

# Alignement de particules autopropulsées, dérivation de modèles cinétiques et macroscopiques

Amic Frouvelle  
CEREMADE – Université Paris Dauphine

Collaboration avec Jian-Guo Liu (Duke University, USA)  
et Pierre Degond (Imperial College, Londres)

Groupe de travail Modélisation Stochastique du LPMA  
Université Paris Diderot, 8 décembre 2016

## But : description macroscopique de sociétés animales



- Interactions locales sans présence de « leader ».
- Émergence de structures macroscopiques, transitions de phase.

Exemple : modèle de Vicsek [1995], d'après des modèles similaires, plus réalistes (Aoki [1982], Reynolds [1987], Huth-Wissel [1992]).

Images © Benson Kua (flickr) et ©

## Dynamiques individuelles

Ingrédients : vitesse 1, alignement sur les voisins, bruit angulaire.

Positions des particules :  $X_1, \dots, X_N$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

Orientations  $v_1, \dots, v_N$  dans  $\mathbb{S}$  (sphère unité).

$$\begin{cases} \frac{dX_k}{dt} = v_k \\ \frac{dv_k}{dt} = \nu P_{v_k^\perp}(\bar{v}_k - v_k) \end{cases}$$

## Dynamiques individuelles

Ingrédients : vitesse 1, alignement sur les voisins, bruit angulaire.

Positions des particules :  $X_1, \dots, X_N$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

Orientations  $v_1, \dots, v_N$  dans  $\mathbb{S}$  (sphère unité).

$$\begin{cases} \frac{dX_k}{dt} = v_k \\ \frac{dv_k}{dt} = \nu P_{v_k^\perp} \bar{v}_k \end{cases}$$

## Dynamiques individuelles

Ingrédients : vitesse 1, alignement sur les voisins, bruit angulaire.

Positions des particules :  $X_1, \dots, X_N$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

Orientations  $v_1, \dots, v_N$  dans  $\mathbb{S}$  (sphère unité).

$$\begin{cases} dX_k = v_k dt \\ dv_k = \nu P_{v_k^\perp} \bar{v}_k dt + \sqrt{2\tau} P_{v_k^\perp} \circ dB_t^k \end{cases}$$

## Dynamiques individuelles

Ingrédients : vitesse 1, alignement sur les voisins, bruit angulaire.

Positions des particules :  $X_1, \dots, X_N$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

Orientations  $v_1, \dots, v_N$  dans  $\mathbb{S}$  (sphère unité).

$$\begin{cases} dX_k = v_k dt \\ dv_k = \nu P_{v_k^\perp} \bar{v}_k dt + \sqrt{2\tau} P_{v_k^\perp} \circ dB_t^k \end{cases}$$

Direction cible :

$$\bar{v}_k = \frac{J_k}{|J_k|}, \quad J_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(X_j - X_k) v_j.$$

## Dynamiques individuelles

Ingrédients : vitesse 1, alignement sur les voisins, bruit angulaire.

Positions des particules :  $X_1, \dots, X_N$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

Orientations  $v_1, \dots, v_N$  dans  $\mathbb{S}$  (sphère unité).

$$\begin{cases} dX_k = v_k dt \\ dv_k = \nu P_{v_k^\perp} \bar{v}_k dt + \sqrt{2\tau} P_{v_k^\perp} \circ dB_t^k \end{cases}$$

Direction cible :

$$\bar{v}_k = \frac{J_k}{|J_k|}, \quad J_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(X_j - X_k) v_j.$$

En prenant  $\nu = \nu(|J_k|)$  et  $\tau = \tau(|J_k|)$ , pas de singularité si  $\frac{\nu(|J|)}{|J|}$  est Lipschitz.

Cas sous-critique

$$\nu = 1.9$$

Cas surcritique

$$\nu = 2.3$$

# Modèle cinétique de champ moyen : loi des grands nombres

Ingrédients : vitesse 1, alignement sur les voisins, bruit angulaire.

## Modèle cinétique de champ moyen : loi des grands nombres

Ingrédients : vitesse 1, alignement sur les voisins, bruit angulaire.

Théorème (d'après Bolley, Cañizo, Carrillo, 2012)

La mesure empirique  $\frac{1}{N} \sum_k \delta_{X_k, v_k}$  converge (en loi) vers  $f(x, v, t)$ , densité de probabilité de présence d'un individu en  $x \in \mathbb{R}^n$ , avec orientation  $v \in \mathbb{S}$  (sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ ) :

$$\underbrace{\partial_t f + v \cdot \nabla_x f}_{\text{transport}} + \underbrace{\nu(|\bar{J}_f|) \nabla_v \cdot (P_{v^\perp} \bar{\Omega}_f f)}_{\text{alignement}} = \underbrace{\tau(|\bar{J}_f|) \Delta_v f}_{\text{diffusion}}$$

Quantité de mouvement locale :  $J_f = \int_{v \in \mathbb{S}} v f(x, v, t) dv$ .

Orientation cible :  $\bar{\Omega}_f = \frac{\bar{J}_f}{|\bar{J}_f|}$ , avec  $\bar{J}_f = K *_x J_f$ .

## Modèle cinétique de champ moyen : loi des grands nombres

Ingrédients : vitesse 1, alignement sur les voisins, bruit angulaire.

**Théorème (d'après Bolley, Cañizo, Carrillo, 2012)**

La mesure empirique  $\frac{1}{N} \sum_k \delta_{X_k, v_k}$  converge (en loi) vers  $f(x, v, t)$ , densité de probabilité de présence d'un individu en  $x \in \mathbb{R}^n$ , avec orientation  $v \in \mathbb{S}$  (sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ ) :

$$\underbrace{\partial_t f + v \cdot \nabla_x f}_{\text{transport}} + \underbrace{\nu(|\bar{J}_f|) \nabla_v \cdot (\nabla_v (v \cdot \bar{\Omega}_f) f)}_{\text{alignement}} = \underbrace{\tau(|\bar{J}_f|) \Delta_v f}_{\text{diffusion}}$$

Quantité de mouvement locale :  $J_f = \int_{v \in \mathbb{S}} v f(x, v, t) dv$ .

Orientation cible :  $\bar{\Omega}_f = \frac{J_f}{|J_f|}$ , avec  $\bar{J}_f = K *_x J_f$ .

# Modèle cinétique de champ moyen : loi des grands nombres

Ingrédients : vitesse 1, alignement sur les voisins, bruit angulaire.

**Théorème (d'après Bolley, Cañizo, Carrillo, 2012)**

La mesure empirique  $\frac{1}{N} \sum_k \delta_{X_k, v_k}$  converge (en loi) vers  $f(x, v, t)$ , densité de probabilité de présence d'un individu en  $x \in \mathbb{R}^n$ , avec orientation  $v \in \mathbb{S}$  (sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ ) :

$$\underbrace{\partial_t f + v \cdot \nabla_x f}_{\text{transport}} + \underbrace{\nu(|\bar{J}_f|) \nabla_v \cdot (\nabla_v (v \cdot \bar{\Omega}_f) f)}_{\text{alignement}} = \underbrace{\tau(|\bar{J}_f|) \Delta_v f}_{\text{diffusion}}$$

Quantité de mouvement locale :  $J_f = \int_{v \in \mathbb{S}} v f(x, v, t) dv$ .

Orientation cible :  $\bar{\Omega}_f = \frac{\bar{J}_f}{|\bar{J}_f|}$ , avec  $\bar{J}_f = K *_x J_f$ .

Vitesse de convergence, à horizon  $T$  fixé :  $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ .

## Interaction modérée : équation locale

Échelle d'interaction :  $\varepsilon_N$ . Même système d'EDS, mais

$$J_k = \frac{1}{N\varepsilon_N^d} \sum_{j=1}^N K\left(\frac{x_j - x_k}{\varepsilon_N}\right) v_j.$$

Interaction modérée :  $\varepsilon_N \sim N^{-\frac{\beta}{d}}$ ,  $\beta \in (0, 1)$  (faible : 0, forte : 1).

## Interaction modérée : équation locale

Échelle d'interaction :  $\varepsilon_N$ . Même système d'EDS, mais

$$J_k = \frac{1}{N\varepsilon_N^d} \sum_{j=1}^N K\left(\frac{x_j - x_k}{\varepsilon_N}\right) v_j.$$

Interaction modérée :  $\varepsilon_N \sim N^{-\frac{\beta}{d}}$ ,  $\beta \in (0, 1)$  (faible : 0, forte : 1).

Propagation du chaos [Oelschläger (85), Méléard-Roelly (87), Jourdain-Méléard (98)] : la mesure empirique converge en loi vers l'équation locale en  $x$ , à condition que celle-ci soit bien posée.

## Interaction modérée : équation locale

Échelle d'interaction :  $\varepsilon_N$ . Même système d'EDS, mais

$$J_k = \frac{1}{N\varepsilon_N^d} \sum_{j=1}^N K\left(\frac{x_j - x_k}{\varepsilon_N}\right) v_j.$$

Interaction modérée :  $\varepsilon_N \sim N^{-\frac{\beta}{d}}$ ,  $\beta \in (0, 1)$  (faible : 0, forte : 1).

Propagation du chaos [Oelschläger (85), Méléard-Roelly (87), Jourdain-Méléard (98)] : la mesure empirique converge en loi vers l'équation locale en  $x$ , à condition que celle-ci soit bien posée.

$$\underbrace{\partial_t f + v \cdot \nabla_x f}_{\text{transport}} + \underbrace{\nu(|J_f|) \nabla_v \cdot (\nabla_v (v \cdot \Omega_f) f)}_{\text{alignement}} = \underbrace{\tau(|J_f|) \Delta_v f}_{\text{diffusion}},$$

où  $J_f = \int_{v \in \mathbb{S}} v f(x, v, t) dv$  et  $\Omega_f = \frac{J_f}{|J_f|}$ .

Hypothèses :  $\nu$  bornée,  $\frac{\nu(|J|)}{|J|}$  et  $\tau$  Lipschitz.

## Version homogène en espace

### Équation de Smoluchowski sur la sphère

Équation réduite, pour une fonction  $f(v, t)$  :

$$\begin{aligned}\partial_t f &= Q(f), \\ Q(f) &= \tau(|J_f|)\Delta_v f - \nu(|J_f|)\nabla_v \cdot (\nabla_v(v \cdot \Omega_f) f), \\ \Omega_f &= \frac{J_f}{|J_f|}, \quad J_f(t) = \int_{\mathbb{S}} f(v, t) v \, dv.\end{aligned}$$

Paramètre clé : la quantité conservée  $\rho = \int_{\mathbb{S}} f$ .

## Version homogène en espace

### Équation de Smoluchowski sur la sphère

Équation réduite, pour une fonction  $f(v, t)$  :

$$\begin{aligned}\partial_t f &= Q(f), \\ Q(f) &= \tau(|J_f|) \nabla_v \cdot [\nabla_v f - k(|J_f|) \nabla_v (v \cdot \Omega_f) f] \\ \Omega_f &= \frac{J_f}{|J_f|}, \quad J_f(t) = \int_{\mathbb{S}} f(v, t) v \, dv.\end{aligned}$$

Paramètre clé : la quantité conservée  $\rho = \int_{\mathbb{S}} f$ .

## Version homogène en espace

### Équation de Smoluchowski sur la sphère

Équation réduite, pour une fonction  $f(v, t)$  :

$$\begin{aligned} \partial_t f &= Q(f), \\ Q(f) &= \tau(|J_f|) \nabla_v \cdot [\nabla_v f - k(|J_f|) \nabla_v (v \cdot \Omega_f) f] \\ \Omega_f &= \frac{J_f}{|J_f|}, \quad J_f(t) = \int_{\mathbb{S}} f(v, t) v \, dv. \end{aligned}$$

Paramètre clé : la quantité conservée  $\rho = \int_{\mathbb{S}} f$ .

Fonction clé :  $k(|J|) = \frac{\nu(|J|)}{\tau(|J|)}$  (compétition entre alignement et bruit). Plus précisément, son inverse  $\kappa \mapsto j(\kappa)$  :

Hypothèse principale :  $|J| \mapsto k(|J|)$  croissante.

$$\kappa = k(|J|) \Leftrightarrow |J| = j(\kappa)$$

# Équilibres

Définitions : distributions de von Mises–Fisher

$$M_{\kappa\Omega}(v) = \frac{e^{\kappa v \cdot \Omega}}{\int_{\mathbb{S}} e^{\kappa w \cdot \Omega} dw}.$$

Orientation  $\Omega \in \mathbb{S}$ , concentration  $\kappa \geq 0$ .

Paramètre d'ordre :  $c(\kappa) = |JM_{\kappa\Omega}| = \frac{\int_0^\pi \cos \theta e^{\kappa \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\kappa \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta}$ .

# Équilibres

## Définitions : distributions de von Mises–Fisher

$$M_{\kappa\Omega}(v) = \frac{e^{\kappa v \cdot \Omega}}{\int_{\mathbb{S}} e^{\kappa w \cdot \Omega} dw}.$$

Orientation  $\Omega \in \mathbb{S}$ , concentration  $\kappa \geq 0$ .

$$\text{Paramètre d'ordre : } c(\kappa) = |JM_{\kappa\Omega}| = \frac{\int_0^\pi \cos \theta e^{\kappa \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\kappa \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta}.$$

On réécrit l'opérateur de collision  $Q$  :

$$Q(f) = \tau(|J_f|) \nabla_\omega \cdot \left[ M_{k(|J_f|)\Omega_f} \nabla_\omega \left( \frac{f}{M_{k(|J_f|)\Omega_f}} \right) \right].$$

# Équilibres

Définitions : distributions de von Mises–Fisher

$$M_{\kappa\Omega}(v) = \frac{e^{\kappa v \cdot \Omega}}{\int_{\mathbb{S}} e^{\kappa w \cdot \Omega} dw}.$$

Orientation  $\Omega \in \mathbb{S}$ , concentration  $\kappa \geq 0$ .

Paramètre d'ordre :  $c(\kappa) = |JM_{\kappa\Omega}| = \frac{\int_0^\pi \cos\theta e^{\kappa \cos\theta} \sin^{n-2}\theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\kappa \cos\theta} \sin^{n-2}\theta d\theta}$ .

On réécrit l'opérateur de collision  $Q$  :

$$Q(f) = \tau(|J_f|) \nabla_\omega \cdot \left[ M_{k(|J_f|)\Omega_f} \nabla_\omega \left( \frac{f}{M_{k(|J_f|)\Omega_f}} \right) \right].$$

Relation de compatibilité, états stationnaires

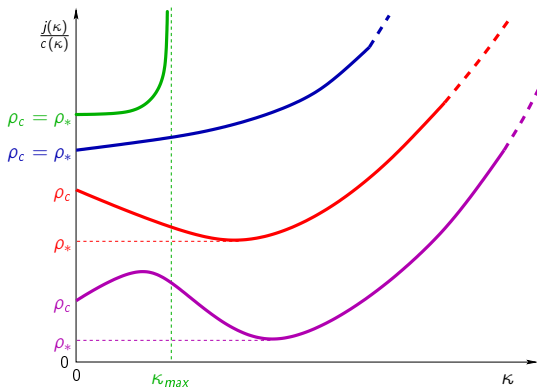
$$Q(f) = 0 \Leftrightarrow f = \rho M_{\kappa\Omega}, \text{ avec } \Omega \in \mathbb{S} \text{ et } j(\kappa) = \rho c(\kappa).$$

# Solutions de l'équation de compatibilité $j(\kappa) = \rho c(\kappa)$

Distribution uniforme  $f = \rho$  : toujours un équilibre.

Autres solutions : on étudie la fonction  $\kappa \mapsto \frac{j(\kappa)}{c(\kappa)} (= \rho)$ .

Seuils critiques :



# Solutions de l'équation de compatibilité $j(\kappa) = \rho c(\kappa)$

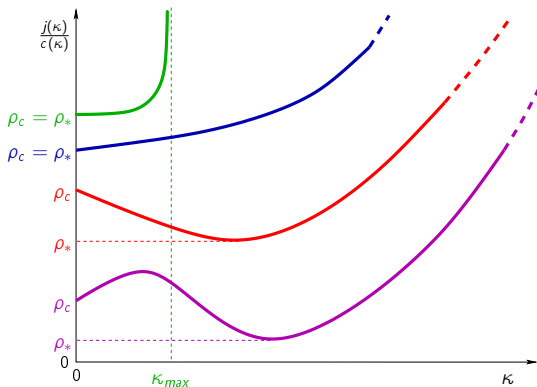
Distribution uniforme  $f = \rho$  : toujours un équilibre.

Autres solutions : on étudie la fonction  $\kappa \mapsto \frac{j(\kappa)}{c(\kappa)} (= \rho)$ .

Seuils critiques :

$$\rho_* = \min_{\kappa} \frac{j(\kappa)}{c(\kappa)}.$$

Si  $\rho < \rho_*$ , équilibre uniforme seulement.



# Solutions de l'équation de compatibilité $j(\kappa) = \rho c(\kappa)$

Distribution uniforme  $f = \rho$  : toujours un équilibre.

Autres solutions : on étudie la fonction  $\kappa \mapsto \frac{j(\kappa)}{c(\kappa)} (= \rho)$ .

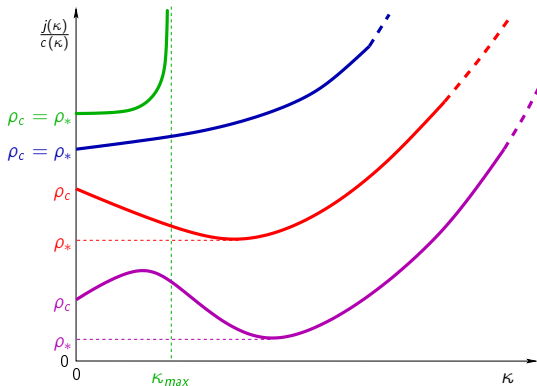
Seuils critiques :

$$\rho_* = \min_{\kappa} \frac{j(\kappa)}{c(\kappa)}.$$

Si  $\rho < \rho_*$ , équilibre uniforme seulement.

$$\rho_c = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{j(\kappa)}{c(\kappa)}.$$

Si  $\rho > \rho_c$ , au moins un équilibre nonisotrope (von Mises–Fisher)



## Analyse locale près de l'équilibre uniforme

Valeur critique :  $\rho_c = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{j(\kappa)}{c(\kappa)} \in (0, +\infty]$ .

### Théorème : Instabilité forte – Stabilité exponentielle

- $\rho > \rho_c$  : Si  $J_{f_0} \neq 0$ , alors  $f$  ne peut pas converger vers l'équilibre uniforme.
- $\rho < \rho_c$  : Il existe une constante  $\delta$  telle que si  $\|f_0 - \rho\|_{H^s} < \delta$ , alors pour tout  $t \geq 0$

$$\|f(t) - \rho\|_{H^s} \leq \frac{\|f_0 - \rho\|_{H^s} e^{-\lambda t}}{1 - \frac{1}{\delta} \|f_0 - \rho\|_{H^s}}, \text{ avec } \lambda = (n-1)\tau_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right).$$

## Analyse locale près de l'équilibre uniforme

Valeur critique :  $\rho_c = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{j(\kappa)}{c(\kappa)} \in (0, +\infty]$ .

### Théorème : Instabilité forte – Stabilité exponentielle

- $\rho > \rho_c$  : Si  $J_{f_0} \neq 0$ , alors  $f$  ne peut pas converger vers l'équilibre uniforme.
- $\rho < \rho_c$  : Il existe une constante  $\delta$  telle que si  $\|f_0 - \rho\|_{H^s} < \delta$ , alors pour tout  $t \geq 0$

$$\|f(t) - \rho\|_{H^s} \leq \frac{\|f_0 - \rho\|_{H^s} e^{-\lambda t}}{1 - \frac{1}{\delta} \|f_0 - \rho\|_{H^s}}, \text{ avec } \lambda = (n-1)\tau_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right).$$

Outils : linéarisation pour l'évolution de  $J_f$  et estimées d'énergie pour l'équation complète.

## Près d'un équilibre anisotrope $\rho M_{\kappa\Omega}$

**Théorème : Stabilité exponentielle dans le cas  $(\frac{j}{c})'(\kappa) > 0$**

Pour  $s > \frac{n-1}{2}$ , il existe  $\delta > 0$  et  $C > 0$ , tels que  
si  $\|f_0 - \rho M_{\kappa\Omega_0}\|_{H^s} < \delta$  pour un  $\Omega_0 \in \mathbb{S}$ , il existe  $\Omega_\infty \in \mathbb{S}$  tel que

$$\|f - \rho M_{\kappa\Omega_\infty}\|_{H^s} \leq C \|f_0 - \rho M_{\kappa\Omega_0}\|_{H^s} e^{-\lambda t},$$

avec  $\lambda = \frac{c\tau(j)}{j'} \Lambda_\kappa (\frac{j}{c})'$ , où  $\Lambda_\kappa$  est la constante pour l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\langle |\nabla g|^2 \rangle_{M_{\kappa\Omega}} \geq \Lambda_\kappa \langle (g - \langle g \rangle_{M_{\kappa\Omega}})^2 \rangle_{M_{\kappa\Omega}}$$

## Près d'un équilibre anisotrope $\rho M_{\kappa\Omega}$

**Théorème : Stabilité exponentielle dans le cas  $(\frac{j}{c})'(\kappa) > 0$**

Pour  $s > \frac{n-1}{2}$ , il existe  $\delta > 0$  et  $C > 0$ , tels que  
 si  $\|f_0 - \rho M_{\kappa\Omega_0}\|_{H^s} < \delta$  pour un  $\Omega_0 \in \mathbb{S}$ , il existe  $\Omega_\infty \in \mathbb{S}$  tel que

$$\|f - \rho M_{\kappa\Omega_\infty}\|_{H^s} \leq C \|f_0 - \rho M_{\kappa\Omega_0}\|_{H^s} e^{-\lambda t},$$

avec  $\lambda = \frac{c\tau(j)}{j'} \Lambda_\kappa (\frac{j}{c})'$ , où  $\Lambda_\kappa$  est la constante pour l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\langle |\nabla g|^2 \rangle_{M_{\kappa\Omega}} \geq \Lambda_\kappa \langle (g - \langle g \rangle_{M_{\kappa\Omega}})^2 \rangle_{M_{\kappa\Omega}}$$

Outils : Énergie libre  $\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{S}} f \ln f - \Phi(|J_f|)$ , avec  $\frac{d\Phi}{d|J|} = k(|J|)$ ,  
 et sa dissipation  $\mathcal{D}(f) = \tau(|J_f|) \int_{\mathbb{S}} f |\nabla_\omega (\ln f - h(|J_f|)\omega \cdot \Omega_f)|^2$ .

## Près d'un équilibre anisotrope $\rho M_{\kappa\Omega}$

**Théorème : Stabilité exponentielle dans le cas  $(\frac{j}{c})'(\kappa) > 0$**

Pour  $s > \frac{n-1}{2}$ , il existe  $\delta > 0$  et  $C > 0$ , tels que  
si  $\|f_0 - \rho M_{\kappa\Omega_0}\|_{H^s} < \delta$  pour un  $\Omega_0 \in \mathbb{S}$ , il existe  $\Omega_\infty \in \mathbb{S}$  tel que

$$\|f - \rho M_{\kappa\Omega_\infty}\|_{H^s} \leq C \|f_0 - \rho M_{\kappa\Omega_0}\|_{H^s} e^{-\lambda t},$$

avec  $\lambda = \frac{c\tau(j)}{j'} \Lambda_\kappa (\frac{j}{c})'$ , où  $\Lambda_\kappa$  est la constante pour l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\langle |\nabla g|^2 \rangle_{M_{\kappa\Omega}} \geq \Lambda_\kappa \langle (g - \langle g \rangle_{M_{\kappa\Omega}})^2 \rangle_{M_{\kappa\Omega}}$$

Outils : Énergie libre  $\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{S}} f \ln f - \Phi(|J_f|)$ , avec  $\frac{d\Phi}{d|J|} = k(|J|)$ ,  
et sa dissipation  $\mathcal{D}(f) = \tau(|J_f|) \int_{\mathbb{S}} f |\nabla_\omega (\ln f - h(|J_f|)\omega \cdot \Omega_f)|^2$ .

- Instabilité de  $\rho M_{\kappa\Omega}$  si  $(\frac{j}{c})'(\kappa) < 0$ .

## Résultats généraux dans le cas $(\frac{j}{c})' > 0$ pour tout $\kappa$

- Si  $\rho < \rho_c$ , alors la solution converge exponentiellement vite vers l'uniforme  $f_\infty = \rho$ .
- Si  $\rho = \rho_c$ , la solution converge vers l'équilibre uniforme.
- Si  $\rho > \rho_c$  et  $J_{f_0} \neq 0$ , alors il existe  $\Omega_\infty$  tel que  $f$  converge exponentiellement vite vers la distribution de von Mises  $f_\infty = \rho M_{\kappa\Omega_\infty}$ , où  $\kappa > 0$  est l'unique solution non nulle de l'équation  $\rho c(\kappa) = j(\kappa)$ .

## Résultats généraux dans le cas $(\frac{j}{c})' > 0$ pour tout $\kappa$

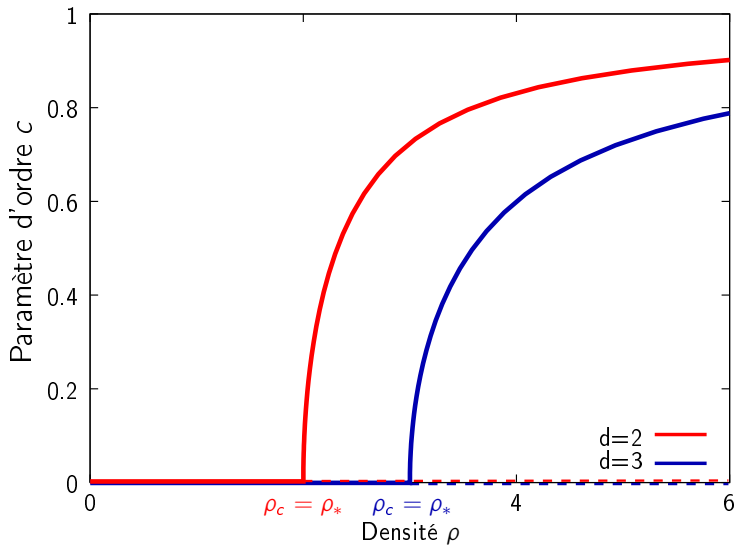
- Si  $\rho < \rho_c$ , alors la solution converge exponentiellement vite vers l'uniforme  $f_\infty = \rho$ .
- Si  $\rho = \rho_c$ , la solution converge vers l'équilibre uniforme.
- Si  $\rho > \rho_c$  et  $J_{f_0} \neq 0$ , alors il existe  $\Omega_\infty$  tel que  $f$  converge exponentiellement vite vers la distribution de von Mises  $f_\infty = \rho M_{\kappa\Omega_\infty}$ , où  $\kappa > 0$  est l'unique solution non nulle de l'équation  $\rho c(\kappa) = j(\kappa)$ .

On peut alors définir  $c$  (paramètre d'ordre) en fonction de  $\rho$ , et cette fonction est continue.

Exposant critique  $\beta$  : quand  $c(\rho) \asymp (\rho - \rho_c)^\beta$ . Arbitraire dans  $(0, 1]$ , on peut artificiellement choisir  $j(\kappa) = c(\kappa)(1 + \kappa^{\frac{1}{\beta}})$ .

Critère : si  $\frac{k(|J|)}{|J|}$  est décroissante en  $|J|$ , alors on a une telle transition de phase continue. Dans ce cas  $\beta \in [\frac{1}{2}, 1]$ .

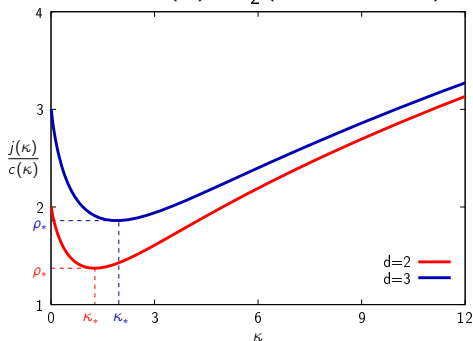
# Diagramme de phase pour $\nu(|J|) = |J|$ et $\tau = 1$



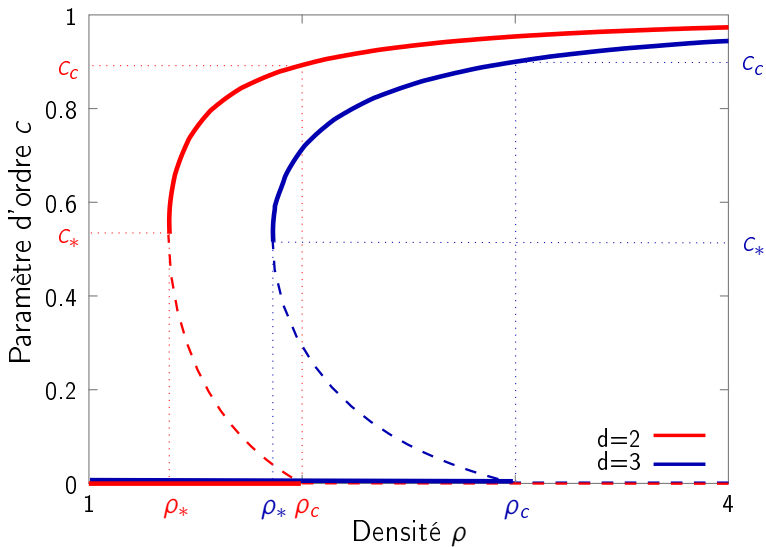
## Un exemple particulier de transition du premier ordre

Cas où  $\nu(|J|) = |J|$  et  $\tau(|J|) = \frac{1}{1 + |J|}$  (lié à certains modèles avec « bruit extrinsèque »).

On a alors  $k(|J|) = |J| + |J|^2$ , donc on ne vérifie pas le lemme précédent. On obtient  $j(\kappa) = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 4\kappa} - 1)$ .

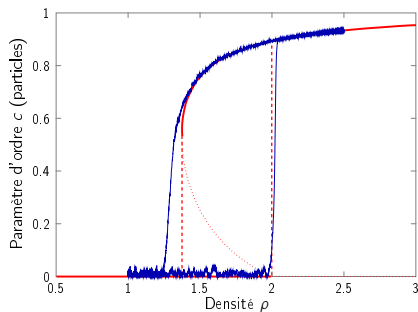
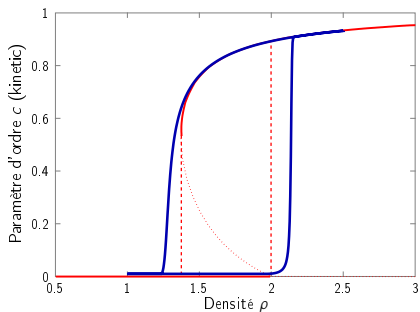


# Diagramme de phase pour $k(|J|) = |J| + |J|^2$ : hystérésis



## Illustration numérique du phénomène d'hystérésis

Changement d'échelle  $\tilde{f} = \frac{f}{\rho}$ . Le paramètre  $\rho$  peut être considéré comme libre, on le fait évoluer en temps.



## Branche d'équilibre anistrotrope stable

Scaling hyperbolique :  $\varepsilon(\partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon) = Q(f)$ .

## Branche d'équilibre anisotrope stable

Scaling hyperbolique :  $\varepsilon(\partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon) = Q(f)$ .

Branche stable de distribution de von Mises donnée par  $\rho \mapsto \kappa(\rho)$ .

### Théorème : limite hydrodynamique formelle

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dans une région où  $f^\varepsilon \rightarrow f^0 = \rho(x, t) M_{\kappa(\rho)\Omega(x,t)}$ , les fonctions  $\rho, \Omega$  satisfont le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho c \Omega) = 0, \\ \rho (\partial_t \Omega + \tilde{c}(\Omega \cdot \nabla_x) \Omega) + \Theta P_{\Omega^\perp} \nabla_x \rho = 0. \end{cases}$$

$$\tilde{c} = \langle \cos \theta \rangle_{\tilde{M}_\kappa}, \quad \Theta = \frac{1}{\kappa} + \frac{\rho}{\kappa} \frac{d\kappa}{d\rho} (\tilde{c} - c).$$

## Région où $\rho_c - \rho^\varepsilon(x, t) \gg \varepsilon$

Développement de Chapman–Enskog.

**Théorème : correction de diffusion (formelle)**

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , au premier ordre, dans une région où  $f^\varepsilon \rightarrow f^0 = \rho(x, t)$ ,  $f^\varepsilon$  est (formellement) donnée par

$$f^\varepsilon(x, v, t) = \rho^\varepsilon(x, t) - \varepsilon \frac{n \rho_c v \cdot \nabla_x \rho^\varepsilon(x, t)}{(n-1)n\tau_0(\rho_c - \rho^\varepsilon(x, t))},$$

Et la densité  $\rho^\varepsilon$  satisfait l'équation de diffusion suivante :

$$\partial_t \rho^\varepsilon = \frac{\varepsilon \rho_c}{(n-1)n\tau_0} \nabla_x \cdot \left( \frac{1}{\rho_c - \rho^\varepsilon} \nabla_x \rho^\varepsilon \right).$$

## Région où $\rho_c - \rho^\varepsilon(x, t) \gg \varepsilon$

Développement de Chapman–Enskog.

**Théorème : correction de diffusion (formelle)**

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , au premier ordre, dans une région où  $f^\varepsilon \rightarrow f^0 = \rho(x, t)$ ,  $f^\varepsilon$  est (formellement) donnée par

$$f^\varepsilon(x, v, t) = \rho^\varepsilon(x, t) - \varepsilon \frac{n \rho_c v \cdot \nabla_x \rho^\varepsilon(x, t)}{(n-1)n\tau_0(\rho_c - \rho^\varepsilon(x, t))},$$

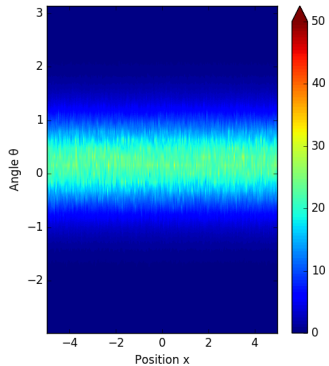
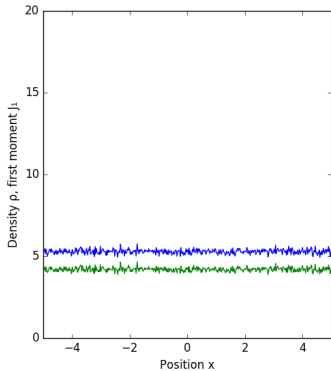
Et la densité  $\rho^\varepsilon$  satisfait l'équation de diffusion suivante :

$$\partial_t \rho^\varepsilon = \frac{\varepsilon \rho_c}{(n-1)n\tau_0} \nabla_x \cdot \left( \frac{1}{\rho_c - \rho^\varepsilon} \nabla_x \rho^\varepsilon \right).$$

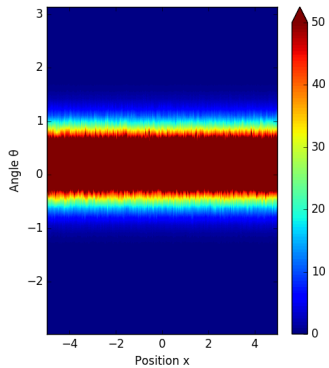
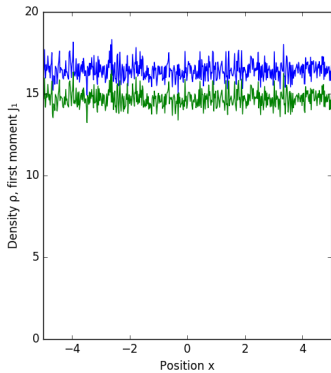
Transition du deuxième ordre : région « frontière »

où  $\rho^\varepsilon(x, t) - \rho_c = O(\varepsilon)$ ? Comment connecter les deux modèles ?

t=00.0



t=00.0



Merci !