Calcul différentiel. Contrôle continu du 7 mai 2018. Corrigé

Université Paris-Dauphine – 2^e année de licence MIDO.

(Barème approximatif et provisoire, par page : 4 / 5 / 6 / 5)

On cherche à déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en tout point, telles que pour tous réels x, y, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + x$.

Supposons que l'on ait deux telles fonctions f et $\widetilde{f}$. Montrer que $g = f - \widetilde{f}$ est une fonction constante.

Solution : La fonction g admet donc des dérivées partielles, qui vérifient donc $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y) = 0$. Donc la fonction $x \mapsto g(x,0)$ est constante (sa dérivée est nulle). De même $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ et $y \mapsto g(x,y)$ est constante. On a donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = g(x,0) = g(0,0)$, donc la fonction g est constante.

Trouver une telle fonction f et conclure.

Solution : On primitive par rapport à x la dérivée partielle par rapport à x, on obtient $x^2 + xy$ plus une constante (c'est à dire une fonction constante par rapport à x, donc une fonction de y seulement). On fait de même pour la dérivée par rapport à y, on trouve $y^3 + xy$ plus une fonction de x seulement.
La fonction $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$ convient donc. Et d'après la première question, deux solutions diffèrent d'une constante. Réciproquement toutes les fonctions de la forme $f(x,y) = x^2 + xy + y^3 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ conviennent. C'est donc l'ensemble des solutions.

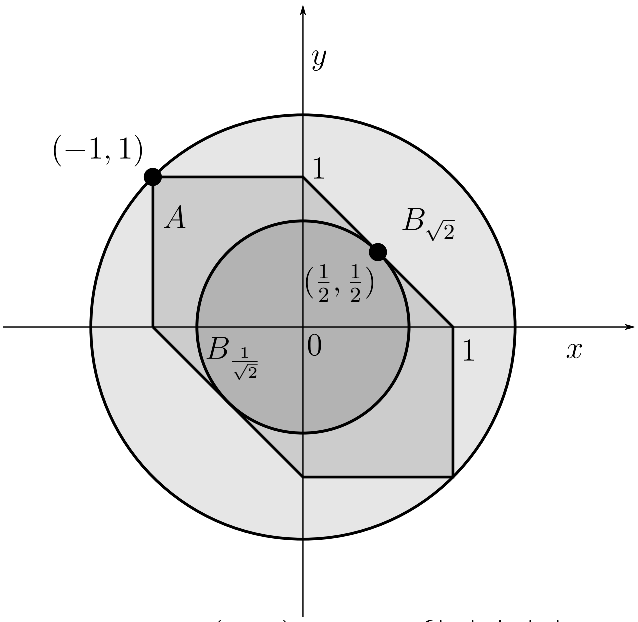
Existe-t-il des fonctions f admettant des dérivées partielles en tout point, de la forme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + y^2$?

Solution : Ce n'est pas possible. Supposons l'existence d'une telle fonction. La fonction f admet des dérivées partielles qui sont des fonctions continues de x, y sur $\mathbb{R}^2$ (polynômes en x et y). D'après le théorème du cours, elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Les deux composantes de ∇f (les dérivées partielles de f) sont des polynômes en x et y, donc de classe C^1. Donc f est de classe C^2. On obtient, alors :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y & 3x \\ 2x & 2y \end{pmatrix},$$

qui n'est pas symétrique si $x \neq 0$, contredisant le théorème de Schwarz.

On considère l'ensemble A de $\mathbb{R}^2$ correspondant à la zone grisée sur le schéma ci-dessous (son contour faisant partie de A).



Décrire l'ensemble A comme l'ensemble des points (x, y) satisfaisant trois inégalités de la forme $-1 \leqslant \ldots \leqslant 1$.
En déduire l'expression d'une norme $N(x, y)$ telle que A soit la boule unité de N (justifier brièvement que l'expression obtenue définit bien une norme).

Solution : On voit que $(x, y) \in A$ si et seulement si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, et $-1 \leqslant x + y \leqslant 1$ (les segments obliques sont sur les droites d'équation $y = -x+1$ et $y = -x - 1$). Donc $(x, y) \in A$ si et seulement si $\max\{|x|, |y|, |x + y|\} \leqslant 1$.

En posant $N(x, y) = \max\{|x|, |y|, |x+y|\}$, on obtient bien une norme pour laquelle B est la boule unité. Pour justifier que c'est une norme, la positivité, l'homogénéité et le fait que $N(x, y) = 0 \Rightarrow x = y = 0$ sont immédiates.
Pour l'inégalité triangulaire, on a $|x + x'| \leqslant |x| + |x'| \leqslant N(x, y) + N(x', y')$, et de même pour les deux autres termes : $|y + y'| \leqslant |y| + |y'| \leqslant N(x, y) + N(x', y')$ et enfin $|x + x' + y + y'| \leqslant |x + y| + |x' + y'| \leqslant N(x, y) + N(x', y')$.
Donc en prenant le maximum des trois termes de gauche de ces trois inégalités, on a toujours $N(x + x', y + y') \leqslant N(x, y) + N(x', y')$.

On considère la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Illustrer à l'aide d'un dessin sur la figure que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{1}{\sqrt{2}}\|(x, y)\| \leqslant N(x, y) \leqslant \sqrt{2}\|(x, y)\|$ (en précisant bien quelle partie du dessin prouve chaque inégalité).

Solution : On note $B_{\sqrt{2}}$ la boule fermée de rayon $\sqrt{2}$ pour $\|\cdot\|$ et $B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ celle de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, que l'on dessine sur le schéma. On voit que $B_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \subset A \subset B_{\sqrt{2}}$.
Si $(x, y) \neq (0, 0)$, comme $N(x, y) > 0$, par homogénéité on a $\frac{1}{N(x,y)}(x, y) \in A \subset B_{\sqrt{2}}$, donc $\|\frac{1}{N(x,y)}(x, y)\| \leqslant \sqrt{2}$, ce qui donne $\|(x, y)\| \leqslant \sqrt{2}N(x, y)$. De même, on a aussi $\frac{1}{\sqrt{2}\|(x,y)\|}(x, y) \in B_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \subset A$, ce qui donne $N(x, y) \leqslant \sqrt{2}\|(x, y)\|$.
Lorsque $(x, y) = (0, 0)$, les deux inégalités sont bien vérifiées.

L'application N est-elle différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

Solution : Non. Montrons par exemple qu'elle n'est pas dérivable en $(-1, 1)$. On étudie la fonction $h(t) = N(-1, 1 + t) = \max\{1, |1 + t|, |-1 + 1 + t|\}$. Si N était différentiable en $(-1, 1)$, alors h serait dérivable en 0 avec $h'(0) = J_N(-1, 1)\binom{0}{1}$.
Pour $t \in [-1, 0]$, on a $h(t) = 1$ et pour $t \in [0, 1]$ on a $h(t) = 1+t$. Si h était dérivable en 0, on aurait $h'(0) = 0$ (dérivée à gauche) et $h'(0) = 1$ (dérivée à droite).

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par l'expression $f(x,y) = \left|\dfrac{3(2x-1)(x-2y)}{5+x^4+y^4}\right|$.

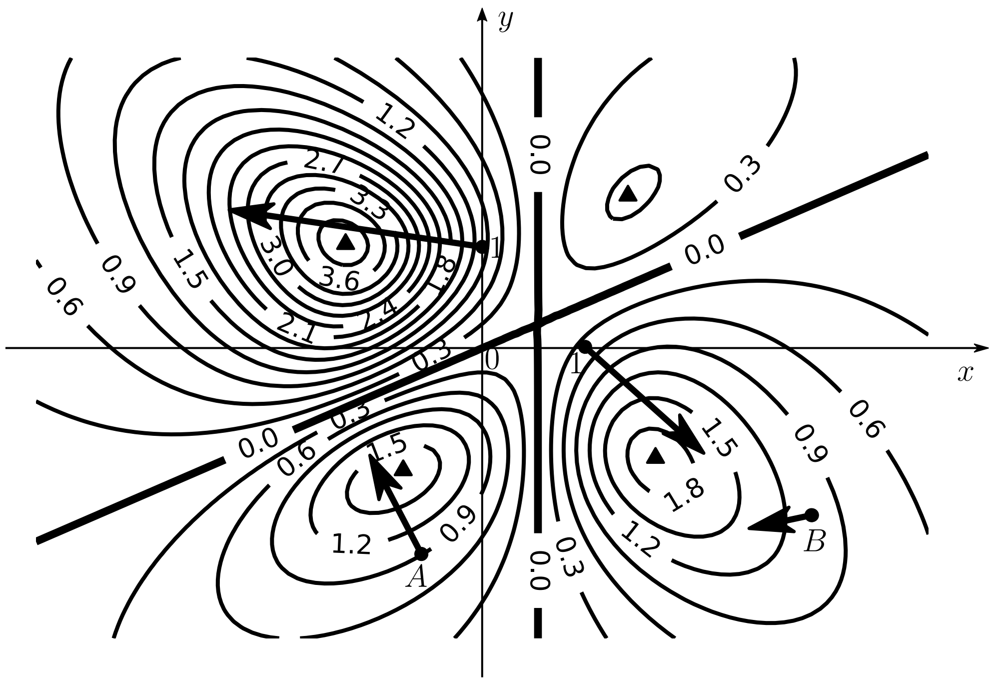
La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
Montrer que f est différentiable aux points $(1,0)$ et $(0,1)$ et calculer la valeur de ∇f en ces points.

Solution : Non, on peut par exemple voir que $f(0,y) = \frac{6|y|}{5+y^4}$, qui n'est pas dérivable en 0 (dérivée à droite $\frac{6}{5}$, dérivée à gauche $-\frac{6}{5}$). Au voisinage des points $(0,1)$ et $(1,0)$, le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc l'expression de f est donnée par $\frac{3(2x-1)(x-2y)}{5+x^4+y^4}$, qui est différentiable (opérations, composition), et on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3[2(x-2y)+(2x-1)](5+x^4+y^4)-3(2x-1)(x-2y)4x^3}{(5+x^4+y^4)^2} \\ \frac{-3(2x-1)2(5+x^4+y^4)-3(2x-1)(x-2y)4y^3}{(5+x^4+y^4)^2} \end{pmatrix}.$$

Donc $\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{3\times3\times6-3\times4}{6^2} \\ \frac{-3\times2\times6}{6^2} \end{pmatrix} = (\frac{7}{6}, -1)$, et $\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{3\times(-5)\times6}{6^2} \\ \frac{3\times2\times6-3\times(-1)\times(-2)\times4}{6^2} \end{pmatrix} = (\frac{-5}{2}, \frac{1}{3})$.

On a tracé sur le schéma ci-contre les lignes de niveau de la fonction f : sur chaque ligne de niveau est indiquée la valeur prise par la fonction.
Représenter le gradient de f aux points $(1,0)$ et $(0,1)$, grâce au calcul précédent. Puis représenter le gradient de f aux points A et B de la figure en justifiant en quelques mots le choix de la direction, du sens et de la norme des vecteurs représentés.



Solution : Le gradient doit être perpendiculaire aux lignes de niveau (dans le cas du point B, il faut imaginer la ligne de niveau passant par B en fonction de celles déjà tracées autour), et dirigé dans le sens où la fonction est croissante. Pour la norme, on peut le faire en comparaison des points $(1,0)$ et $(0,1)$: plus les lignes sont proches, plus la pente est forte. On a donc un vecteur plus petit en $(1,0)$ qu'en $(0,1)$, plus petit en A qu'en $(1,0)$, et plus petit en B qu'en A.

On rappelle qu'un point de maximum (resp. minimum) local de f est par définition un point (x_0,y_0) tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel pour tout (x,y) dans la boule de centre (x_0,y_0) et de rayon ε, on a $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$ (resp. $\geqslant f(x_0,y_0)$). Indiquer sur la figure où sont les points de maximum local et de minimum local, en justifiant pourquoi (attention aux pièges).

Solution : Comme $f \geqslant 0$, les lignes de niveau 0 sont constituées de minimums locaux. D'après l'expression de f, ce sont les droites d'équation $2x-1=0$ et $2y-x=0$ (en gras). Les quatre autre points (petits triangles) dessinés sur la figure sont des maximums locaux, la valeur de f diminue lorsque l'on s'éloigne de ces points.

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$, donnée par $\|A\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$, si A est la matrice de coefficients $a_{i,j}$. On s'intéresse à la différentiabilité de $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(A) = \sin(\mathrm{Tr}(A^3))$.

Justifier brièvement que $\|\cdot\|$ est une norme, et montrer que si A et B sont des matrices $n \times n$, on a $\|AB\| \leqslant n\|A\|\|B\|$.

Solution : Les propriétés de positivité et d'homogénéité sont immédiates pour $\|\cdot\|$. Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors pour tout i, j dans $[\![1, n]\!]$, on a

$$|(A+B)_{i,j}| \leqslant |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

En passant donc au max dans cette inégalité, on obtient $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$. Finalement, si $a_{i,j} = 0$ pour tous les indices, alors A est nulle.
On a ensuite $|(AB)_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|\|B\| = n\|A\|\|B\|$.

Montrer que l'application $\Psi : A \mapsto A^3$ est différentiable de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ et donner l'expression de $\mathrm{d}\Psi(A)(H)$ pour A et H dans $M_n(\mathbb{R})$.

Solution : Pour A et H dans $M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\Psi(A+H) &= (A+H)(A+H)(A+H)\\ &= A^3 + [HA^2 + AHA + A^2H] + (AH^2 + HAH + H^2A + H^3).\end{aligned}$$

À A fixé, la fonction $H \mapsto HA^2 + AHA + A^2H$ est linéaire, il reste à montrer que $AH^2 + HAH + H^2A + H^3 = \|H\|\varepsilon(H)$, avec $\varepsilon(H) \to 0$ lorsque $H \mapsto 0$. Pour cela on utilise la question précédente : on a $\|AH^2\| \leqslant n\|AH\|\|H\| \leqslant n^2\|A\|\|H\|^2$. De même pour $\|HAH\|$, $\|H^2A\|$ et $\|H^3\|$, et on obtient donc

$$\|AH^2 + HAH + H^2A + H^3\| \leqslant n^2(3\|H\|^2\|A\| + \|H\|^3).$$

Pour $H \neq 0$, on a alors $\frac{\|AH^2+HAH+H^2A+H^3\|}{\|H\|} \leqslant n^2(3\|H\|\|A\| + \|H\|^2)$, qui tend vers 0 lorsque $\|H\| \to 0$.
La fonction Ψ est donc bien dérivable sur $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{d}\Psi(A)(H) = A^2H + AHA + HA^2$.

En déduire que Φ est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})$ et donner l'expression de $\mathrm{d}\Phi(A)(H)$ pour A et H dans $M_n(\mathbb{R})$. Essayer de simplifier au maximum.

Solution : La trace est linéaire donc différentiable et sa différentielle en tout point est la trace elle même. Donc en posant $f(A) = \mathrm{Tr}(\Psi(A))$, f est différentiable en tout point par composition et

$$\mathrm{d}f(A)(H) = \mathrm{dTr}(\Psi(A))(\mathrm{d}\Psi(A)(H)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{d}\Psi(A)(H)) = \mathrm{Tr}(A^2H + AHA + HA^2).$$

On peut simplifier cette expression en utilisant la formule $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour obtenir $\mathrm{d}\Phi(A)(H) = 3\mathrm{Tr}(A^2H)$. Enfin la fonction sinus est dérivable, on peut donc aussi appliquer la formule de la composée avec $\Phi = \sin \circ f$, ce qui nous donne $\mathrm{d}\Phi(A)(H) = \cos(f(A))\mathrm{d}f(A)(H)$. Au final on obtient donc :

$$\mathrm{d}\Phi(A)(H) = 3\cos(\mathrm{Tr}(A^3))\mathrm{Tr}(A^2H).$$