

Stabilité locale des masses de Dirac pour un modèle cinétique d'alignement sur la sphère

Amic Frouvelle

Collaboration avec Pierre Degond (Imperial College, Londres)
et Gaël Raoul (CEFE, Montpellier)

Séminaire d'Analyse Appliquée,
Aix-Marseille Université, 23 septembre 2014

Modèles d'alignement de particules orientées



Cadre : version spatialement homogène du modèle de Bertin, Droz et Grégoire [2006].

Images © Benson Kua (flickr) et ©

Modèle collisionnel général

- Espace métrique \mathcal{M} , particules interagissant à taux constant.
- Densité de probabilité qu'une particule en position x_* interagissant avec une autre en x'_* se retrouve en x après collision : $K(x, x_*, x'_*)$.

Modèle collisionnel général

- Espace métrique \mathcal{M} , particules interagissant à taux constant.
- Densité de probabilité qu'une particule en position x_* interagissant avec une autre en x'_* se retrouve en x après collision : $K(x, x_*, x'_*)$.

Évolution de la mesure de probabilité ρ_t

$$\partial_t \rho(t, x) = \int_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} K(x, x_*, x'_*) d\rho_t(x_*) d\rho_t(x'_*) - \rho(t, x).$$

- Existence et unicité de solutions dans $\mathcal{P}_2(\mathcal{M})$ si $x_* \mapsto K(\cdot, x_*, x'_*)$ est Lipschitz pour W_2 .

Modèle collisionnel général

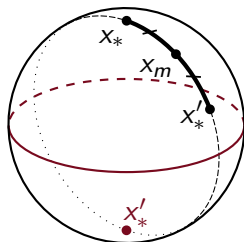
- Espace métrique \mathcal{M} , particules interagissant à taux constant.
- Densité de probabilité qu'une particule en position x_* interagissant avec une autre en x'_* se retrouve en x après collision : $K(x, x_*, x'_*)$.

Évolution de la mesure de probabilité ρ_t

$$\partial_t \rho(t, x) = \int_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} K(x, x_*, x'_*) d\rho_t(x_*) d\rho_t(x'_*) - \rho(t, x).$$

- Existence et unicité de solutions dans $\mathcal{P}_2(\mathcal{M})$ si $x_* \mapsto K(\cdot, x_*, x'_*)$ est Lipschitz pour W_2 .

Exemple : $\mathcal{M} = \mathbb{S}$ (sphère unité de \mathbb{R}^n),
avec $K(\cdot, x_*, x'_*) = \delta_{x_m}$, où $x_m = \frac{x_* + x'_*}{\|x_* + x'_*\|}$.



Le cas $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, collision au point milieu

- Cas $K(\cdot, x_*, x'_*) = \delta_{\frac{x_* + x'_*}{2}}$, relié à des modèles économiques (Pareschi, Toscani [2006]).
- Conservation du centre de masse $\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^n} x \, d\rho(x)$.
- 2^e moment $m_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |x - \bar{x}|^2 \, d\rho(x) : \frac{d}{dt} m_2 = -\frac{m_2}{2}$.

Convergence exponentielle vers une masse de Dirac

$$W_2(\rho, \delta_{\bar{x}}) = W_2(\rho_0, \delta_{\bar{x}}) e^{-\frac{t}{4}}.$$

Le cas $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, collision au point milieu

- Cas $K(\cdot, x_*, x'_*) = \delta_{\frac{x_*+x'_*}{2}}$, relié à des modèles économiques (Pareschi, Toscani [2006]).
- Conservation du centre de masse $\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^n} x \, d\rho(x)$.
- 2^e moment $m_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |x - \bar{x}|^2 \, d\rho(x) : \frac{d}{dt} m_2 = -\frac{m_2}{2}$.

Convergence exponentielle vers une masse de Dirac

$$W_2(\rho, \delta_{\bar{x}}) = W_2(\rho_0, \delta_{\bar{x}}) e^{-\frac{t}{4}}.$$

- Décroissance de l'énergie $E(\rho) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x - y|^2 \, d\rho(x) \, d\rho(y)$ (égale à $2m_2$), définition ne nécessitant pas \bar{x} .

Lien Énergie – Wasserstein

Énergie :

$$E(\rho) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S}} d(x, y)^2 d\rho(x) d\rho(y).$$

Lien Énergie – Wasserstein

Énergie :

$$E(\rho) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S}} d(x, y)^2 d\rho(x) d\rho(y).$$

Lemme utile – Inégalités de Markov

Pour $\rho \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$, il existe $\bar{x} \in \mathbb{S}$ et pour tout $x \in \mathbb{S}$:

$$W_2(\rho, \delta_{\bar{x}})^2 \leq E(\rho) \leq 4 W_2(\rho, \delta_x)^2,$$

Pour un tel \bar{x} et pour tout $\kappa > 0$, on a

$$\int_{\{x \in \mathbb{S}; d(x, \bar{x}) \geq \kappa\}} d\rho(x) \leq \frac{1}{\kappa^2} E(\rho),$$

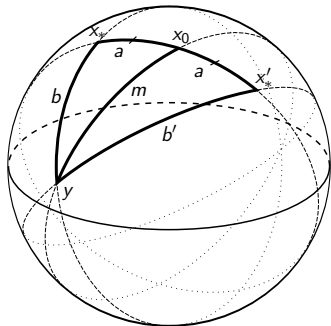
$$\int_{\{x \in \mathbb{S}; d(x, \bar{x}) \geq \kappa\}} d(x, \bar{x}) d\rho(x) \leq \frac{1}{\kappa} E(\rho).$$

Évolution de l'énergie

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(\rho) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}} \alpha(x_*, x'_*, y) d\rho(x_*) d\rho(x'_*) d\rho(y).$$

Contribution locale de la variation d'énergie

$$\alpha(x_*, x'_*, y) = \int_{\mathbb{S}} d(x, y)^2 K(x, x_*, x'_*) dx - \frac{d(x_*, y)^2 + d(x'_*, y)^2}{2}.$$



Configuration d'Apollonius :

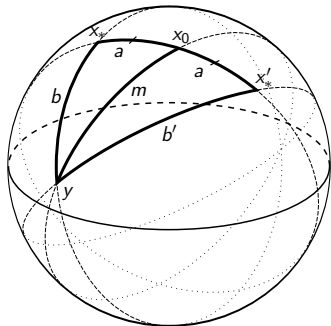
$$\alpha(x_*, x'_*, y) = m^2 - \frac{b^2 + b'^2}{2}.$$

Évolution de l'énergie

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(\rho) = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}} \alpha(x_*, x'_*, y) d\rho(x_*) d\rho(x'_*) d\rho(y).$$

Contribution locale de la variation d'énergie

$$\alpha(x_*, x'_*, y) = \int_{\mathbb{S}} d(x, y)^2 K(x, x_*, x'_*) dx - \frac{d(x_*, y)^2 + d(x'_*, y)^2}{2}.$$



Configuration d'Apollonius :

$$\alpha(x_*, x'_*, y) = m^2 - \frac{b^2 + b'^2}{2}.$$

Cas plat (on obtient $-a^2$) :

$$\alpha(x_*, x'_*, y) = -\frac{1}{4} d(x_*, x'_*)^2.$$

Contrôle de l'erreur dans la formule d'Apollonius

Lemme : contrôle global (inégalités triangulaires uniquement)

Pour tous x_* , x'_* , $y \in \mathbb{S}$, on a

$$\alpha(x_*, x'_*, y) \leq -\frac{1}{4}d(x_*, x'_*)^2 + 2d(x_*, x'_*) \min(d(x_*, y), d(x'_*, y)).$$

Contrôle de l'erreur dans la formule d'Apollonius

Lemme : contrôle global (inégalités triangulaires uniquement)

Pour tous x_* , x'_* , $y \in \mathbb{S}$, on a

$$\alpha(x_*, x'_*, y) \leq -\frac{1}{4}d(x_*, x'_*)^2 + 2d(x_*, x'_*) \min(d(x_*, y), d(x'_*, y)).$$

Lemme : contrôle local plus précis

Pour tout $\kappa_1 < \frac{2\pi}{3}$, il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $\kappa \leq \kappa_1$, et tous x_* , x'_* , $y \in \mathbb{S}$ avec $\max(d(x_*, y), d(x'_*, y), d(x_*, x'_*)) \leq \kappa$, on a

$$\alpha(x_*, x'_*, y) \leq -\frac{1}{4}d(x_*, x'_*)^2 + C_1 \kappa^2 d(x_*, x'_*)^2.$$

Apollonius sphérique : $\frac{1}{2}(\cos b + \cos b') = \cos a \cos m$.

Décroissance de l'énergie – Contrôle du déplacement

On pose $\bar{\omega} := \{x \in \mathbb{S}; d(x, \bar{x}) \leq \frac{1}{2}\kappa\}$, et on coupe l'intégrale triple en quatre morceaux suivant si x_*, x'_*, y est dans $\bar{\omega}$ ou pas.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(\rho) + \frac{1}{4} E(\rho) \leq \underbrace{C \kappa^2 E(\rho)}_{\text{Lemme local}} + \underbrace{12 \frac{E(\rho)^{\frac{3}{2}}}{\kappa} + 24 \frac{E(\rho)^2}{\kappa^2}}_{\text{Lemme global + Markov (et Cauchy-Schwarz)}}.$$

Décroissance de l'énergie – Contrôle du déplacement

On pose $\bar{\omega} := \{x \in \mathbb{S}; d(x, \bar{x}) \leq \frac{1}{2}\kappa\}$, et on coupe l'intégrale triple en quatre morceaux suivant si x_*, x'_*, y est dans $\bar{\omega}$ ou pas.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(\rho) + \frac{1}{4} E(\rho) \leq \underbrace{C \kappa^2 E(\rho)}_{\text{Lemme local}} + \underbrace{12 \frac{E(\rho)^{\frac{3}{2}}}{\kappa} + 24 \frac{E(\rho)^2}{\kappa^2}}_{\substack{\text{Lemme global + Markov} \\ \text{(et Cauchy-Schwarz)}}}.$$

Même genre de découpe pour montrer que $\bar{x}(t)$ est de Cauchy (pour $t \rightarrow \infty$) et converge au même taux que $\sqrt{E(\rho)}$.

Décroissance de l'énergie – Contrôle du déplacement

On pose $\bar{\omega} := \{x \in \mathbb{S}; d(x, \bar{x}) \leq \frac{1}{2}\kappa\}$, et on coupe l'intégrale triple en quatre morceaux suivant si x_*, x'_*, y est dans $\bar{\omega}$ ou pas.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(\rho) + \frac{1}{4} E(\rho) \leq \underbrace{C \kappa^2 E(\rho)}_{\text{Lemme local}} + \underbrace{12 \frac{E(\rho)^{\frac{3}{2}}}{\kappa} + 24 \frac{E(\rho)^2}{\kappa^2}}_{\substack{\text{Lemme global + Markov} \\ \text{(et Cauchy-Schwarz)}}}.$$

Même genre de découpe pour montrer que $\bar{x}(t)$ est de Cauchy (pour $t \rightarrow \infty$) et converge au même taux que $\sqrt{E(\rho)}$.

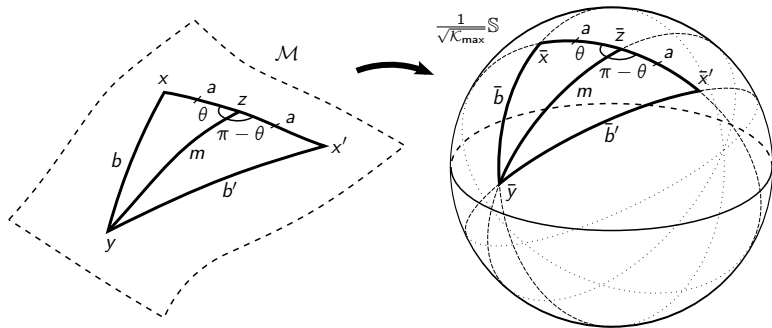
Théorème : stabilité locale des masses de Dirac

Il existe $C_1 > 0$ et $\eta > 0$ tels que pour toute solution $\rho \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}(\mathbb{S}))$ avec condition initiale ρ_0 satisfaisant $W_2(\rho_0, \delta_{x_0}) < \eta$ pour un $x_0 \in \mathbb{S}$, il existe $x_\infty \in \mathbb{S}$ tel que

$$W_2(\rho_t, \delta_{x_\infty}) \leq C_1 W_2(\rho_0, \delta_{x_0}) e^{-\frac{1}{4}t}.$$

Exemple du cercle

Lemmes de comparaison



Courbure sectionnelle $\leq \mathcal{K}_{\max}$
Rayon d'injectivité positif

\Rightarrow

Même résultat, même taux
de convergence (optimal)

Classe plus large de modèles

(H1) Propriété de contraction : il existe $\beta \in [0, 1)$ tel que pour tous $x_*, x'_* \in \mathcal{M}$, on ait

$$\int_{\mathcal{M}} d(x, x_*)^2 K(x, x_*, x'_*) dx \leq \frac{1}{4}(1 + \beta)d(x_*, x'_*)^2,$$

(H2) Symétrie par rapport au point milieu pour les petites distances,

(H3) Contrôle d'un moment > 2 .

Théorème : stabilité locale des masses de Dirac (bis)

Sous (H1), (H2) et (H3), courbure sectionnelle majorée et minorée, et rayon d'injectivité positif, même résultat avec

$$W_2(\rho_t, \delta_{x_\infty}) \leq C_1 W_2(\rho_0, \delta_{x_0}) e^{-\frac{1}{4}(1-\beta)t}.$$

Merci !