

Algèbre linéaire 3 (L2 - 2023/2024)

Feuille de TD n° 9 — Endomorphismes des espaces euclidiens (fin).

Cette feuille est tirée en partie des feuilles de TD proposées par Guillaume Legendre (2020 à 2022), disponibles ici : <https://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/alglin3/>

Exercice 1. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n non nulle. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de f , comptées avec leur multiplicité. Montrer que

$$\forall x \in E, \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Exercice 2. Soit E un espace euclidien de dimension n , u un endomorphisme symétrique de E , $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ deux bases orthonormales de E .

1. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u(f_i)\|^2$.
2. Soit A une matrice réelle symétrique d'ordre n , de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (comptées avec leur multiplicité). Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^\top$.

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad 3. A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Interpréter géométriquement l'endomorphisme qui est représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2 et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

de $M_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que l'on a $a_{ij} = 1$ si $i = j + 1$ ou $i = j - 1$ et 0 sinon).

1. Soit λ un réel. Que peut-on dire du rang de $A - \lambda I_n$?
2. Montrer que A admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

Exercice 6. Déterminer les matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AA^\top AA^\top A = I_n$.

Exercice 7. Pour $n \geq 2$, on considère A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les valeurs propres de $B = A^\top A$ sont strictement positives.
2. Montrer que si la famille $\{X_1, \dots, X_n\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale et que la famille $\{AX_1, \dots, AX_n\}$ est orthogonale, alors les vecteurs X_i , $1 \leq i \leq n$, sont des vecteurs propres de la matrice B .

Exercice 8. (« réduction » simultanée) Soient M et N deux matrices symétriques réelles d'ordre n , telles que la matrice M soit définie positive. Montrer qu'il existe une matrice inversible C telle que

$$C^\top MC = I_n \text{ et } C^\top NC = D,$$

où D est une matrice diagonale réelle.

Exercice 9. (racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit M une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une matrice R symétrique positive telle que $M = R^2$. Que dire de l'unicité d'une telle matrice ?

Exercice 10. (décomposition polaire) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (U, H) , U étant orthogonale et H symétrique définie positive, tel que $A = UH$.

Exercice 11. Montrer que les matrices $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ et $-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ suivantes sont orthogonales et décrire géométriquement les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ qu'elles représentent.

Exercice 12. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une rotation vectorielle et déterminer son axe.

Exercice 13. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la rotation vectorielle d'axe dirigé et orienté par le vecteur $u = e_1 - 2e_2$ et d'angle de mesure $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 14.

1. Trouver une matrice orthogonale U de $O(2)$ qui vérifie $U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\det(U) = 1$. Une telle matrice U est-elle unique ? Calculer $U \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.
2. Trouver une matrice orthogonale U de $O(2)$ qui vérifie $U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\det(U) = -1$. Une telle matrice U est-elle unique ?
3. Soit $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ et U une matrice orthogonale U de $O(2)$ telle que $Uv = v$. Montrer que soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, soit $\det(U) = -1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 15. (factorisation de Cholesky et factorisation QR) Soit n un entier strictement positif et A une matrice réelle d'ordre n .

1. On suppose dans cette question que la matrice A est symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $A = R^T R$.
2. On suppose dans cette question que la matrice A est inversible. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (Q, R) , avec Q une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, tel que $A = QR$.

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la suite de matrices $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge.
2. Soit $N = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k$. Caractériser géométriquement l'endomorphisme associé à N .
3. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de vecteurs colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et $X_{k+1} = AX_k$ pour tout entier naturel k . Prouver que cette suite converge et déterminer sa limite en fonction de u_0 , v_0 et w_0 .

Exercice 17. Préciser la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés aux matrices suivantes.

1. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.