Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

L2 MIDO 2024-2025

NOM : ....

PRÉNOM : ....
(lisiblement)

Algèbre 4 et Méthodes numériques.
Examen du 26 mai 2025 (durée 2h).

L'examen se compose de trois exercices. La plupart des questions ne sont pas bloquantes pour répondre aux suivantes, prenez le temps de lire les énoncés dans leur intégralité.

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Le soin apporté à la rédaction, la clarté, la concision et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible de son NOM et PRÉNOM) font partie de l'évaluation. Il y a largement la place de répondre dans les cases, utilisez le brouillon à bon escient pour être efficace.

PARTIE À RABATTRE

Exercice 1. Jacobi, Gauss-Seidel, et une relaxation.

Pour $n \geqslant 2$, on pose $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sur la diagonale et la première colonne sont des 1, ceux sur la partie triangulaire supérieure stricte sont des -1, et ayant des 0 ailleurs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & & -1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On écrit $A = D - E - F$ avec $D = I_n$ et E et F triangulaires (inférieure et supérieure) strictes.

Donner les relations de récurrence définissant les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour résoudre le système $Ax = b$ avec $b \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que $\det(I_n - A) = (-1)^n$, en déduire que $\rho(I_n - A) \geqslant 1$ (où ρ est le rayon spectral).
La méthode de Jacobi est-elle convergente ?

Montrer que la matrice d'itération B_{GS} de la méthode de Gauss-Seidel est la matrice ci-contre, donner son polynôme caractéristique. La méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente ?

$$B_{\text{GS}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $\widetilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$. On fixe $w \in \mathbb{R}^*$ et on pose $M = D - E + \frac{1-w}{w}\widetilde{D}$ et $N = \frac{1-w}{w}\widetilde{D} + F$.
On s'intéresse à la méthode itérative définie par $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$, avec $x^{(0)}$ donné dans $\mathbb{R}^n$. Qu'obtient-on pour $w = 1$? Montrer que si la méthode est convergente, alors la suite $x^{(k)}$ converge vers une solution du système $Ax = b$.

Déterminer M^{-1} pour les valeurs de w où M est inversible. En déduire que la matrice d'itération de la méthode itérative est donnée par la matrice B_{relax} ci-contre.

Pour quelles valeurs de w la méthode est-elle convergente ? Que se passe-t-il pour $w = \frac{1}{2}$?

$$B_{\text{relax}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 1-2w & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -w & 1-2w & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -w & \dots & -w & 1-2w \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Méthode de Newton et plus grande valeur propre d'une matrice symétrique tridiagonale.

Soient $\lambda_0 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ des réels, on pose $P = \prod_{i=0}^{n} (X - \lambda_i)$, et on se donne $x_0 > \lambda_n$. Donner la relation de récurrence satisfaite par les itérées (x_k) de la méthode de Newton pour trouver une racine de P.

Si $x > \lambda_n$, alors montrer que $P(x)$, $P'(x)$ et $P''(x)$ sont strictement positifs.
En déduire que pour $x > \lambda_n$, on a $x - \frac{P(x)}{P'(x)} > \lambda_n$.

En déduire que les itérées x_k sont bien définies pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers λ_n.

Que peut-on dire de la vitesse de convergence si λ_n est une racine simple de P ?

Soient $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$ des réels. Pour $\ell \in [\![1, n]\!]$, on pose $T_\ell \in M_{\ell+1}(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale ci-contre.
La matrice T_n est-elle diagonalisable ?
On pose $\beta_{-1} = \beta_n = 0$. Montrer que si λ est une valeur propre de T_n, alors $\lambda \leqslant \max\limits_{i \in [\![0,n]\!]} \alpha_i + |\beta_i| + |\beta_{i-1}|$.

$$T_\ell = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_0 & \alpha_1 & \beta_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{\ell-1} & \beta_{\ell-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{\ell-1} & \alpha_\ell \end{pmatrix}$$

On note P_ℓ le polynôme caractéristique de T_ℓ. Pour $\ell \in [\![1, n[\![$, montrer que l'on peut exprimer $P_{\ell+1}(x)$ fonction de $P_\ell(x)$, $P_{\ell-1}(x)$, $\alpha_{\ell+1}$, β_ℓ et x. Montrer que la formule obtenue est également valide pour $\ell = 0$ en posant $P_{-1}(x) = 1$.

Voici le code d'une fonction prenant en argument des vecteurs `alpha` et `beta` de taille $n+1$ et n correspondant à $(\alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $(\beta_i)_{0\leqslant i<n}$, et un réel x.
Montrer qu'elle renvoie (aux erreurs d'arrondis près) les valeurs de $P_n(x)$ et $P_n'(x)$. Combien d'opérations élémentaires ont été utilisées ?

```
def P_DP(alpha,beta,x):
    oldPx, oldDPx = 1., 0.
    Px, DPx = alpha[0] - x, -1.
    for l in range(len(beta)):
        d, beta2 = alpha[l+1] - x, beta[l] * beta[l]
        newPx = d * Px - beta2 * oldPx
        newDPx = d * DPx - Px - beta2 * oldDPx
        oldPx, oldDPx, Px, DPx = Px, DPx, newPx, newDPx
    return Px, DPx
```

Écrire le code d'une fonction prenant en argument des vecteurs `alpha` et `beta` comme précédemment, une tolérance `delta`, un nombre maximal d'itérations `kmax`, et qui renvoie une approximation de la plus grande valeur propre de T_n par la méthode de Newton. On utilisera un critère d'arrêt sur les incréments, et on choisira x_0 judicieusement.

Exercice 3. Facteur de croissance pour l'élimination de Gauss.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $V_{a,n} \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice ci-contre, dont les coefficients de la dernière colonne valent a, et les autres valent 1 sur la diagonale, -1 sur la partie triangulaire inférieure stricte, et 0 ailleurs.

$$V_{a,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & a \\ -1 & \dots & \dots & -1 & a \end{pmatrix}$$

Montrer que la première étape de la décomposition LU de $V_{a,n}$ s'écrit $V_{a,n} = L_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \; a \\ 0 & V_{2a,n-1} \end{pmatrix}$, avec une matrice L_n à déterminer.

En déduire la décomposition LU de $V_{1,n}$.

Pour une matrice C, le facteur de croissance de C pour l'élimination de Gauss est le maximum (en valeur absolue) des coefficients rencontrés dans les matrices $C^{(i)}$ intermédiaires, divisé par le maximum des coefficients de $C = C^{(0)}$ (en valeur absolue). C'est un nombre important pour la stabilité numérique des systèmes linéaires considérés, on cherche à ce qu'il soit le plus petit possible.
Montrer que le facteur de croissance de $V_{1,n}$ pour l'élimination de Gauss vaut 2^{n-1}.

Montrer qu'il existe une matrice de permutation P telle que $PV_{1,n}P$ est la matrice A ci-contre (la même que dans l'exercice 1).
Effectuer la première étape de la décomposition LU de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & & -1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire la décomposition LU de A et le facteur de croissance de A pour l'élimination de Gauss. À quelle stratégie de choix de pivots correspond cette décomposition $V_{1,n} = PLUP$?