Algèbre linéaire 3 (L2 - 2023/2024)
Plan de cours et planning prévisionnel.

Amic Frouvelle

22 décembre 2023

Le plan de ce cours est basé sur le document de cours de Guillaume Legendre. Chaque notion traitée est précédé du numéro (chapitre.section) correspondant. Certains points dans le document ne sont pas traités en cours (et ne font pas partie du programme pour les examens). D'autres (peu) sont traitées de manière différente par rapport au document (par exemple, démonstrations différentes), mais les sujets sont au programme. Enfin dans de rares cas (essentiellement la partie sur le calcul matriciel par bloc), ce qui est traité en cours n'est pas dans le document, mais cela fait bien partie du programme des examens.

Séance 1, 5/09 Chapitre 1 : Réduction des endomorphismes.

— 1.1 Sous-espaces stables.
— 1.1 Sous-espaces stables particuliers pour des endomorphismes qui commutent.
— 1.1 Représentation par blocs dans des bases adaptées aux sous-espaces stables.
— 1.2 Valeurs propres, vecteurs propres, spectre.
— 1.2 Sous-espace propre.

Séance 2, 11/09

— 1.2 Les sous-espaces propres sont en somme directe. En dimension finie n, au plus n valeurs propres.
— 1.3 Polynôme caractéristique. Degré et coefficients remarquables du polynôme caractéristique.
— 1.3 Multiplicité algébrique d'une valeur propre.
— 1.3 Propriétés du polynôme caractéristique : $\chi_A = \chi_{A^\top}$, polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour des matrices carrées A et B.

Séance 3, 18/09

— (Hors Poly) Quelques résultats de base sur le calcul matriciel par blocs : calcul de produits matriciels, calcul d'inverses et de déterminants de matrices triangulaires par blocs.
— 1.4 Dimension d'un sous-espace propre.
— 1.4 Endomorphisme diagonalisable.
— 1.4 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité : polynôme caractéristique scindé et dimensions des sous-espaces égales aux multiplicités algébriques des racines.
— 1.4 Condition suffisante de diagonalisabilité : polynôme scindé à racines simples.
— Exemple pratique de méthode de diagonalisation d'une matrice : $M = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$, les vecteurs colonnes de P donnant une base de vecteurs propres.
— 1.5 Trigonalisation, condition nécessaire et suffisante : polynôme scindé.

Séance 4, 25/09

— 1.5 Exemples pratiques de trigonalisation : méthode vecteur par vecteur une fois les vecteurs propres trouvés, cas de matrice déjà triangulaire par blocs.
— 1.6 Polynôme annulateur.
— 1.6 Propriété des valeurs propres : racines de tout polynôme annulateur.
— 1.6 Existence d'un polynôme annulateur en dimension finie : la famille $(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{n^2})$ est liée.
— 1.6 Lemme : calcul du polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
— 1.6 Théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$.

Séance 5, 2/10

— 1.6 Polynôme minimal, définition, exemples.

— 1.6 Unicité, tout polynôme annulateur est un multiple du polynôme minimal.
— 1.6 Forme du polynôme minimal lorsque le polynôme caractéristique est scindé.
— 1.6 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables : le polynôme minimal est scindé à racines simples.
— 1.6 Corollaire : diagonalisabilité équivaut à l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples.
— 1.6 Récapitulatif des propriétés de diagonalisabilité / trigonalisabilité.

Ici s'arrête le programme pour le CC du 10/10.

Séance 6, 9/10 Chapitre 2/3 : Formes bilinéaires et formes quadratiques. Le programme est ici très réduit par rapport au poly (surtout sur les formes quadratiques).
— 2.1 Formes bilinéaires (réelles) sur $E \times F$.
— 2.2 Matrice d'une forme bilinéaire dans des bases. Changement de bases.
— 2.3 Rang, non-dégénérescence.
— 2.1/2.4 Symétrie, symétrie hermitienne pour des formes sesquilinéaires.
— 3.1 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique, identité de polarisation.

Séance 7, 16/10
— (retour : 1.6) Retour sur le lemme des noyaux.
— (hors poly) Cas complexe (forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne) de l'identité de polarisation.
Chapitre 4 : Espaces euclidiens.
— 4.1 Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz (Théorème 3.29 dans le poly, pas encore démontrée).
— 4.1 Espace euclidien/hermitien. Espace préhilbertien. Exemples.
— 4.1 Norme associée à un produit scalaire, inégalité de Minkowski (démontrée à partir de Cauchy-Schwarz).

Ici s'arrête le programme pour le partiel du 31/10.

Séance 8, 6/11
— 4.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz, démonstration (cf Théorème 3.29) et exemples.
— 4.1 Identité du parallélogramme.
— 4.1 Angles entre vecteurs.
— 4.2 Orthogonalité. Orthogonal d'un sous-ensemble.
— 4.2 Famille orthogonale, relation de Pythagore.
— 4.2 Coordonnées dans une base orthonormée.
— 4.2 Processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (énoncé).

Séance 9, 13/11
— 4.2 Processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (démonstration).
— 4.2 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel, somme directe orthogonale, dimension.
— 4.2 Projection orthogonale, propriétés de caractérisation (énoncé).

Séance 10, 20/11
— 4.2 Projection orthogonale, suite (démonstrations).
— 4.3 Dual d'un espace euclidien, représentation de Riesz.
— 4.4 Endomorphisme d'un espace euclidien, adjoint.
— 4.4 Isométrie vectorielle, conservation du produit scalaire.

Ici s'arrête le programme pour le CC du 27/11. Il couvre tout ce qui a été traité dans les chapitres 2 à 4 (pas de réduction). Les notions concernant les formes sesquilinéaires (et produit scalaire hermitien) ne sont pas traitées en TD, et ne seront pas dans le CC.

Séance 11, 27/11

- 4.4 Une isométrie vectorielle est un automorphisme dont l'inverse est l'adjoint.
- 4.4 Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie.
- 4.4 Caractérisation d'une isométrie par l'image d'une base orthogonale.
- 4.4 Matrices orthogonales, groupe orthogonal (et spécial orthogonal).
- 4.4 Caractérisation des matrices orthogonales par leurs colonnes.
- 4.4 Endomorphismes autoadjoints.
- 4.4 Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme autoadjoint (et plus généralement pour un endomorphisme qui commute avec son adjoint).

Séance 12, 4/12

- 4.4 Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints.
- 4.4 Diagonalisation des matrices réelles symétriques (ou complexes hermitiennes).
- 4.4 Décomposition en valeurs singulières.

Séance 13, 11/12

- 3.4 Retour sur les formes quadratiques réelles : loi d'inertie de Sylvester, signature (via la réduction des endomorphismes auto-adjoints).
- 5.2 Compléments sur les isométries vectorielles et les matrices orthogonales.
- 5.3 Orientation, produit mixte.
- 5.4 Description du groupe $O(2)$, angle orienté.
- 5.4 Description des groupes $SO(3)$ et $O(3)$ (sans démonstration).
- 5.4 Groupe orthogonal en dimension quelconque (sans démonstration).

Le programme pour l'examen final couvre tout ce qui a été traité en cours pendant tout le semestre.