

# Transitions de phase pour une classe de modèles d'alignement de particules autopropulsées

Amic Frouvelle  
CEREMADE – Université Paris Dauphine

Collaboration avec Jian-Guo Liu (Duke University, USA)  
et Pierre Degond (Imperial College, Londres)

Séminaire EDP, Modélisation et Calcul scientifique de Lyon  
UMPA, 7 janvier 2014

## But : description macroscopique de sociétés animales



- Interactions locales sans présence de « leader ».
- Émergence de structures macroscopiques, transitions de phase.

Exemple : modèle de Vicsek [1995], d'après des modèles similaires, plus réalistes (Aoki [1982], Reynolds [1987], Huth-Wissel [1992]).

Images © Benson Kua (flickr) et ©

## Modèle cinétique de champ moyen

Ingrédients : vitesse unité, alignement avec les voisins, bruit angulaire.

**Théorème (d'après Bolley, Cañizo, Carrillo, 2012)**

Densité de probabilité  $f(x, v, t)$  de présence d'un individu en  $x \in \mathbb{R}^n$ , avec orientation  $v \in \mathbb{S}$  (sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ ) :

$$\underbrace{\partial_t f + v \cdot \nabla_x f}_{\text{transport}} + \underbrace{\nu(|\bar{J}_f|) \nabla_v \cdot (\nabla_v (v \cdot \bar{\Omega}_f) f)}_{\text{alignement}} = \underbrace{\tau(|\bar{J}_f|) \Delta_v f}_{\text{diffusion}}$$

Quantité de mouvement locale :  $J_f = \int_{v \in \mathbb{S}} v f(x, v, t) dv$ .

Orientation cible :  $\bar{\Omega}_f = \frac{\bar{J}_f}{|\bar{J}_f|}$ , avec  $\bar{J}_f = K *_x J_f$ .

## Version homogène en espace

### Équation de Smoluchowski sur la sphère

Équation réduite, pour une fonction  $f(v, t)$  :

$$\begin{aligned}\partial_t f &= Q(f), \\ Q(f) &= \tau(|J_f|) \nabla_v \cdot [\nabla_v f - k(|J_f|) \nabla_v (v \cdot \Omega_f) f] \\ \Omega_f &= \frac{J_f}{|J_f|}, \quad J_f(t) = \int_{\mathbb{S}} f(v, t) v \, dv.\end{aligned}$$

Paramètre clé : la quantité conservée  $\rho = \int_{\mathbb{S}} f$ .

Fonction clé :  $k(|J|) = \frac{\nu(|J|)}{\tau(|J|)}$  (compétition entre alignement et bruit). Plus précisément, son inverse  $\kappa \mapsto j(\kappa)$  :

Hypothèse principale :  $|J| \mapsto k(|J|)$  croissante.

$$\kappa = k(|J|) \Leftrightarrow |J| = j(\kappa)$$

# Équilibres

## Définitions : distributions de von Mises–Fisher

$$M_{\kappa\Omega}(v) = \frac{e^{\kappa v \cdot \Omega}}{\int_{\mathbb{S}} e^{\kappa w \cdot \Omega} dw}.$$

Orientation  $\Omega \in \mathbb{S}$ , concentration  $\kappa \geq 0$ .

Paramètre d'ordre :  $c(\kappa) = |J_{M_{\kappa\Omega}}| = \frac{\int_0^\pi \cos \theta e^{\kappa \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\kappa \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta}$ .

On réécrit l'opérateur de collision  $Q$  :

$$Q(f) = \tau(|J_f|) \nabla_\omega \cdot \left[ M_{k(|J_f|)\Omega_f} \nabla_\omega \left( \frac{f}{M_{k(|J_f|)\Omega_f}} \right) \right].$$

## Relation de compatibilité, états stationnaires

$$Q(f) = 0 \Leftrightarrow f = \rho M_{\kappa\Omega}, \text{ avec } \Omega \in \mathbb{S} \text{ et } j(\kappa) = \rho c(\kappa).$$

## Analyse locale près de l'équilibre uniforme

Valeur critique :  $\rho_c = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{j(\kappa)}{c(\kappa)} \in (0, +\infty]$ .

### Théorème : Instabilité forte – Stabilité exponentielle

- $\rho > \rho_c$  : Si  $J_{f_0} \neq 0$ , alors  $f$  ne peut pas converger vers l'équilibre uniforme.
- $\rho < \rho_c$  : Il existe une constante  $\delta$  telle que si  $\|f_0 - \rho\|_{H^s} < \delta$ , alors pour tout  $t \geq 0$

$$\|f(t) - \rho\|_{H^s} \leq \frac{\|f_0 - \rho\|_{H^s} e^{-\lambda t}}{1 - \frac{1}{\delta} \|f_0 - \rho\|_{H^s}}, \text{ avec } \lambda = (n-1)\tau_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right).$$

Outils : linéarisation pour l'évolution de  $J_f$  et estimées d'énergie pour l'équation complète.

## Près d'un équilibre anisotrope $\rho M_{\kappa\Omega}$

**Théorème : Stabilité exponentielle dans le cas  $(\frac{j}{c})'(\kappa) > 0$**

Pour  $s > \frac{n-1}{2}$ , il existe  $\delta > 0$  et  $C > 0$ , tels que  
si  $\|f_0 - \rho M_{\kappa\Omega_0}\|_{H^s} < \delta$  pour un  $\Omega_0 \in \mathbb{S}$ , il existe  $\Omega_\infty \in \mathbb{S}$  tel que

$$\|f - \rho M_{\kappa\Omega_\infty}\|_{H^s} \leq C \|f_0 - \rho M_{\kappa\Omega_0}\|_{H^s} e^{-\lambda t},$$

avec  $\lambda = \frac{c\tau(j)}{j'} \Lambda_\kappa (\frac{j}{c})'$ , où  $\Lambda_\kappa$  est la constante pour l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\langle |\nabla g|^2 \rangle_{M_{\kappa\Omega}} \geq \Lambda_\kappa \langle (g - \langle g \rangle_{M_{\kappa\Omega}})^2 \rangle_{M_{\kappa\Omega}}$$

Outils : Énergie libre  $\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{S}} f \ln f - \Phi(|J_f|)$ , avec  $\frac{d\Phi}{d|J|} = k(|J|)$ ,  
et sa dissipation  $\mathcal{D}(f) = \tau(|J_f|) \int_{\mathbb{S}} f |\nabla_\omega (\ln f - h(|J_f|)\omega \cdot \Omega_f)|^2$ .

- Instabilité de  $\rho M_{\kappa\Omega}$  si  $(\frac{j}{c})'(\kappa) < 0$ .

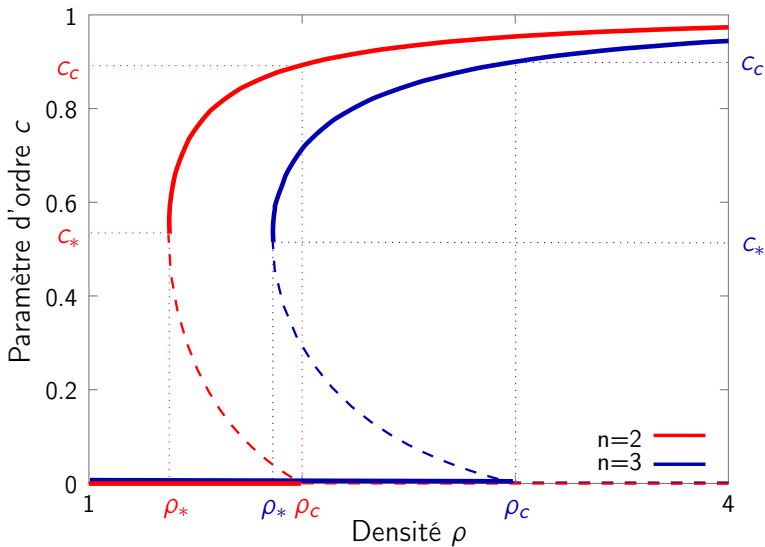
## Résultats généraux dans le cas $(\frac{j}{c})' > 0$ pour tout $\kappa$

- Si  $\rho < \rho_c$ , alors la solution converge exponentiellement vite vers l'uniforme  $f_\infty = \rho$ .
- Si  $\rho = \rho_c$ , la solution converge vers l'équilibre uniforme.
- Si  $\rho > \rho_c$  et  $J_{f_0} \neq 0$ , alors il existe  $\Omega_\infty$  tel que  $f$  converge exponentiellement vite vers la distribution de von Mises  $f_\infty = \rho M_{\kappa\Omega_\infty}$ , où  $\kappa > 0$  est l'unique solution non nulle de l'équation  $\rho c(\kappa) = j(\kappa)$ .

On peut alors définir  $c$  (paramètre d'ordre) en fonction de  $\rho$ , et cette fonction est continue.

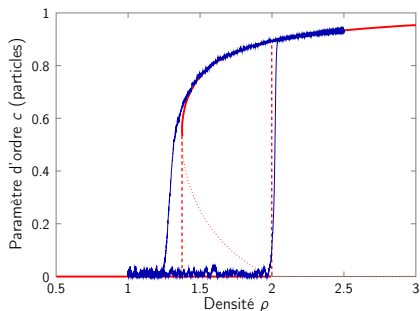
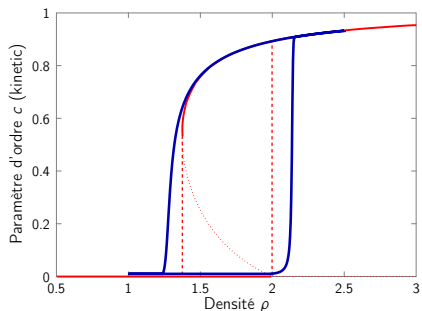
Exposant critique  $\beta$  : quand  $c(\rho) \asymp (\rho - \rho_c)^\beta$ . Arbitraire dans  $(0, 1]$ , on peut artificiellement choisir  $j(\kappa) = c(\kappa)(1 + \kappa^{\frac{1}{\beta}})$ .

# Un diagramme de phase : $k(|J|) = |J| + |J|^2$



## Illustration numérique du phénomène d'hystérésis

Changement d'échelle  $\tilde{f} = \frac{f}{\rho}$ . Le paramètre  $\rho$  peut être considéré comme libre, on le fait évoluer en temps.



## Changements d'échelle pour l'équation cinétique

2 paramètres :  $\varepsilon$  (échelle hydrodynamique) et  $\eta$  (longueur caractéristique du noyau d'observation  $K$ ).

### Équation cinétique réduite

$$\varepsilon(\partial_t f + v \cdot \nabla_x f) + K_2 \eta^2 [\nabla_v \cdot (P_{v^\perp} \ell_f f) - m_f \Delta_v f] = Q(f) + \mathcal{O}(\eta^4),$$

avec

$$\ell_f = \frac{\nu(|J_f|)}{|J_f|} P_{\Omega_f^\perp} \Delta_x J_f + (\Omega_f \cdot \Delta_x J_f) \nu'(|J_f|) \Omega_f,$$
$$m_f = (\Omega_f \cdot \Delta_x J_f) \tau'(|J_f|),$$

Limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dans les cas où  $\eta = \mathcal{O}(\varepsilon)$ , ou  $\eta = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$  ?

## Branche d'équilibre anistrotrope stable

Branche stable de distribution de von Mises donnée par  $\rho \mapsto \kappa(\rho)$ .

### Théorème : limite hydrodynamique formelle

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dans une région où  $f^\varepsilon \rightarrow f^0 = \rho(x, t) M_{\kappa(\rho)\Omega(x, t)}$ , les fonctions  $\rho, \Omega$  satisfont le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho c \Omega) = 0, \\ \rho (\partial_t \Omega + \tilde{c}(\Omega \cdot \nabla_x) \Omega) + \Theta P_{\Omega^\perp} \nabla_x \rho = \mathcal{K}_2 \delta P_{\Omega^\perp} \Delta_x (\rho c \Omega). \end{cases}$$

$$\tilde{c} = \langle \cos \theta \rangle_{\tilde{M}_\kappa}, \quad \Theta = \frac{1}{\kappa} + \frac{\rho}{\kappa} \frac{d\kappa}{d\rho} (\tilde{c} - c), \quad \delta = \frac{\nu(\sigma)}{c} \left( \frac{n-1}{\kappa} + \tilde{c} \right).$$

Paramètre d'échelle  $\mathcal{K}_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_2 \frac{\eta^2}{\varepsilon}$ .

Hyperbolicité liée à l'exposant critique  $\beta$  (second ordre), ou non-hyperbolicité au voisinage de  $\rho_*$  (premier ordre).

## Région où $\rho_c - \rho^\varepsilon(x, t) \gg \varepsilon$

Développement de Chapman–Enskog.

**Théorème : correction de diffusion (formelle)**

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , au premier ordre, dans une région où  $f^\varepsilon \rightarrow f^0 = \rho(x, t)$ ,  $f^\varepsilon$  est (formellement) donnée par

$$f^\varepsilon(x, v, t) = \rho^\varepsilon(x, t) - \varepsilon \frac{n \rho_c v \cdot \nabla_x \rho^\varepsilon(x, t)}{(n-1)n\tau_0(\rho_c - \rho^\varepsilon(x, t))},$$

Et la densité  $\rho^\varepsilon$  satisfait l'équation de diffusion suivante :

$$\partial_t \rho^\varepsilon = \frac{\varepsilon \rho_c}{(n-1)n\tau_0} \nabla_x \cdot \left( \frac{1}{\rho_c - \rho^\varepsilon} \nabla_x \rho^\varepsilon \right).$$

Transition du deuxième ordre : région « frontière »

où  $\rho^\varepsilon(x, t) - \rho_c = O(\varepsilon)$ ? Comment connecter les deux modèles ?