# Algèbre linéaire 3 (L2 - 2023/2024)
# Feuille de TD n° 7 — Espaces euclidiens : Projections orthogonales (suite), endomorphismes d'un espace euclidien (début : isométries).

Cette feuille est tirée en partie des feuilles de TD proposées par Guillaume Legendre (2020 à 2022), disponibles ici : `https://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/alglin3/`

**Exercice 1.** On considère $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique et le plan $P$ d'équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2\,x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer les matrices de la projection orthogonale sur $P$ et de la symétrie orthogonale par rapport à $P$.
2. Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à $P$.

**Exercice 2.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de :
- la projection orthogonale sur la droite d'équations $3\,x_1 = 6\,x_2 = 2\,x_3$,
- la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur unitaire $\boldsymbol{u} = (a, b, c)$,
- la projection orthogonale sur le plan d'équation $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$, où les réels $a$, $b$ et $c$ sont les coordonnées du vecteur $u$ ci-dessus.

**Exercice 3.** Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et $p$ un endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $p$ est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation. Déterminer la distance du point de coordonnées $(1, 1, 1)$ à ce plan.

**Exercice 4.** (méthode des moindres carrés). Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On considère une matrice $A$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ dont le rang vaut $p$ et un vecteur $b$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $x_0$ de $\mathbb{R}^p$ tel que $\|Ax_0 - b\| = \inf\{\|Ax - b\| \mid x \in \mathbb{R}^p\}$.
2. Montrer que $x_0$ est l'unique solution de $A^\top Ax = A^\top b$.
3. Application : déterminer $\inf\left\{(x + y - 1)^2 + (x - y)^2 + (2x + y + 2)^2 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

**Exercice 5.** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On considère l'endomorphisme $u$ de $E$ défini par $u(P)(X) = P(-X)$. Montrer que $u$ est une symétrie orthogonale.

**Exercice 6.** Soit $n$ un entier naturel non nul et $u_1, \dots, u_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 = 1$. On considère la matrice $A$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ a_{ij} = u_i u_j,$$

et $B = 2A - I_n$.
Montrer que $B$ est orthogonale. Quelles sont les valeurs propres de $A$ ?

**Exercice 7.** (sur les coefficients d'une matrice orthogonale) Soit $n$ un entier naturel non nul $M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ une matrice orthogonale d'ordre $n$.

1. Montrer que $|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}| \leq n$. Cette inégalité est-elle optimale ?
2. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \leq n^{3/2}$.
3. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \geq n$.

**Exercice 8.** (valeurs propres réelles d'une isométrie vectorielle). On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et $Q$ une matrice orthogonale d'ordre $n$.

1. On suppose que $Q$ admet une valeur propre réelle $\lambda$ et on considère un vecteur propre $X$ associé à cette valeur propre. En calculant de deux façons différentes $\|QX\|^2$, montrer que $\lambda^2\|X\|^2 = \|X\|^2$.
2. En déduire que $\mathrm{Sp}(Q) \cap \mathbb{R} \subset \{-1, 1\}$.
3. Donner un exemple de matrice orthogonale d'ordre 2 qui ne possède pas de valeur propre réelle.

## Exercices supplémentaires

**Exercice 9.** [$\diamond$ (déterminant de Gram)] Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $p$ ($p > 2$) sur $\mathbb{R}$, de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour toute famille de vecteurs $\{u_1, \ldots, u_n\}$ donnée de $E$, on pose $G(u_1, \ldots, u_n) = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ (*matrice de Gram*) et $\gamma(u_1, \ldots, u_n) = \det(G(u_1, \ldots, u_n))$ (*déterminant de Gram*).

1. Montrer que $\mathrm{rang}(G(u_1, \ldots, u_n)) = \mathrm{rang}(\{u_1, \ldots, u_n\})$.
2. Montrer que la famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est liée si et seulement si $\gamma(u_1, \ldots, u_n) = 0$ et qu'elle est libre si et seulement si $\gamma(u_1, \ldots, u_n) > 0$.
3. On suppose maintenant que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre dans $E$ (et donc que $n \leq p$). On pose $F = \mathrm{Vect}(\{u_1, \ldots, u_n\})$. Pour $x$ dans $E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de $x$ sur $F$ puis $d_F(x) = \|x - p_F(x)\|$ la distance de $x$ à $F$. Montrer que $d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x, u_1, \ldots, u_n)}{\gamma(u_1, \ldots, u_n)}}$.

**Exercice 10.** Soit $n$ un entier naturel, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts. On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2, \ \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. Vérifier que la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $E$.
2. Déterminer une base orthonormale de $E$.
3. Déterminer la distance d'un polynôme $Q$ de $E$ au sous-espace $H = \{P \in E \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$.

**Exercice 11.** On considère l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique.

1. Déterminer l'orthogonal de $A_3(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ à $A_3(\mathbb{R})$.

**Exercice 12.** Prouver l'existence et l'unicité des réels $a$ et $b$ tels que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 \, \mathrm{d}x$ soit minimum. Les calculer.

**Exercice 13.** Caractériser les matrices orthogonales qui sont triangulaires supérieures.

**Exercice 14.** [(conditions nécessaires et suffisantes)] Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ca$, et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $M$ appartient à $O(3)$ si et seulement $\sigma = 0$ et $S = \pm 1$.
2. Démontrer que $M$ appartient à $SO(3)$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = 1$.