

Algèbre linéaire 3 (L2 - 2023/2024)

Feuille de TD n° 8 — Endomorphismes des espaces euclidiens (suite).

Cette feuille est tirée en partie des feuilles de TD proposées par Guillaume Legendre (2020 à 2022), disponibles ici : <https://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/alglin3/>

Exercice 1. (matrice de Householder) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout élément u non nul de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on désigne par $H(u)$ la matrice

$$H(u) = I_n - 2 \frac{UU^\top}{U^\top U}$$

où la matrice colonne U représente le vecteur u dans la base canonique.

1. Montrer que la matrice $H(u)$ est symétrique et orthogonale.
2. Soit Q une matrice orthogonale d'ordre n . Montrer que si $V = QU$ alors $H(v) = QH(u)Q^\top$, où v est l'élément de $\mathbb{R}^n$ représenté par V dans la base canonique.
3. On désigne par $\mathcal{D}$ la droite vectorielle engendrée par u et par $\mathcal{D}^\perp$ l'hyperplan orthogonal de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par $H(u)$ et que $H(u)W = W$ pour toute matrice colonne W représentant un élément w de $\mathcal{D}^\perp$.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien et f une application de E dans E telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 3. Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E vérifiant, pour tout vecteur x de E , $\langle f(x), x \rangle = 0$. Que dire de f ?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel euclidien, f et g deux endomorphismes symétriques de E .

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.
2. Montrer que $f \circ g$ est symétrique si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 5. Caractériser les endomorphismes autoadjoints et orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien.

Exercice 6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, E un espace euclidien de dimension n , a un vecteur unitaire de E et λ un réel.

1. Montrer que

$$f(x) = x + \lambda \langle x, a \rangle a$$

définit un endomorphisme autoadjoint de E .

2. Déterminer le spectre de f et les sous-espaces propres associés.

Exercice 7. Soit A une matrice réelle.

1. Montrer que $A^\top A$ est symétrique et positive.
2. Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top A)$, puis que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top A)$.

Exercice 8. Soit A une matrice réelle symétrique. On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$. Que dire de A ? On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 9. Soit f et g deux endomorphismes d'un espace euclidien E qui commutent entre eux. On suppose que les matrices S et T de f et g dans une base orthonormale de E sont respectivement symétrique et antisymétrique. Montrer qu'on a

$$\forall x \in E, f(x) \perp g(x) \text{ et } \|f(x) + g(x)\| = \|f(x) - g(x)\|.$$

Exercice 10. Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E . On suppose qu'il existe une constante réelle α positive ou nulle telle que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|.$$

Montrer que $f^2 = \alpha^2 Id_E$.

Exercice 11. Soit n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que les coefficients diagonaux sont strictement supérieurs à 1, et les coefficients hors de la diagonale sont tous égaux à 1. Montrer que A est symétrique définie positive.

Exercices supplémentaires

Exercice 12. Déterminer les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ symétriques, orthogonales et dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \vdots & \vdots & & 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

Exercice 14. Soit A une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que toute valeur propre de A est de module égale à 1.
2. Montrer que si X et Y sont des vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres λ et μ avec $\lambda \notin \{\mu, \bar{\mu}\}$, alors $X^\top Y = 0$ et $X^\top \bar{Y} = 0$.
3. Soit $\lambda = e^{i\alpha}$, $0 < \alpha < \pi$, une valeur propre (complexe) de A et X un vecteur propre associé.
 - (a) Montrer que $X^\top X = 0$.
 - (b) Soit $U = \frac{1}{2}(X + \bar{X})$ et $V = \frac{1}{2i}(X - \bar{X})$. Montrer que $F = \text{Vect}\{U, V\}$ est stable par A et donner la matrice de la restriction de A à F dans la base $\{U, V\}$.
 - (c) Montrer que si Z est un vecteur propre de A associé à une valeur propre réelle, alors $U^\top Z = 0$ et $V^\top Z = 0$.
 - (d) Soit $\mu = e^{i\beta}$, $0 < \beta < \pi$, $\beta \neq \alpha$, une valeur propre de A et Y un vecteur propre associé. Calculer $(X + \bar{X})^\top (Y + \bar{Y})$.

Exercice 15. $\diamond$ (exponentielle de matrice antisymétrique et groupe spécial orthogonal) Soit n un entier naturel non nul. Pour une matrice A , on note e^A la matrice $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$. On peut montrer que cette série est

bien définie, au sens où chaque coefficient de la matrice $\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$ converge lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Montrer que, pour toute matrice réelle antisymétrique A , la matrice e^A est un élément de $O(n)$.
2. Si A est antisymétrique, montrer que $\det(e^A) = 1$ (on pourra trigonaliser A dans $\mathbb{C}$).
3. Montrer que toute matrice de $SO(n)$ est de la forme e^A , où A est une matrice antisymétrique réelle.