

Calcul différentiel. Contrôle continu du 7 mai 2018.

Université Paris-Dauphine – 2^e année de licence MIDO.

Nom :

Prénom :

Groupe de TD :

Commentaires :

Correcteur :

(Barème approximatif et provisoire, par page : 4 / 5 / 6 / 5)

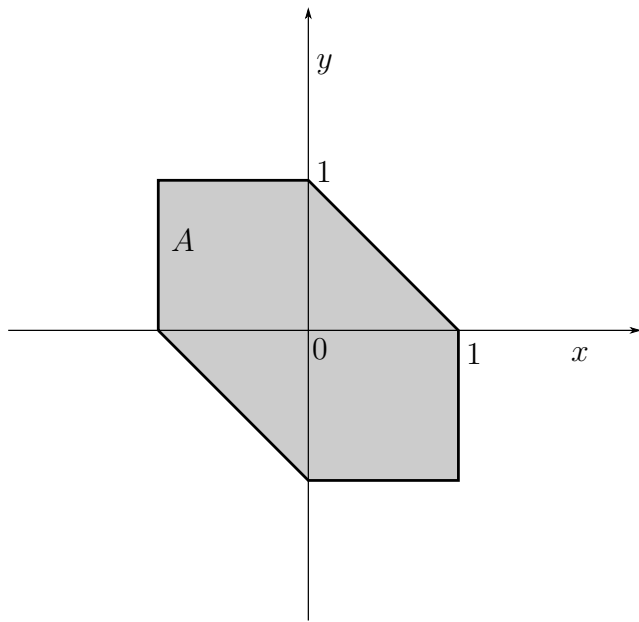
On cherche à déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en tout point, telles que pour tous réels x, y , $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + x$.

Supposons que l'on ait deux telles fonctions f et $\tilde{f}$. Montrer que $g = f - \tilde{f}$ est une fonction constante.

Trouver une telle fonction f et conclure.

Existe-t-il des fonctions f admettant des dérivées partielles en tout point, de la forme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + y^2$?

On considère l'ensemble A de $\mathbb{R}^2$ correspondant à la zone grisée sur le schéma ci-dessous (son contour faisant partie de A).



Décrire l'ensemble A comme l'ensemble des points (x, y) satisfaisant trois inégalités de la forme $-1 \leq \dots \leq 1$.

En déduire l'expression d'une norme $N(x, y)$ telle que A soit la boule unité de N (justifier brièvement que l'expression obtenue définit bien une norme).

On considère la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Illustrer à l'aide d'un dessin sur la figure que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{1}{\sqrt{2}}\|(x, y)\| \leq N(x, y) \leq \sqrt{2}\|(x, y)\|$ (en précisant bien quelle partie du dessin prouve chaque inégalité).

L'application N est-elle différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

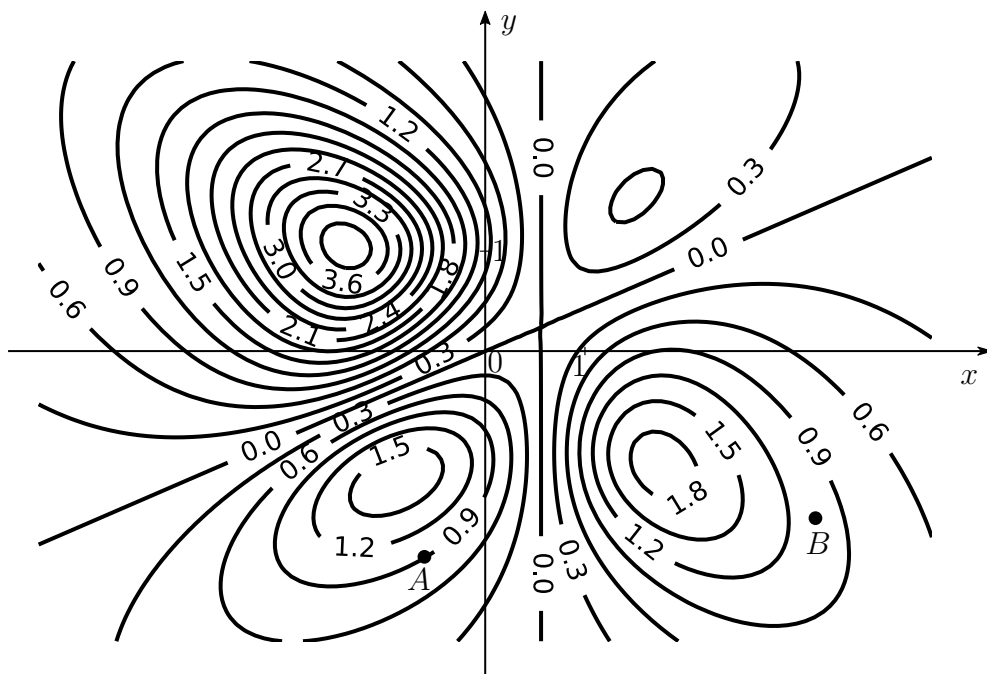
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par l'expression $f(x, y) = \left| \frac{3(2x - 1)(x - 2y)}{5 + x^4 + y^4} \right|$.

La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Montrer que f est différentiable aux points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et calculer la valeur de ∇f en ces points.

On a tracé sur le schéma ci-contre les lignes de niveau de la fonction f : sur chaque ligne de niveau est indiquée la valeur prise par la fonction.

Représenter le gradient de f aux points $(1, 0)$ et $(0, 1)$, grâce au calcul précédent. Puis représenter le gradient de f aux points A et B de la figure en justifiant en quelques mots le choix de la direction, du sens et de la norme des vecteurs représentés.



On rappelle qu'un point de maximum (resp. minimum) local de f est par définition un point (x_0, y_0) tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel pour tout (x, y) dans la boule de centre (x_0, y_0) et de rayon ε , on a $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $\geq f(x_0, y_0)$). Indiquer sur la figure où sont les points de maximum local et de minimum local, en justifiant pourquoi (attention aux pièges).

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$, donnée par $\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$, si A est la matrice de coefficients $a_{i,j}$. On s'intéresse à la différentiabilité de $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(A) = \sin(\text{Tr}(A^3))$.

Justifier brièvement que $\|\cdot\|$ est une norme, et montrer que si A et B sont des matrices $n \times n$, on a $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$.

Montrer que l'application $\Psi : A \mapsto A^3$ est différentiable de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ et donner l'expression de $d\Psi(A)(H)$ pour A et H dans $M_n(\mathbb{R})$.

En déduire que Φ est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})$ et donner l'expression de $d\Phi(A)(H)$ pour A et H dans $M_n(\mathbb{R})$. Essayer de simplifier au maximum.