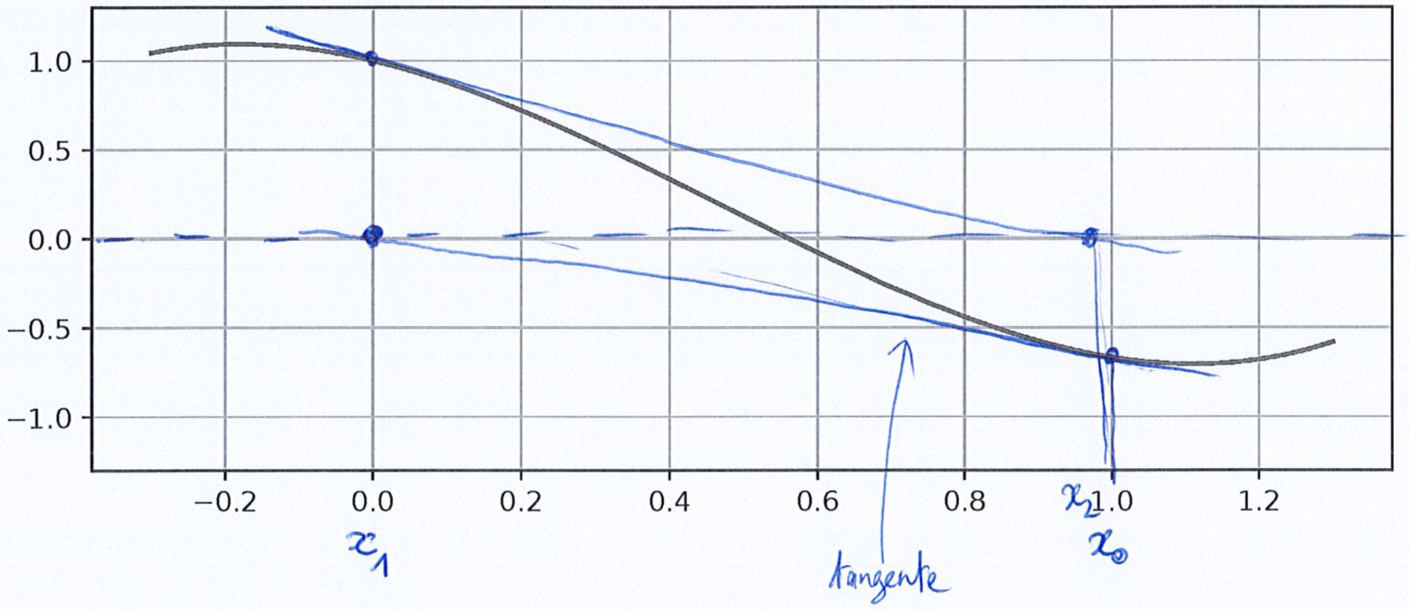
PARTIE
À
RABATTRE

Exercice 1. Méthode de Newton pour trouver un zéro de f : $x \mapsto \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{3}x^2 - x + 1$.

Rappeler la relation de récurrence liant les itérées x_{n+1} et x_n de la méthode de Newton, lorsque $f'(x_n) \neq 0$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On a tracé ci-dessous le graphique de la fonction f sur $[-0.3, 1.3]$, et posé $x_0 = 1$.
Déterminer graphiquement (et soigneusement) la position des itérées x_1 et x_2.



Déterminer les valeurs de x_1 et x_2. En déduire que la suite ne converge pas.

$f'(x) = 5x^2 - \frac{14}{3}x + 1$

$f(x_0) = f(1) = \frac{5}{3} - \frac{7}{3} - 1 + 1 = \frac{-2}{3}$

$f'(x_0) = f'(1) = 5 - \frac{14}{3} + 1 = \frac{15-14+3}{3} = \frac{-2}{3}$

$x_1 = \cancel{1} - \frac{-2/3}{-2/3} = 0$

$f(0) = 1$, $f'(0) = -1$

$x_2 = 0 - \frac{1}{-1} = 1 \boxed{= x_0}$

Donc par récurrence immédiate, (x_n) est périodique $\left(\begin{array}{l} = 1 = x_0 \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 = x_1 \text{ si } n \text{ impair} \end{array}\right)$ (et non constante)

donc ne converge pas

Énoncer le théorème de convergence locale de la méthode de Newton. S'applique-t-il pour f ? Est-ce en contradiction avec la question précédente ?

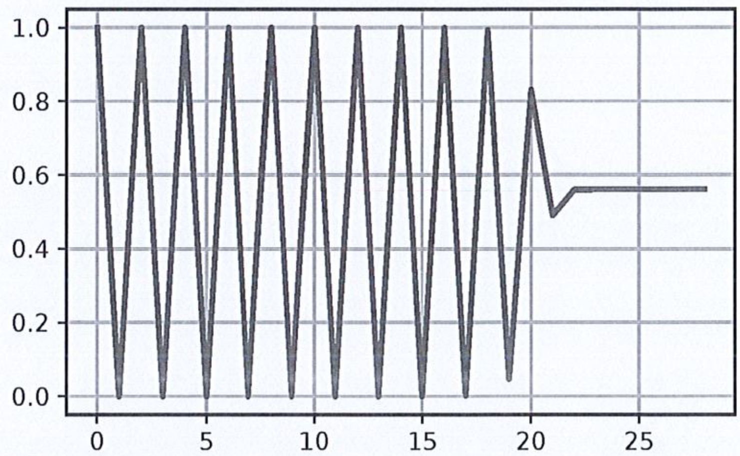
Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ (au voisinage de x_*), que $f(x_*) = 0$ et $f'(x_*) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que si $x_0 \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et converge au moins quadratiquement vers x_*.

Ici | f a bien un zéro x_* sur $[-0{,}3, 1{,}3]$ (par le TVI), et $f'(x_*) \neq 0$ (on peut le vérifier en calculant les racines de f'),
| f est $\mathcal{C}^2$ (polynôme).

mais la suite ne converge pas. C'est dû au fait que x_0 n'est pas suffisamment proche de x_* (convergence locale seulement).

On a implémenté la méthode ci-dessous. Expliquer la différence avec les résultats théoriques.

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  def f(x):
5      return 5/3 *x**3 - 7/3*x**2 - x + 1
6  def df(x):
7      return 5*x**2 - 14*x/3 -1
8
9  xn=1
10 lx=[xn]
11 for n in range(2,30):
12     dfxn=df(xn)
13     if dfxn!=0:
14         xn=xn-f(xn)/dfxn
15     lx.append(xn)
16 plt.plot(np.array(lx))
17 plt.grid()
```



À cause des erreurs d'arrondi, le calcul de $f'(x_0)$ et $f(x_0)$ ne renvoient pas exactement $-2/3$, et donc la valeur de x_1 renvoyée n'est pas exactement zéro. La suite semble périodique comme attendu sur les premières itérations, mais les erreurs d'arrondi s'accumulent, et finalement la suite obtenue converge vers l'approximation du zéro de f dans $[0, 1]$.

Sachant qu'on ne connaît pas a priori la limite, par quoi remplacer une des lignes du code pour observer la vitesse de convergence ?

On peut observer la vitesse de convergence sur les incréments $|x_{n+1} - x_n|$, (en échelle semi-logarithmique) en remplaçant la ligne 16 par

```
16 plt.semilogy(np.abs(np.diff(np.array(lx))))
```

ou :
```
T = np.array(lx)
inc = T[1:] - T[:-1]
```
puis `plt.semilogy(np.abs(inc))`

Exercice 2. Polynômes de Hermite, théorème du rang. Soient $x_0, \dots, x_d$ des réels distincts deux à deux.

Soit Φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_{2d+1}[X]$ associe $\Phi(P) = (P(x_0), \dots, P(x_d), P'(x_0), \dots, P'(x_d)) \in \mathbb{R}^{2d+2}$. Que peut-on dire sur P si $\Phi(P) = 0$?

Si $P(x_i) = 0$ et $P'(x_i) = 0$ alors x_i est racine double de P.
il y a $d+1$ racines doubles, donc au moins $2d+2$ racines comptées avec leur degré de multiplicité. Comme P est de degré au plus $2d+1$, il est nul. Donc $P = 0$.

En déduire que si $y_0, \dots, y_d$, et $z_0, \dots, z_d$ sont des réels, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2d+1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ et $P'(x_i) = z_i$ pour tout $i \in [\![0, d]\!]$.

Φ est linéaire de $\mathbb{R}_{2d+1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2d+2}$, tous deux de dimension $2d+2$. $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ (question précédente) donc Φ est injective.
Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im}(\Phi) = 2d+2 - 0 = \dim(\mathbb{R}^{2d+2})$ donc $\operatorname{Im}\Phi = \mathbb{R}^{2d+2}$.
Donc Φ est surjective. Donc $\exists!\, P, \Phi(P) = (y_0 \dots y_d, z_0, \dots z_d)$.

Utiliser ce qui précède pour montrer qu'il existe une fonction f pour laquelle les itérées de la méthode de Newton sont $x_0, \dots, x_d, x_0, \dots$ (périodiques de période $d+1$).

Il suffit d'avoir $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{y_n}{z_n}$ (pour $n = 0 \dots d-1$)
et $x_{d+1} = x_0 = x_d - \frac{y_d}{z_d}$.
Donc il suffit de prendre des y_i arbitraires différents de 0, et poser $z_i = \frac{x_i - x_{i+1}}{y_i}$ $(\neq 0)$. $\forall i < d$ et $z_d = \frac{x_0 - x_{d+1}}{y_d}$.
Puis de prendre pour f le polynôme défini à la question précédente.

Exercice 3. Méthode de Gauss-Legendre. Soit d un entier, et $x_0, \dots, x_d$ des réels deux à deux distincts. On se donne une formule de quadrature simple sur $[-1, 1]$ de la forme $I_{-1,1}(f) = 2\sum_{i=0}^{d} w_i f(x_i)$.

Si le degré d'exactitude est d ou plus, montrer que $I_{-1,1}(f) = \int_{-1}^{1} \Pi(f)(x)\mathrm{d}x$, où $\Pi(f)$ est le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points (x_i). On pourra utiliser les polynômes $L_i = \frac{\prod_{j\neq i} X - x_j}{\prod_{j\neq i} x_i - x_j}$.

Comme L_i est de degré d, on doit avoir $\boxed{I_{-1,1}(L_i)} = \int_{-1}^{1} L_i(x)\,dx$.

$$= 2\sum_{j=0}^{d} \underbrace{L_i(x_j)}_{\substack{=1 \text{ si } i=j \\ =0 \text{ si } i\neq j}} w_j = 2w_i$$

Donc $\boxed{I_{-1,1}(f) = \sum_{i=0}^{d} I_{-1,1}(L_i) \times f(x_i)} = I_{-1,1}\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{d} f(x_i) L_i}_{=\Pi(f)}\Big) = I_{-1,1}(\Pi(f))$

Comme $\Pi(f)$ est de degré au plus d, on a bien $I_{-1,1}(\Pi(f)) = \boxed{\int_{-1}^{1} \Pi(f)(x)\,dx}$

Montrer que le degré d'exactitude est strictement inférieur à $2d+2$.

Pour $P = \prod_{i=0}^{d} (X - x_i)^2$, de degré $2d+2$, et positif, on a

$\int_{-1}^{1} P(x)dx > 0$ (car $P \geq 0$, continu, non identiquement nul)

et $I_{-1,1}(P) = 2 \sum_{i=0}^{d} w_i \underbrace{P(x_i)}_{=0} = 0$

Donc la formule n'est pas exacte pour P. le degré ne peut pas être supérieur ou égal à $2d+2$

On cherche des réels $x_0, \ldots, x_d$ (distincts deux à deux) pour lesquels la formule $I_{-1,1}(f) = \int_{-1}^{1} \Pi(f)(x)\mathrm{d}x$ est de degré d'exactitude $2d+1$. Montrer qu'elle est dans tous les cas de degré supérieur ou égal à d.

On a $\underbrace{\Pi(P)}_{\uparrow} = P$ si $P \in \mathbb{R}_d[X]$. donc $\underline{I_{-1,1}(P) = \int_{-1}^{1} \Pi(P)(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P(x)dx}$.

unique polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ qui vaut $P(x_i)$ en x_i, c'est donc P.

la formule est exacte pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$.

Donc degré d'exactitude $\geq d$.

On pose $Q = (1-X^2)^{d+1}$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, d+1]\!]$, $Q^{(k)} = R_k(1-X^2)^{d+1-k}$, où $R_k \in \mathbb{R}_k[X]$ a k racines distinctes dans $]-1,1[$.

Par récurrence. $k=0$ est immédiat avec $R_0 = 1$.

- Si $Q^{(k)} = R_k(1-X^2)^{d+1-k}$ avec R_k ayant k racines distinctes dans $]-1,1[$ et $k \leq d$, alors $Q^{(k)}$ a $k+2$ racines distinctes (dans $[-1,1]$) puisque $Q^{(k)}(1) = Q^{(k)}(-1) = 0$.
- Donc par le théorème de Rolle appliqué $k+1$ fois, $Q^{(k+1)}$ a $k+1$ racines distinctes dans $]-1,1[$.

et $Q^{(k+1)} = Q^{(k)\prime} = R_k'(1-X^2)^{d+1-k} + R_k \times 2X \times (d+1-k)(1-X^2)^{d+1-k-1}$

$= \underbrace{\left(R_k'(1-X^2) + 2(d+1-k)X R_k\right)}_{:= R_{k+1} \in \mathbb{R}_{k+1}[X]}(1-X^2)^{d+1-(k+1)}$.

Comme $Q^{(k+1)}$ a $k+1$ racines dans $]-1,1[$, ce sont forcément des racines de R_{k+1}

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que pour tout $k \in [\![0, d+1]\!]$ $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\int_{-1}^{1} P(x)Q^{(k)}(x)\mathrm{d}x = (-1)^k \int_{-1}^{1} P^{(k)}(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

Par récurrence. pour $k=0$ il n'y a rien à faire $\int PQ = \int PQ$.

si $\int_{-1}^{1} P(x)Q^{(k)}(x) = (-1)^k \int_{-1}^{1} P^{(k)}(x)\,Q(x)\,dx$ pour $k \leq d$, (HR appliquée à P') alors

par IPP $\int_{-1}^{1} P(x)\,Q^{(k+1)}(x)\,dx = \underbrace{\left[P(x)\,Q^{(k)}(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} P'(x)\,Q^{(k)}(x)\,dx$

car $Q^{(k)}(1) = Q^{(k)}(-1) = 0$

$= (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} P^{(k+1)} Q(x)\,dx$.

On note $x_0, \ldots, x_d$ les racines distinctes de $R_{d+1} = Q^{(d+1)}$.
Soit $U \in \mathbb{R}_{2d+1}[X]$, on note $U = PR_{d+1} + V$, avec P et V dans $\mathbb{R}_d[X]$ (division euclidienne par R_{d+1}).
Montrer que $I_{-1,1}(U) = I_{-1,1}(V)$ et que $\int_{-1}^1 U(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 V(x)\mathrm{d}x$.

Comme $R_{d+1}(x_i) = 0$ on a $U(x_i) = V(x_i)\ \forall i$ donc $\underline{I_{-1,1}(U) = I_{-1,1}(V)}$

(par la première question $I_{-1,1}(U) = 2\sum w_i U(x_i) = I_{-1,1}(V)$).

Puis par la question précédente $\int_{-1}^1 P(x) Q^{(d+1)}(x) = (-1)^{d+1} \int_{-1}^1 \underbrace{P^{(d+1)}(x)}_{=0 \text{ car } P\in\mathbb{R}_d[X]} Q(x)\, dx = 0$

Donc $\int_{-1}^1 P(x) R_{d+1}(x) dx = 0$

Donc $\int_{-1}^1 U(x)\, dx = \int_{-1}^1 V(x)\, dx$.

En déduire que la méthode est de degré $2d+1$.

Comme $V \in \mathbb{R}_d[X]$, $I_{-1,1}(V) = \int_{-1}^1 V(x) dx$ puisque la méthode est de degré $\geq d$.

Donc $\int_{-1}^1 U(x)\, dx = I_{-1,1}(U)$. et ce $\forall U \in \mathbb{R}_{2d+1}[X]$ donc la méthode est de degré $\geq 2d+1$. Comme elle ne peut pas être de degré $2d+2$ (question précédente) elle est de degré $2d+1$

Exercice 4. Méthode de Gauss-Legendre à 3 points. On pose $Q = (1 - X^2)^3$, $R_3 = Q^{(3)}$, et $x_0 < x_1 < x_2$ les trois racines de R_3, et w_0, w_1, w_2 les poids de la formule de quadrature interpolatoire (d'après l'exercice précédent, on sait qu'elle est de degré d'exactitude 5).

Montrer que $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$, et en utilisant les polynômes $1, X, X^2$, que $w_0 + w_1 + w_2 = 1$, $w_0 = w_2$ et $w_0 + w_2 = \frac{5}{9}$.

$Q = 1 - 3X^2 + 3X^4 - X^6$

$Q' = -6X + 12X^3 - 6X^5$

$Q'' = -6 + 36X^2 - 30X^4$

$Q''' = 72X - 120X^3 = 24X(3 - 5X^2)$ racines $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

Donc $R_3(X) = -5 \times 24 \times X\left(X - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

Donc $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

on a $\int_{-1}^1 1\, dx = 2 = 2\sum_{i=0}^2 w_i \times 1$ donc $w_0 + w_1 + w_2 = 1$

$\int_{-1}^1 x\, dx = 0 = 2 \times (x_0 w_0 + \underset{0}{x_1} w_1 + x_2 w_2) = -2\sqrt{\frac{3}{5}} w_0 + 2\sqrt{\frac{3}{5}} w_1$ donc $\underline{w_0 = w_1}$

$\int_{-1}^1 x^2\, dx = \frac{2}{3} = 2\left(x_0^2 w_0 + x_1^2 w_1 + x_2^2 w_2\right) = 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)(w_0 + w_2)$

donc $w_0 + w_2 = \frac{2/3}{\frac{2\times 3}{5}} = \frac{5}{9}$.

En déduire l'expression de la formule de quadrature composée correspondant au découpage d'un intervalle $[a,b]$ en n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ pour $0 \leqslant i < n$. , en notant $c_i = \frac{a_{i+1}+a_i}{2}$ et $h_i = \frac{a_{i+1}-a_i}{2}$.

On a donc $w_0 = w_2 = \frac{5}{18}$ et $w_1 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$.

Donc $$I_{a_i,a_{i+1}} = (a_{i+1}-a_i) \sum_{j=0} w_j \, f\left(\frac{a_{i+1}+a_i}{2} + x_j \times \left(\frac{a_{i+1}-a_i}{2}\right)\right)$$

$$= (a_{i+1}-a_i)\left[\frac{5}{18} f\left(\frac{a_{i+1}+a_i}{2} - \sqrt{\frac{3}{5}}\,\frac{a_{i+1}-a_i}{2}\right) + \frac{4}{9} f\left(\frac{a_{i+1}+a_i}{2}\right) + \frac{5}{18} f\left(\frac{a_{i+1}+a_i}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}}\,\frac{a_{i+1}-a_i}{2}\right)\right]$$

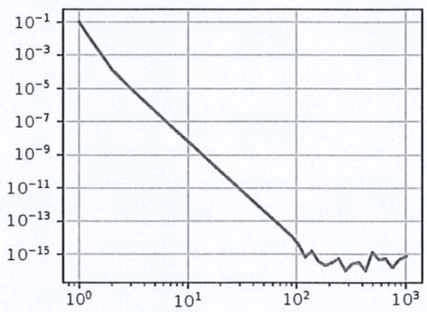
Donc $$I^{\text{composée}}_{a,b} = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\left[\frac{5}{18} f\left(c_i - \sqrt{\frac{3}{5}}\,h_i\right) + \frac{4}{9} f(c_i) + \frac{5}{18} f\left(c_i + \sqrt{\frac{3}{5}}\,h_i\right)\right].$$

Écrire une fonction `GaussLegendre3` ayant pour arguments f, a, b, n et renvoyant l'évaluation de la formule composée, pour la fonction f, sur n intervalles de même longueur dans $[a,b]$.

```
def GaussLegendre3(f,a,b,n):
    h=(b-a)/(2*n)
    delta=h*np.sqrt(3/5)
    s=0
    for i in range(n):
        c=a+i*2*h+h
        s+=2*h*(5/18*(f(c-delta)+f(c+delta))+4/9*f(c))
    return s
```

On évalue le code suivant. En quoi le résultat obtenu (ci-contre) indique un degré d'exactitude égal à 5 ?

```
valeurs_n=np.int_(np.logspace(0,3))
quad=[GaussLegendre3(np.cos,0,6,n) for n in valeurs_n]
erreurs=np.abs(np.array(quad)-np.sin(6))
plt.loglog(valeurs_n,erreurs)
plt.grid()
```



On s'attend à une erreur de l'ordre de $\frac{C}{n^{5+1}} = \frac{C}{n^6}$.

Le comportement affine (tant qu'on n'atteint pas l'erreur machine à partir de 100 points environ) de la courbe des erreurs (en échelle logarithmique en abscisses et ordonnées) indique une erreur de la forme $\frac{C}{n^\alpha}$.

On voit qu'en passant de $n=10$ à $n=100$ ($\times 10$), l'erreur a été divisée par 10^6. ($\sim 10^{-8} \rightarrow \sim 10^{-14}$)