Algèbre linéaire 3 (L2 - 2023/2024)
Feuille de TD n$^{\mathrm{o}}$ 2 — Réduction des endomorphismes (suite).

Cette feuille est tirée des feuilles de TD proposées par Guillaume Legendre (2020 à 2022), disponibles ici : `https://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/alglin3/`

Polynôme caractéristique

Exercice 1. Si A, B, C, D sont des matrices rectangulaires (de tailles $n_1 \times m_1$, $n_1 \times m_2$, $n_2 \times m_1$, $n_2 \times m_2$), on note $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{n,m}$ la matrice par blocs correspondante, avec $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2$:

$$m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n_1 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant m_1, \\ b_{i,j'} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n_1 \text{ et } j = m_1 + j' \text{ avec } 1 \leqslant j' \leqslant m_2, \\ c_{i',j} & \text{si } i = n_1 + i' \text{ avec } 1 \leqslant i' \leqslant n_2 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant m_1, \\ d_{i',j'} & \text{si } i = n_1 + i' \text{ avec } 1 \leqslant i' \leqslant n_2 \text{ et } j = m_1 + j' \text{ avec } 1 \leqslant j' \leqslant m_2. \end{cases}$$

1. Si A', B', C', D' sont des matrices tailles $m_1 \times p_1$, $m_1 \times p_2$, $m_2 \times p_1$, $m_2 \times p_2$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ alors montrer que $MN = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$.
2. Si $Q \in M_{m,m}(\mathbb{K})$ et $R \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, montrer que $\begin{vmatrix} \alpha I_n & R \\ 0 & Q \end{vmatrix} = \alpha^n \det(Q)$.
3. Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ deux matrices. On peut donc obtenir des matrices carrées AB (de taille $n \times n$) et BA (de taille $m \times m$). Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda^m \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda)$.

Exercice 2. Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$. Vérifier que

$$\chi_A(X) = X^3 - \operatorname{tr}(A)X^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) X - \det(A).$$

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit M et N deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que MN est inversible si et seulement si M et N sont inversibles.
2. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \emptyset.$$

Diagonalisation

Exercice 4. Diagonaliser les matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Expliquer sans calcul pourquoi la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 6. Parmi les matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{R})$ (les matrices $E_{i,j}$ avec des zéros partout sauf à la ligne i, colonne j, ou le coefficient est 1), lesquelles sont diagonalisables ?

Exercice 7. Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = P - (X+1)P'$. Justifier que f est diagonalisable et donner son spectre.

Exercice 8. Soit n un entier naturel non nul, $E = M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(M) = M^\top$. Déterminer le spectre de f et montrer que cet endomorphisme est diagonalisable.

Exercice 9. Soit a, b et c trois nombres réels. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$. est-elle diagonalisable ?

Exercice 10. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 11. Soit a, b et c des nombres complexes. On pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = M(0,1,0)$.

1. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I_3, J et J^2.
2. Montrer que J est diagonalisable et donner son spectre.
3. En déduire que $M(a,b,c)$ est diagonalisable et donner son spectre.

Exercices supplémentaires

Exercice 12. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_A(X) = X^n - 1$. Déterminer A^{-1} en fonction de A.

Exercice 13. Soit n un entier naturel strictement plus grand que 2. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

de $M_n(\mathbb{C})$. À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice A est-elle inversible ?

Exercice 14. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la matrice A^k est triangulaire supérieure. Ce résultat reste-t-il vrai si on ne suppose pas que A est inversible ?

Exercice 15. À quelle(s) condition(s) sur les réels a, b et c la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 16. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont valeurs propres. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 17. Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Montrer que f est diagonalisable.