NOM : ....

PRÉNOM : ....

(lisiblement)

L2 MIDO 2024-2025

Algèbre 4 et Méthodes numériques.

Entraînement à l'examen du 26 mai 2025 (durée 2h).

L'examen se compose de trois exercices. La plupart des questions ne sont pas bloquantes pour répondre aux suivantes, prenez le temps de lire les énoncés dans leur intégralité.

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Le soin apporté à la rédaction, la clarté, la concision et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible de son NOM et PRÉNOM) font partie de l'évaluation. Il y a largement la place de répondre dans les cases, utilisez le brouillon à bon escient pour être efficace.

PARTIE
À
RABATTRE

Exercice 1. Jacobi, Gauss-Seidel, et une relaxation.

Pour $n \geqslant 2$, on pose $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sur la diagonale et la dernière colonne sont des 1, ceux sur la partie triangulaire inférieure stricte sont des -1, et ayant des 0 ailleurs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On écrit $A = D - E - F$ avec $D = I_n$ et E et F triangulaires (inférieure et supérieure) strictes.

Donner les relations de récurrence définissant les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour résoudre le système $Ax = b$ avec $b \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que $\det(I_n - A) = (-1)^n$, en déduire que $\rho(I_n - A) \geqslant 1$ (où ρ est le rayon spectral).
La méthode de Jacobi est-elle convergente ?

Résoudre le système $(D-E)x = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

En déduire que la matrice d'itération B_{GS} de la méthode de Gauss-Seidel est la matrice ci-contre. La méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente ?

$$B_{\mathrm{GS}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & -4 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & -2^{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -2^{n-1}+1 \end{pmatrix}.$$

On pose $\widetilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On fixe $w \in \mathbb{R}^*$ et on pose $M = D - E + \frac{1-w}{w}\widetilde{D}$ et $N = \frac{1-w}{w}\widetilde{D} + F$.

On s'intéresse à la méthode itérative définie par $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$, avec $x^{(0)}$ donné dans $\mathbb{R}^n$. Qu'obtient-on pour $w = 1$? Montrer que si la méthode est convergente, alors la suite $x^{(k)}$ converge vers une solution du système $Ax = b$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre le système $Mx = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ pour les valeurs de w où M est inversible. En déduire que la matrice d'itération de la méthode itérative est donnée par la matrice B_{relax} ci-contre.
Pour quelles valeurs de w la méthode est-elle convergente ? Que se passe-t-il pour $w = \frac{1}{2}^{n-1}$?

$$B_{\text{relax}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & -4 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & -2^{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -w2^{n-1}+1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Polynôme caractéristique par interpolation et réduction de Hessenberg.

On se donne $x_0, \dots, x_n$ et $y_0, \dots, y_n$ des réels, les x_i étant distincts deux à deux. Rappeler pourquoi le calcul des coefficients du polynôme interpolateur de Lagrange valant $y_0, \dots, y_n$ aux points $x_0, \dots, x_n$ se ramène à la résolution d'un système linéaire. Donner l'ordre de grandeur du nombre d'opérations arithmétiques utilisées lorsqu'on souhaite résoudre ce système par méthode d'élimination de Gauss.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont on souhaite calculer les coefficients du polynôme caractéristique P_A. Pour $i \in [\![0, n]\!]$. Quel est l'ordre de grandeur du nombre d'opérations pour calculer $P_A(x_i)$ via une décomposition LU ? En déduire l'ordre de grandeur du nombre d'opérations pour calculer les coefficients de P_A par cette méthode.

Soit $B = (b_{i,j})_{0 \leqslant i,j < n} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice (appelée matrice de Hessenberg) dont les coefficients $b_{i,j}$ sont nuls dès que $i > j+1$. On note $\beta_i = b_{i+1,i}$ pour $i < n-1$, et pour $k \in [\![0, n[\![$ on note $B_k \in M_n(\mathbb{R})$ la sous-matrice (ci-contre) constituée des lignes et colonnes 0 à $k-1$ et d_k son déterminant. Montrer que pour $k \geqslant 1$, on a (en posant $d_0 = 1$ et $\prod\limits_{j \in [\![k-1, k-1[\![} \beta_j = 1$) :

$$B_k = \begin{pmatrix} b_{0,0} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{0,k-1} \\ \beta_0 & b_{1,1} & & & \vdots \\ 0 & \beta_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{k-2} & b_{k-1,k-1} \end{pmatrix}$$

$$d_k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i+1} b_{i,k-1} d_i \prod_{j \in [\![i, k-1[\![} \beta_j.$$

Écrire le code d'une fonction `detHessenberg` qui prend en argument un tableau `B` de taille (n, n) correspondant à la matrice B et qui renvoie son déterminant d_n grâce à la formule précédente, en utilisant de l'ordre de $O(n^2)$ opérations élémentaires : on prendra les indices décroissants de $k-1$ à 0 dans la somme et on prendra soin de ne pas recalculer le produit $\prod_{j \in [\![i,k-1 [\![} \beta_j$ à chaque étape (en gardant en mémoire sa valeur).

Pour une matrice A donnée, on admet qu'on peut construire une matrice Q orthogonale et une matrice B de Hessenberg telles que $QAQ^\top = B$ en utilisant de l'ordre de $O(n^3)$ opérations élémentaires. Déduire des questions précédentes que l'on peut obtenir les coefficients du polynôme caractéristique de A en utilisant de l'ordre de $O(n^3)$ opérations élémentaires au total.

Exercice 3. Décomposition LU par blocs.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice s'écrivant par blocs $A = \begin{pmatrix} A_1 & E & F \\ B & A_2 & G \\ C & D & A_3 \end{pmatrix}$, avec A_1, A_2, et A_3 des matrices carrées de taille n_1, n_2 et n_3, les six autres blocs étant des matrices rectangulaires. Si A_1 est inversible, donner une condition suffisante d'inversibilité pour une matrice carrée de taille n_2 qui permette d'écrire A sous la forme du produit de matrices par blocs $A = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ L_{21} & I_{n_2} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & I_{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & V_2 & U_{23} \\ 0 & 0 & V_3 \end{pmatrix}$, et donner alors une expression de ces différents blocs.

Montrer que si on a une décomposition LU pour chacune des matrices V_1, V_2 et V_3, sous la forme $V_i = L_i U_i$, alors la matrice A admet une décomposition LU, et l'exprimer sous forme de matrices par blocs.