-similarité.

On fixe $s \in (2, 3)$, on pose $\lambda_s = 1 - \frac{s}{4} - 2^{1-s}$ (positif par concavité).

Supposons l'existence de $K > 0$ et $c > 0$ avec $|R(t, \xi)| \leq |\xi|^s K e^{-ct}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tout temps t , $d_s(\gamma, \gamma_\infty)(t) \leq d_s(\gamma_0, \gamma_\infty) e^{-\lambda_s t} + K \frac{e^{-ct} - e^{-\lambda_s t}}{\lambda_s - c}$.

On a $|R(t, \xi)| \leq \begin{cases} \frac{5}{2} \left(\alpha \sqrt{\frac{M_4}{M_2}} + \beta \frac{M_4}{M_2} \right) |\xi|^2 \\ \left(\alpha \frac{M_4}{M_2^{\frac{3}{2}}} + \beta \frac{\sqrt{M_4 M_6}}{M_2^{\frac{3}{2}}} \right) |\xi|^3 \end{cases}$, il nous faut une borne inférieure pour $M_2 \dots$

Proposition : borne inférieure pour M_2 si le profil est « rétracté ».

Si $\frac{M_{2k_0}}{M_2}$ est initialement petit (avec $\frac{1}{2^{2k_0-1}} < \delta_0$), alors il décroît à taux $(\delta_0 - \frac{1}{2^{2k_0-1}})$.

De plus, dans ce cas, $M_2(t) \geq C_{k_0} M_2^0 e^{-\frac{t}{2}}$ (avec $C_{k_0} \rightarrow 1$ lorsque $\frac{M_{2k_0}^0}{M_2^0} \rightarrow 0$).

Par conséquent, pour tout $k \geq 2$ (avec $k \leq k_0$), $\frac{M_{2k}}{M_2}$ décroît à taux $\min(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2k-1}}, \delta_0 - \frac{1}{2^{2k_0-1}})$.

Au final : convergence exponentielle vers le profil auto-similaire (comme pour $m = 1$) en distance d_s , pour $s \in]2, 3[$ lorsque $\delta_0 \geq \frac{1}{4}$, et pour $s \in]2, 2 + \frac{\delta_0}{\frac{1}{2} - \delta_0}[$ si $\delta_0 \leq \frac{1}{4}$.



M. Bisi, J. A. Carrillo, and G. Toscani.
Contractive metrics for a Boltzmann equation for granular gases : Diffusive equilibria.
J. Stat. Phys., 118(1-2) :301–331, 2005.



Eric Bertin, Michel Droz, and Guillaume Grégoire.
Boltzmann and hydrodynamic description for self-propelled particles.
Phys. Rev. E, 74 :022101, 2006.



Vincent Calvez, Jimmy Garnier, and Florian Patout.
Asymptotic analysis of a quantitative genetics model with nonlinear integral operator.
J. Éc. Polytech., Math., 6 :537–579, 2019.



Pierre Degond, Amic Frouvelle, and Gaël Raoul.
Local stability of perfect alignment for a spatially homogeneous kinetic model.
J. Stat. Phys., 157(1) :84–112, 2014.



Amic Frouvelle and Cécile Taing.
On the Fisher infinitesimal model without variability.
arXiv :2307.12735, 2023.



J. Guerand, M. Hillairet, and S. Mirrahimi.
A moment-based approach for the analysis of the infinitesimal model in the regime of small variance, 2023.
arXiv :2309.09567.



Daniel Matthes and Giuseppe Toscani.
On steady distributions of kinetic models of conservative economies.
J. Stat. Phys., 130(6) :1087–1117, 2008.



Lorenzo Pareschi and Giuseppe Toscani.
Self-similarity and power-like tails in nonconservative kinetic models.
J. Stat. Phys., 124(2-4) :747–779, 2006.