Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

L2 MIDO 2025-2026

NOM : ....

PRÉNOM : ....

(lisiblement)

Algèbre 4 et Méthodes numériques.
Partiel du 12 mars 2026 (durée 2h).

L'examen se compose de quatre exercices. Il y a des légers liens entre les exercices, mais ils peuvent être résolus de manière indépendante. Dans chaque exercice, chaque question n'est en général pas bloquante pour répondre aux suivantes, prenez le temps de lire les énoncés dans leur intégralité.

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Le soin apporté à la rédaction, la clarté, la concision et le respect des consignes (et de la personne en charge de la correction, en particulier par l'écriture lisible de son NOM et PRÉNOM) font partie de l'évaluation. Il y a la place de répondre dans les cases, utilisez le brouillon à bon escient pour être efficace. Le sujet est possiblement un peu long, le barème en tiendra compte.

Réservé pour la correction. Initiales correcteur / correctrice : N° copie :

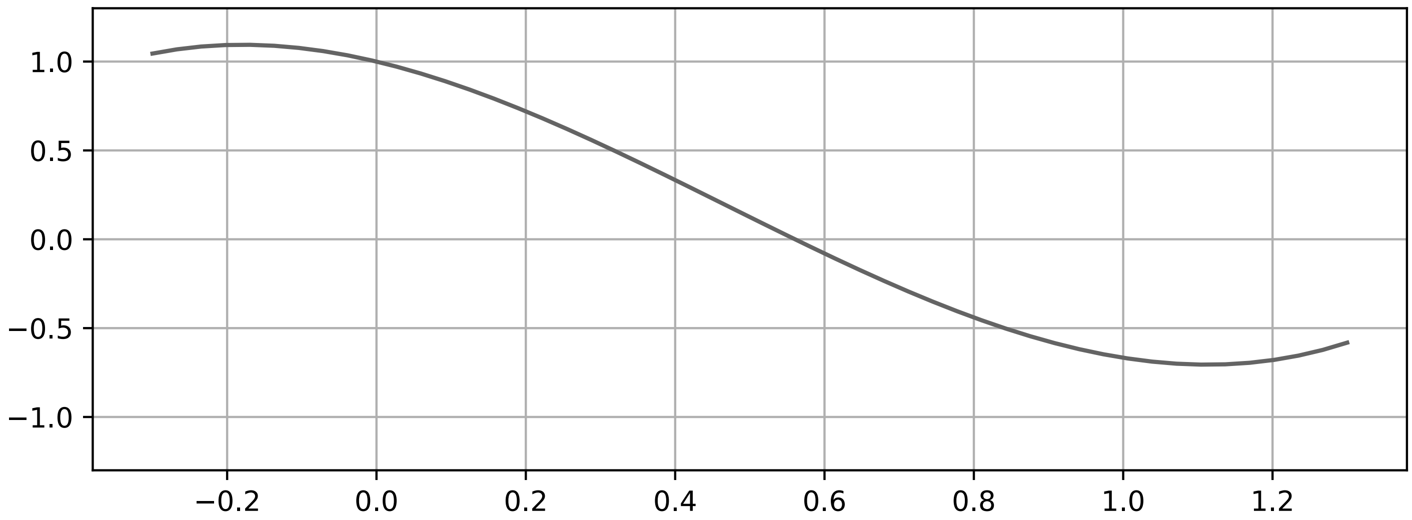
Commentaires éventuels :

PARTIE À RABATTRE

Exercice 1. Méthode de Newton pour trouver un zéro de f : $x \mapsto \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{3}x^2 - x + 1$.

Rappeler la relation de récurrence liant les itérées x_{n+1} et x_n de la méthode de Newton, lorsque $f'(x_n) \neq 0$.

On a tracé ci-dessous le graphique de la fonction f sur $[-0.3, 1.3]$, et posé $x_0 = 1$.
Déterminer graphiquement (et soigneusement) la position des itérées x_1 et x_2.



Déterminer les valeurs de x_1 et x_2. En déduire que la suite ne converge pas.

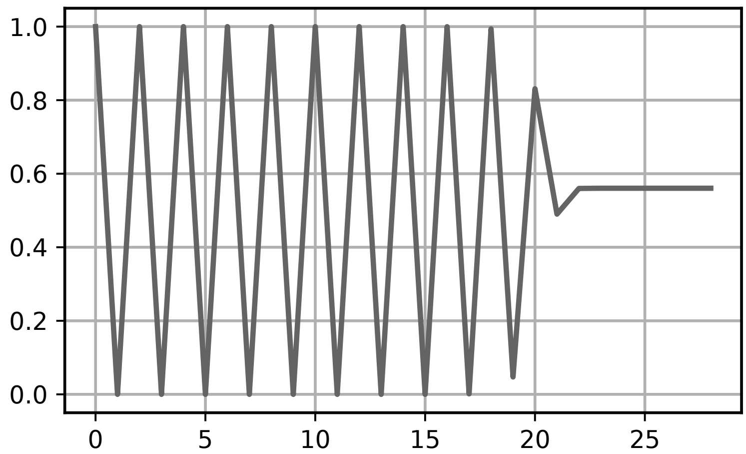
Énoncer le théorème de convergence locale de la méthode de Newton. S'applique-t-il pour f ? Est-ce en contradiction avec la question précédente ?

On a implémenté la méthode ci-dessous. Expliquer la différence avec les résultats théoriques.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return 5/3 *x**3 - 7/3*x**2 - x + 1
def df(x):
    return 5*x**2 - 14*x/3 -1

xn=1
lx=[xn]
for n in range(2,30):
    dfxn=df(xn)
    if dfxn!=0:
        xn=xn-f(xn)/dfxn
    lx.append(xn)
plt.plot(np.array(lx))
plt.grid()
```



Sachant qu'on ne connaît pas a priori la limite, par quoi remplacer une des lignes du code pour observer la vitesse de convergence ?

Exercice 2. Polynômes de Hermite, théorème du rang. Soient $x_0, \dots, x_d$ des réels distincts deux à deux.

Soit Φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_{2d+1}[X]$ associe $\Phi(P) = (P(x_0), \dots, P(x_d), P'(x_0), \dots, P'(x_d)) \in \mathbb{R}^{2d+2}$. Que peut-on dire sur P si $\Phi(P) = 0$?

En déduire que si $y_0, \dots, y_d$, et $z_0, \dots, z_d$ sont des réels, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2d+1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ et $P'(x_i) = z_i$ pour tout $i \in [\![0, d]\!]$.

Utiliser ce qui précède pour montrer qu'il existe une fonction f pour laquelle les itérées de la méthode de Newton sont $x_0, \dots, x_d, x_0, \dots$ (périodiques de période $d+1$).

Exercice 3. Méthode de Gauss-Legendre. Soit d un entier, et $x_0, \dots, x_d$ des réels deux à deux distincts. On se donne une formule de quadrature simple sur $[-1, 1]$ de la forme $I_{-1,1}(f) = 2\sum_{i=0}^{d} w_i f(x_i)$.

Si le degré d'exactitude est d ou plus, montrer que $I_{-1,1}(f) = \int_{-1}^{1} \Pi(f)(x)\mathrm{d}x$, où $\Pi(f)$ est le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points (x_i). On pourra utiliser les polynômes $L_i = \frac{\prod_{j\neq i} X - x_j}{\prod_{j\neq i} x_i - x_j}$.

Montrer que le degré d'exactitude est strictement inférieur à $2d+2$.

On cherche des réels $x_0, \ldots, x_d$ (distincts deux à deux) pour lesquels la formule $I_{-1,1}(f) = \int_{-1}^{1} \Pi(f)(x)\mathrm{d}x$ est de degré d'exactitude $2d+1$. Montrer qu'elle est dans tous les cas de degré supérieur ou égal à d.

On pose $Q = (1-X^2)^{d+1}$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, d+1]\!]$, $Q^{(k)} = R_k(1-X^2)^{d+1-k}$, où $R_k \in \mathbb{R}_k[X]$ a k racines distinctes dans $]-1, 1[$.

Montrer que pour tout $k \in [\![0, d+1]\!]$, on a $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_{-1}^{1} P(x)Q^{(k)}(x)\mathrm{d}x = (-1)^k \int_{-1}^{1} P^{(k)}(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

On note $x_0, \ldots, x_d$ les racines distinctes de $R_{d+1} = Q^{(d+1)}$.
Soit $U \in \mathbb{R}_{2d+1}[X]$, on note $U = PR_{d+1} + V$, avec P et V dans $\mathbb{R}_d[X]$ (division euclidienne par R_{d+1}).
Montrer que $I_{-1,1}(U) = I_{-1,1}(V)$ et que $\int_{-1}^{1} U(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} V(x)\mathrm{d}x$.

En déduire que la méthode est de degré $2d + 1$.

Exercice 4. Méthode de Gauss-Legendre à 3 points. On pose $Q = (1 - X^2)^3$, $R_3 = Q^{(3)}$, et $x_0 < x_1 < x_2$ les trois racines de R_3, et w_0, w_1, w_2 les poids de la formule de quadrature interpolatoire (d'après l'exercice précédent, on sait qu'elle est de degré d'exactitude 5).

Montrer que $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$, et en utilisant les polynômes $1, X, X^2$, que $w_0 + w_1 + w_2 = 1$, $w_0 = w_2$ et $w_0 + w_2 = \frac{5}{9}$.

En déduire l'expression de la formule de quadrature composée correspondant au découpage d'un intervalle $[a,b]$ en n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ pour $0 \leqslant i < n$, en notant $c_i = \frac{a_{i+1}-a_i}{2}$ et $h_i = \frac{a_{i+1}-a_i}{2}$.

Écrire une fonction `GaussLegendre3` ayant pour arguments f, a, b, n et renvoyant l'évaluation de la formule composée, pour la fonction f, sur n intervalles de même longueur dans $[a,b]$.

On évalue le code suivant. En quoi le résultat obtenu (ci-contre) indique un degré d'exactitude égal à 5 ?

```
valeurs_n=np.int_(np.logspace(0,3))
quad=[GaussLegendre3(np.cos,0,6,n) for n in valeurs_n]
erreurs=np.abs(np.array(quad)-np.sin(6))
plt.loglog(valeurs_n,erreurs)
plt.grid()
```