Méthodes numériques (L2 - 2024/2025)
Feuille de TD n° 4 — Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, calculs de valeurs et vecteurs propres.

Cette feuille est très largement extraite des feuilles de TD proposées par Guillaume Legendre (jusqu'en 2024), disponibles ici : `https://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/methnum/`

1 Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. *(normes matricielles subordonnées)*

Pour la norme vectorielle $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \infty$, sur $\mathbb{C}^n$, on définit la *norme subordonnée* associée à $\|\cdot\|_p$ par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A\|_p = \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p}.$$

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, montrer les propriétés suivantes :

1. $\|A\|_p \geq \rho(A)$, où $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ est le rayon spectral de A,
2. $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)$,
3. $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)$,
4. $\|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|U^*AU\|_2$ pour toute matrice unitaire U (c'est-à-dire telle que $UU^* = I_n$),
5. $\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

Exercice 2. *(rayon spectral et série de Neumann)*

Soit n un entier naturel strictement positif, A une matrice d'ordre n et $\|\cdot\|$ une norme matricielle. Montrer les assertions suivantes.

1. On a $\rho(A) < 1$ si et seulement si A^k tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.
2. Si $\rho(A) < 1$, alors les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inversibles.
3. La série de terme général A^k converge (vers $(I_n - A)^{-1}$) si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Exercice 3. *(convergence de méthodes itératives pour les matrices à diagonale strictement dominante)*

Soit n un entier naturel strictement positif et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire vérifiant la condition

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|,\ 1 \leq i \leq n.$$

Montrer alors que la matrice A est inversible et que les méthodes de Jacobi et de Gauss–Seidel, utilisées pour la résolution du système matriciel $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\boldsymbol{b}$ un vecteur donné, convergent toutes deux.

Exercice 4. On considère la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss–Seidel pour cette matrice.
2. Vérifier que $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$, où B_{GS} et B_J désignent respectivement les matrices d'itération des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi. Laquelle de ces deux méthodes converge le plus rapidement ?

Exercice 5. On considère les méthodes de Jacobi et Gauss–Seidel pour la résolution d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Étudier la convergence de ces deux méthodes en fonction de la valeur du paramètre réel α.

Exercice 6. Soit α et β deux réels. On considère les matrices

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ \beta & 1 & \beta \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de α (resp. β) la matrice A_α (resp. C_β) est-elle définie positive ?
2. Écrire la matrice d'itération de la méthode de Jacobi associée à A_α (resp. C_β). Pour quelles valeurs de α (resp. β) cette méthode converge-t-elle ?
3. Écrire la matrice d'itération de la méthode de Gauss–Seidel associée à A_α et calculer son rayon spectral. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence de cette méthode ?

Exercice 7. Le but de cet exercice est de montrer (par l'exemple) qu'on ne peut établir de résultat général de comparaison de convergence entre les méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\rho(B_J) < 1 < \rho(B_{GS})$, où B_{GS} et B_J désignent les matrices d'itération des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi respectivement.
2. Soit maintenant $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $\rho(B_{GS}) < 1 < \rho(B_J)$.

Exercice 8. *(une méthode de relaxation)*

On considère pour la résolution d'un système matriciel $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec A une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont tous non nuls, la méthode itérative définie par la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (D - E)\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} = F\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b} \text{ et } \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \omega\, \boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} + (1-\omega)\, \boldsymbol{x}^{(k)},$$

où ω est un paramètre réel, D est la partie diagonale de A, E est la partie triangulaire inférieure stricte (*i.e.*, sans la diagonale) de $-A$ et F est la partie triangulaire supérieure stricte (*i.e.*, sans la diagonale) de $-A$.

1. Réécrire cette méthode itérative sous la forme

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = B(\omega)\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}(\omega),$$

   en explicitant la matrice d'itération $B(\omega)$ et le vecteur $\boldsymbol{c}(\omega)$. Vérifier que l'on retrouve la méthode de Gauss–Seidel lorsque $\omega = 1$.
2. Soit maintenant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Donner les valeurs du paramètre ω pour lesquelles la méthode itérative est convergente dans ce cas.

Exercice 9. *(méthode de Richardson)*

Pour résoudre le système matriciel $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, on considère la suite construite par la méthode de Richardson stationnaire, encore connue sous le nom de méthode du gradient à pas fixe, définie par la relation de récurrence

$$\boldsymbol{x}^{(0)} \text{ donné et, } \forall k \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha\,(b - A\boldsymbol{x}^{(k)}),$$

avec α un réel non nul.

1. Montrer que, si la méthode converge, la limite $\boldsymbol{x}^*$ de la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie $A\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$.
2. Montrer que, si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
il n'existe pas de α non nul tel que la méthode converge.
3. Discuter de la convergence de la méthode lorsque A est une matrice symétrique définie positive.

Exercice 10. *(convergence de la méthode de Richardson pour une matrice symétrique définie positive)*

Soit n un entier naturel non nul. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien, noté $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, et de la norme associée $\|\cdot\|_2$. Soit A une matrice symétrique d'ordre n vérifiant

$$\exists c > 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n,\ \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \geq c\,{\|\boldsymbol{v}\|_2}^2.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A) = \{\boldsymbol{0}\}$. En déduire que, pour tout vecteur $\boldsymbol{b}$, le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ admet une unique solution.
2. On fixe $\alpha > 0$ et on construit la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\boldsymbol{x}^{(0)} \text{ donné et, } \forall k \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)}).$$
On note $\boldsymbol{r}^{(k)} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)}$ le résidu à l'étape k.
   (a) Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{r}^{(k+1)} = (I_n - \alpha\,A)\boldsymbol{r}^{(k)}$, puis que $\boldsymbol{r}^{(k)} = (I_n - \alpha\,A)^k\boldsymbol{r}^{(0)}$.
   (b) Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur tel que $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$. Montrer que
   $${\|(I_n - \alpha\,A)\boldsymbol{x}\|_2}^2 \leq \alpha^2{\|A\|_2}^2 - 2c\alpha + 1.$$
   (c) En déduire que $\|I_n - \alpha\,A\|_2 < 1$ pour α appartenant à un intervalle correctement choisi.
3. Déduire de la question précédente une condition suffisante sur α pour que la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

2 Calcul de valeurs et vecteurs propres

Exercice 11. *(localisation des valeurs propres)* Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A une matrice d'ordre n à coefficients complexes.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont contenues dans la réunion des disques fermés respectivement centrés en a_{ii} et de rayon $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$, $i = 1, \dots, n$.
2. En déduire qu'une matrice à diagonale strictement dominante par lignes est inversible et qu'une matrice réelle symétrique, à diagonale strictement dominante par lignes et à coefficients diagonaux positifs est définie positive.
3. Proposer une possible amélioration du résultat de la première question utilisant la matrice $A^\top$.

Exercice 12. *(déflation de Wielandt)* Soit n un entier naturel non nul et A une matrice réelle symétrique inversible d'ordre n dont on note λ_i, $i = 1, \dots, n$, les valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités algébriques respectives) et $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \dots, n$, des vecteurs propres associés, supposés former une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Étant donné un entier j de $\{1, \dots, n\}$, on considère la modification suivante de la matrice A :

$$\widetilde{A} = A - \boldsymbol{v}_j{\boldsymbol{u}_j}^\top,$$

où $\boldsymbol{u}_j$ un vecteur vérifiant ${\boldsymbol{u}_j}^\top\boldsymbol{v}_j = \lambda_j$.

1. Calculer le produit $\widetilde{A}\boldsymbol{v}_j$.
2. Pour tout i appartenant à $\{1,\dots,n\}\backslash\{j\}$, calculer le produit $\widetilde{A}(\boldsymbol{v}_i+\alpha_i\,\boldsymbol{v}_j)$, où α_i est un réel. Pour quelle valeur de α_i le vecteur $(\boldsymbol{v}_i+\alpha_i\,\boldsymbol{v}_j)$ est-il un vecteur propre de $\widetilde{A}$?
3. Déduire des questions précédentes les valeurs propres de la matrice $\widetilde{A}$ et des vecteurs propres associés.
4. Que se passe-t-il pour le choix $\boldsymbol{u}_j=\lambda_j\,\dfrac{\boldsymbol{v}_j}{\|\boldsymbol{v}_j\|_2{}^2}$?

Exercice 13. *(convergence de la méthode de la puissance pour une matrice réelle symétrique)*
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une matrice A réelle symétrique d'ordre n, dont les valeurs propres sont telles que

$$|\lambda_1|\leq\cdots\leq|\lambda_{n-1}|<|\lambda_n|.$$

On suppose que le vecteur unitaire initial $\boldsymbol{q}^{(0)}$ de la méthode de la puissance n'est pas orthogonal au sous-espace propre associé à la valeur propre dominante λ_n. Montrer alors qu'il existe une constante positive C telle que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ |\nu^{(k)}-\lambda_n|\leq C\,|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}|^{2k},$$

où la suite $(\nu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est celle des approximations de λ_n construites par la méthode.

Exercice 14. *(réduction d'une matrice symétrique à la forme tridiagonale par la méthode de Householder)*
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, que l'on suppose muni du produit scalaire euclidien usuel, noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne associée $\|\cdot\|_2$. Pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ non nul de $\mathbb{R}^n$, on appelle matrice de Householder associée à $\boldsymbol{u}$ la matrice

$$H(\boldsymbol{u})=I_n-2\,\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top}{\|\boldsymbol{u}\|_2{}^2}.$$

Pour tout réel x, on définit la fonction signe par

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0,\\ -1 & \text{si } x<0.\end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ non nul, la matrice $H(\boldsymbol{u})$ est symétrique, orthogonale et inversible. Calculer son inverse et le vecteur $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$.
2. Soit A une matrice réelle symétrique d'ordre n. On note $\boldsymbol{a}_1$ la première colonne de A et on pose

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1-a_{11}\,\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{b}=\operatorname{sgn}(a_{21})\|\boldsymbol{a}\|_2\,\boldsymbol{e}_2 \text{ et } \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

   (a) On suppose que $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. Montrer que $a_{i1}=0$ pour tout entier i appartenant à $\{3,\dots,n\}$.
   (b) On suppose $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$. On pose $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|_2}$ et $B=H(\boldsymbol{u})AH(\boldsymbol{u})$. On veut montrer que $b_{i1}=0$ pour tout entier i appartenant à $\{3,\dots,n\}$ (on rappelle que la première colonne de B n'est autre que $B\,\boldsymbol{e}_1$).
      i. Montrer que $\boldsymbol{e}_1$ est orthogonal à $\boldsymbol{u}$. En déduire que $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1$.
      ii. Montrer que $B\boldsymbol{e}_1=H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}_1$.
      iii. Calculer $H(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ et $H(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.
      iv. En déduire la valeur de $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}$, puis celle de $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}_1$.
   (c) En déduire que, quel que soit le vecteur $\boldsymbol{c}$, il existe une matrice symétrique orthogonale P_1 telle que la matrice $B=P_1AP_1$ soit une matrice symétrique semblable à A et telle que $b_{i1}=0$ pour tout entier i appartenant à $\{3,\dots,n\}$.
   (d) En déduire par récurrence que, pour toute matrice A symétrique d'ordre n, il existe $n-2$ matrices symétriques orthogonales P_1, P_2,..., P_{n-2} telles que la matrice $P_{n-2}\dots P_2P_1AP_1P_2\dots P_{n-2}$ soit tridiagonale, symétrique et semblable à A.