# Algèbre linéaire 3 (L2 - 2023/2024)
# Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 4 — Formes bilinéaires.

Cette feuille est tirée en partie des feuilles de TD proposées par Guillaume Legendre (2020 à 2022), disponibles ici : `https://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/alglin3/`

**Exercice 1.** Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels d'ordre 2. On considère l'application $b$ de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (A, B) \in M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}),\ b(A, B) = \operatorname{tr}(A^\top B).$$

1. Vérifier que $b$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E$.
2. Montrer que pour tout $A$ de $E$, $b(A, A) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $A = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.
3. Déterminer la matrice de $b$ relativement à la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 2.** Donner l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices suivantes relativement à la base canonique.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3.** Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application $b$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ b(P, Q) = \int_0^1 P(t) Q'(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Justifier que $b$ est une forme bilinéaire sur $E$.
2. Déterminer la matrice de $b$ relativement à la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ de $E$.
3. Quel est le rang de $b$ ?
4. La forme $b$ est-elle symétrique ? Antisymétrique ? Déterminer sa partie symétrique et sa partie antisymétrique.
5. A-t-on $b(P, P) \geq 0$ pour tout polynôme $P$ de $E$ ? À quelle condition sur $P$ a-t-on $b(P, P) = 0$ ?

Répondre aux mêmes questions avec $b(P, Q) = \int_0^1 P(t) Q(1-t)\, \mathrm{d}t$ et $b_k(P, Q) = \sum_{i=1}^k P(i) Q(i)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 4.** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ une base de $E$ et $b$ une forme sesquilinéaire à gauche sur $E$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $b(x, y)$, $b(x, x)$ et $b(y, y)$ dans les deux cas suivants :
   (a) $x = e_1 + \mathrm{i}\, e_2$ et $y = e_1 - \mathrm{i}\, e_2$,
   (b) $x = e_1 + 2\, e_2$ et $y = \mathrm{i}\, e_2$.
2. En déduire qu'il existe une base de $E$ relativement à laquelle la forme $b$ a pour matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible $P$ telle que $\overline{P}^\top M P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

**Exercice 5.** Déterminer lesquelles des applications suivantes définissent une forme quadratique et, le cas échéant, donner leur forme polaire.

(a) $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = P(0)P(1)P(2)$.

(b) $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = 2\,P(1)P'(1)$.

(c) $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = |P(0)P(1)|$.

**Exercice 6.** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $b$ une forme bilinéaire sur $E$. On note $q$ la forme quadratique associée à $b$. Établir que

1. $\forall (x, y, z) \in E^3$, $q(x + y) + q(y + z) + q(x + z) - q(x + y + z) = q(x) + q(y) + q(z)$.
2. $\forall (x, y) \in E^2$, $q(x + y) + q(x - y) = 2\,q(x) + 2\,q(y)$ et $q(x + y) - q(x - y) = 2\,(b(x, y) + b(y, x))$.

**Exercice 7.** On considère la forme quadratique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = {x_1}^2 + 4\,{x_2}^2 - 3\,x_1x_2.$$

1. Déterminer la matrice de $q$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la forme polaire de $q$.
3. Réduire $q$ sous la forme d'une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

**Exercice 8.** Soit une forme quadratique sur un espace vectoriel réel, que l'on suppose définie. Montrer qu'elle garde un signe constant.

## Exercices supplémentaires

**Exercice 9.** $\diamond$ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $b$ une forme bilinéaire sur $E \times E$ telle que

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ b(x, y) = 0 \Leftrightarrow b(y, x) = 0.$$

Montrer que $b$ est symétrique ou antisymétrique.

**Exercice 10.** Soit $n$ un entier naturel non nul, $q_1$ et $q_2$ deux applications respectivement définies par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ q_1(A) = (\mathrm{tr}(A))^2 \text{ et } q_2(A) = \mathrm{tr}(A^\top A).$$

Montrer que $q_1$ et $q_2$ sont des formes quadratiques. Sont-elles positives ? Définies positives ?

**Exercice 11.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $q$ une forme quadratique sur $E$. On dit qu'un vecteur $x$ de $E$ est *isotrope* pour $q$ si $q(x) = 0$ et qu'un couple de vecteurs $(x, y)$ de $E$ sont orthogonaux pour $q$ si $b(x, y) = 0$, où $b$ est la forme polaire de $q$.

1. Soit $x$ un vecteur de $E$. Montrer que

$$x \text{ est isotrope pour } q \implies \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\,x \text{ est isotrope pour } q.$$

2. Soit $x$ et $y$ deux vecteurs de $E$ qu'on suppose isotropes pour $q$. Montrer que

$$x + y \text{ est isotrope pour } q \implies x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux pour } q.$$

**Exercice 12.** $\diamond$ Soit $n$ un entier naturel non nul. La matrice d'ordre $n$ $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? Si oui, est-elle définie ?