Algèbre 4 et Méthodes numériques (L2 - 2025/2026)
Feuille de TD n° 2 — Approximation des fonctions et de leurs intégrales.

Cette feuille est largement tirée des feuilles de TD proposées par Guillaume Legendre (jusqu'en 2024), disponibles ici : `https://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/methnum/`

2.1 Interpolation polynômiale

Exercice 1. *Autres preuves de l'existence du polynôme interpolateur de Lagrange.*

1. Pour $x_0, \dots, x_n$ réels distincts, montrer que la matrice de van der Monde $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$ est inversible. En déduire l'existence de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour $y_0, \dots, y_n$ arbitraires.
2. Pour $x_0, \dots, x_n$ réels distincts, et $y_0, \dots, y_n$ arbitraires si $Q, R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont des polynômes tel que $Q(x_i) = y_i$ pour $0 \leqslant i < n$ et $R(x_i) = y_i$ pour $0 < i \leqslant n$, on définit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par
$$P(x) = \frac{(x - x_0)\, R(x) - (x - x_n)\, Q(x)}{x_n - x_0}.$$
Montrer que P est le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux couples $\{(x_i, y_i)\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

Exercice 2. *Polynôme d'interpolation de Hermite*

1. Pour $x_0, \dots, x_n$ des réels distincts, construire un polynôme P dans $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que $P(x_0) = 1$, et que l'on ait $P(x_i) = 0$ pour $0 < i \leqslant n$ et $P'(x_i) = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$.
2. Construire également un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que $Q'(x_0) = 1$, $Q'(x_i) = 0$ pour $0 < i \leqslant n$ et $Q(x_i) = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$.
3. En déduire que pour $y_0, \dots, y_n$ et $z_0, \dots, z_n$ arbitraires, il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que $H(x_i) = y_i$ et $H'(x_i) = z_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$.

2.2 Approximation des fonctions par interpolation

Exercice 3. Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré un, noté $\Pi_1 f$, d'une fonction réelle f définie et continue sur l'intervalle $[-1, 1]$, interpolée aux nœuds -1 et 1. Montrer que, si f est de classe C^2 sur $[-1, 1]$, on a alors
$$\forall x \in [-1, 1],\ |f(x) - \Pi_1 f(x)| \leq \frac{M_2}{2}(1 - x^2) \leq \frac{M_2}{2},$$
où $M_2 = \max\limits_{x \in [-1,1]} |f''(x)|$. Donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité est une égalité.

Exercice 4. Soit a un réel strictement positif. Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré un, noté $\Pi_1 f$, de la fonction $f\, :\, x \mapsto x^3$, interpolée aux nœuds 0 et a. Montrer que, pour tout x appartenant à $]0, a[$, il existe un réel c dans $[0, a]$ tel que
$$f(x) - \Pi_1 f(x) = \frac{f''(c)}{2}\, x(x - a),$$
et établir que $c = \frac{1}{3}(x + a)$.
Considérer ensuite la fonction $f\, :\, x \mapsto (2x - a)^4$ et montrer que, dans ce cas, il y a deux valeurs possibles pour c. Les déterminer.

Exercice 5. *Polynômes de Tchebychev et meilleurs points d'interpolation.*
On rappelle que si on sait que f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, alors une estimation sur l'erreur d'interpolation (aux points $x_0,\dots,x_n$) est donnée par

$$E_n(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(f)(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \sup_{x\in[a,b]} \Big| \prod_{k=0}^{n} (x-x_k) \Big|.$$

L'objectif est de montrer que les points $x_0,\dots,x_n$ appartenant à $[-1,1]$ et minimisant $\sup\limits_{x\in[-1,1]} \Big| \prod\limits_{k=0}^{n} (x-x_k) \Big|$ sont reliés aux racines d'un polynôme particulier. Pour $x\in[-1,1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Montrer que pour $\theta\in\mathbb{R}$, on a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et que l'on a pour tout $x\in[-1,1]$,
$$T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) - T_n(x).$$
2. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, T_{n+1} est un polynôme, de degré $n+1$, de coefficient dominant 2^n et dont les racines sont les nombres $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$, $k=0,\dots,n$ (T_{n+1} est appelé le $n+1^{\text{e}}$ *polynôme de Tchebychev de première espèce*).
3. On pose $x'_k = \cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right)$, pour $k=0,\dots,n+1$. Montrer que les x'_k sont des extrema locaux de la fonction $x\mapsto T_{n+1}(x)$ sur $[-1,1]$ et que $T_n(x'_k) = (-1)^k$.
4. Montrer alors que si Q est un polynôme de degré $n+1$, de coefficient dominant 2^n, alors on a $\sup_{x\in[-1,1]}|Q(x)| \geqslant 1$.
Indication : raisonner par l'absurde et montrer que le polynôme $T_n - Q$ est nul, en montrant l'existence de $n+1$ racines.
En déduire que si $\widetilde{x}_k$ sont des réels de $[-1,1]$, on a
$$\sup_{x\in[-1,1]} \Big| \prod_{k=0}^{n} (x-x_k) \Big| \leq \sup_{x\in[-1,1]} \Big| \prod_{k=0}^{n} (x-\widetilde{x}_k) \Big|.$$

Exercice 6. *Erreur d'approximation pour l'interpolation de Hermite*
Soit f une fonction de classe C^{2n+2} sur $[a,b]$ et $x_0 < \dots < x_n$ des points de $[a,b]$. On suppose que l'on a un polynôme $P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que $P(x_i) = f(x_i)$ et $P'(x_i) = f'(x_i)$ pour $0\leqslant i\leqslant n$.
Pour x un réel fixé dans $[a,b]$ différent de tous les x_i, on introduit la fonction w définie sur $[a,b]$ par

$$w(t) = f(t) - P(t) - \frac{\prod\limits_{i=0}^{n} (t-x_i)^2}{\prod\limits_{i=0}^{n} (x-x_i)^2} \left(f(x) - P(x)\right).$$

1. Montrer que w s'annule en tous les x_i et en x. En déduire que w' s'annule en $n+1$ points différents des x_i.
2. Monter que $w'(x_i) = 0$ pour $0\leqslant i\leqslant n$.
3. En déduire qu'il existe un réel ξ dans $[a,b]$ tel que $w^{(2n+2)}(\xi) = 0$.
4. Montrer qu'on a alors
$$f(x) - P(x) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n} (x-x_i)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi).$$
5. En déduire que pour tout réel x dans $[a,b]$,
$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\prod\limits_{i=0}^{n} |x-x_i|^2}{(2n+2)!} \max_{a\leq\xi\leq b} |f^{(2n+2)}(\xi)|.$$

2.3 Intégration numérique : formules de quadrature

Exercice 7. On considère la formule de quadrature sur l'intervalle $[-1,1]$ donnée par

$$\forall f \in C^0([-1,1]),\ I_{ap}(f) = \alpha_0\, f\left(-\frac{1}{2}\right) + \alpha_1\, f(0) + \alpha_2\, f\left(\frac{1}{2}\right).$$

1. Déterminer les poids α_0, α_1 et α_2 de sorte que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.
2. Quel est le degré d'exactitude de la formule ainsi obtenue ?

Exercice 8. *Quadrature de Gauss à deux points.*
Étant donnés deux points x_0 et x_1 dans l'intervalle $[-1,1]$ tels que $x_0 < x_1$ et deux réels α_0 et α_1, on considère la formule de quadrature suivante sur l'intervalle $[-1,1]$:

$$\forall f \in C^0([-1,1]),\ I_{ap}(f) = \alpha_0\, f(x_0) + \alpha_1\, f(x_1).$$

Le but de cet exercice est de déterminer des valeurs pour les nœuds x_0 et x_1 et les poids α_0 et α_1 conduisant à une formule de quadrature de degré d'exactitude le plus élevé possible.

1. Construire les polynômes de Lagrange l_0 et l_1 associés aux points x_0 et x_1.
2. Déterminer les poids α_0 et α_1 tels que la formule soit exacte pour ces deux polynômes. En déduire qu'elle est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à un.
3. Déterminer une relation entre les nœuds x_0 et x_1 pour que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.
4. Répondre à la même question pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
5. Montrer que le degré d'exactitude de la formule de quadrature est au plus égal à trois.
   Indication : on pourra utiliser le polynôme $\omega(x) = ((x-x_0)(x-x_1))^2$.
6. En déduire la formule de quadrature à deux nœuds sur l'intervalle $[-1,1]$ et de degré d'exactitude égal à trois.

Exercice 9. *Formule du point milieu composée avec ajout de la dérivée.*
Si f est une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$, on pose

$$I_{a,b}(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b) - f'(a)).$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}^3[x]$, on a $I_{-1,1}(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x$.
2. Si f est de classe C^4 sur $[-1,1]$, avec $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, montrer que

$$\Big|\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - I_{-1,1}(f)\Big| \leqslant \Big(\frac{2}{5!} + \frac{2\cdot 2^2}{24\cdot 3!}\Big) \sup_{\xi\in[-1,1]} |f^{(4)}(\xi)| = \frac{23}{180}\|f^{(4)}\|_{\infty,[-1,1]}.$$

3. En déduire que pour f de classe C^4 sur $[a,b]$, on a

$$\Big|\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x - I_{a,b}(f)\Big| \leqslant \frac{23(b-a)^5}{5760}\, \|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]}.$$

4. En déduire, en posant $h = \frac{(b-a)}{m}$ et $a_k = a + kh$ pour $k \in [\![0,m]\!]$, la formule d'estimation d'erreur pour la formule composée

$$\Big|\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{m-1} I_{a_k,a_{k+1}}(f)\Big| \leqslant \frac{23(b-a)}{5760}\, \|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]}\, h^4.$$

5. Si on a accès au calcul de la dérivée de f, quel est l'intérêt d'une telle formule composée ? Comparer en terme de coût de calcul et de précision avec les formules de point milieu et de Simpson.

Exercice 10. *Erreur pour la formule de quadrature de Simpson.*
Soit $[a, b]$ un intervalle fermé, borné et non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La formule de Simpson est une formule de quadrature interpolatoire pour laquelle une approximation de l'intégrale de la fonction f entre a et b est obtenue en remplaçant f par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré deux aux nœuds $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$, noté $\Pi_2 f$.

1. Définir et expliciter le polynôme d'interpolation $\Pi_2 f$, puis déterminer

$$I_2(f) = \int_a^b \Pi_2 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i\, f(x_i).$$

2. On introduit l'erreur de quadrature $E_2(f) = \displaystyle\int_a^b (f(x) - \Pi_2 f(x))\,\mathrm{d}x$. On va montrer, en supposant que f est de classe C^4, que l'on a

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c), \text{ avec } c \text{ appartenant à }]a, b[.$$

Pour t appartenant à $[-1, 1]$, on pose $F(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right)$ et

$$G(t) = \int_{-t}^{t} F(u)\,\mathrm{d}u - \frac{t}{3}\left[F(-t) + 4F(0) + F(t)\right].$$

(a) Montrer que $E_2(f) = \frac{1}{2}(b-a)G(1)$.

(b) Soit $H(t) = G(t) - t^5\, G(1)$. Montrer qu'il existe un réel ζ dans $]-1, 1[$ tel que $H'''(\zeta) = 0$.

(c) Montrer qu'il existe un réel ξ dans $]-\zeta, \zeta[$ tel que

$$H'''(\zeta) = -\frac{2\zeta^2}{3}\left[F^{(4)}(\xi) + 90G(1)\right],$$

et, par suite, que

$$G(1) = -\frac{1}{90} F^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^4}{1440} f^{(4)}(c),$$

avec c dans $]a, b[$.

3. Quel est le degré d'exactitude de cette formule de quadrature ?