Calcul différentiel — Examen du 29 mai 2018.

Une indication de barème et de longueur de rédaction est indiqué pour chaque exercice. On rappelle qu'une réponse concise est une preuve de compréhension de la question.

Exercice 1. *(2,5 points, une demi-page)* On rappelle que sur $M_n(\mathbb{R})$, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{T}})$ est un produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée, donnée par $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^{\mathrm{T}})}$.

On pose $\Phi(A) = \mathrm{Tr}(AA^{\mathrm{T}})$ et $\Psi(A) = e^{\mathrm{Tr}(AA^{\mathrm{T}})}$.

1. Pour A et H dans $M_n(\mathbb{R})$, développer $\Phi(A+H)$ et en déduire que Φ est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})$. Que vaut $\mathrm{d}\Phi(A)(H)$ (simplifier si possible) ?
2. En déduire que Ψ est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})$ et donner l'expression de $\mathrm{d}\Psi(A)(H)$, pour A et H dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. *(5 points, une page)* Dans cet exercice, on admet le résultat suivant : si f est de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = \int_0^x f(s,y)\mathrm{d}s$ est de classe C^1, et on a pour tous réels x et y : $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(s,y)\mathrm{d}s$.

1. On cherche à déterminer les couples de fonctions (f,g) de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ tels qu'il existe une fonction h, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ satisfaisant $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = g$.
   (a) Montrer que si on a un tel couple (f,g), alors $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.
   (b) Montrer que si on a f et g de classe C^1 avec $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, alors la fonction h définie par la formule $h(x,y) = \int_0^x f(s,y)\mathrm{d}s + \int_0^y g(0,s)\mathrm{d}s$ est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et satisfait $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = g$.
2. On considère l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et les fonctions f et g de U dans $\mathbb{R}$ données par : $f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ et $g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
   (a) Montrer que f et g sont dans $C^1(U,\mathbb{R})$ et que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.
   (b) On suppose qu'il existe h dans $C^1(U,\mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = g$. Pour tout réel t, on pose $\alpha(t) = h(\cos t, \sin t)$. Calculer $\alpha(2\pi) - \alpha(0)$, puis $\int_0^{2\pi} \alpha'(t)\mathrm{d}t$, et en déduire une contradiction. Est-ce en contradiction avec la question 1.(b) ?

Exercice 3. *(9,5 points - deux pages et demie)*

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y,z) = (2xy+z)e^{-z^2}$ ainsi que le sous-ensemble $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z + 2z^3 \geqslant x^2 + y^2\}$.

1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ tel que $|f(x,y,z)| \leqslant C(|z|+|z|^3)e^{-z^2}$ pour tout (x,y,z) dans Γ. En déduire que si $\|(x_n,y_n,z_n)\| \to +\infty$ avec $(x_n,y_n,z_n) \in \Gamma$, alors $f(x_n,y_n,z_n) \to 0$.
2. Trouver des points (x_-,y_-,z_-) et (x_+,y_+,z_+) de Γ tels que $f(x_-,y_-,z_-) < 0$ et $f(x_+,y_+,z_+) > 0$. On pose $K_- = \{(x,y,z) \in \Gamma, f(x,y,z) \leqslant f(x_-,y_-,z_-)\}$ et $K_+ = \{(x,y,z) \in \Gamma, f(x,y,z) \geqslant f(x_+,y_+,z_+)\}$. Déduire de la question précédente que K_- et K_+ sont bornés.
3. En déduire que f atteint son minimum et son maximum sur Γ.
4. On considère $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z + 2z^3 > x^2 + y^2\}$. Montrer que f possède un unique point critique (x_*,y_*,z_*) dans U.
5. Montrer que (x_*,y_*,z_*) n'est ni un point de maximum ni de minimum.

6. On considère $g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2+y^2-z-2z^3$. Le théorème d'optimisation sous contrainte d'égalité est le suivant : si (x,y,z) est un extremum de la fonction f sur l'ensemble $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, g(x,y,z) = 0\}$, avec f et g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et $\nabla g(x,y,z) \neq (0,0,0)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$.
   (a) Soit (x,y,z) un point d'extremum de la fonction f sur Γ donné par la question 3. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} 2y = 2\mu x \\ 2x = 2\mu y \\ 1 - 4xyz - 2z^2 = -\mu(1+6z^2) \\ z + 2z^3 = x^2 + y^2. \end{cases}$$
   (b) Montrer que toute solution de ce système telle que $(x,y) \neq (0,0)$ vérifie $\mu = \pm 1$, puis $x = \pm y$ et $2xy = \pm(z+2z^3)$. En déduire une équation pour z^2 dans les cas $\mu = 1$ et $\mu = -1$, et la résoudre (chercher une racine évidente). En déduire les cinq points de $\mathbb{R}^3$ possiblement candidats pour être des extrema de f.
   (c) Conclure en donnant les points où f atteint son minimum, et ceux où elle atteint son maximum.

Exercice 4. *(5 points + bonus*, une page + une demie pour l'illustration)* On s'intéresse aux éventuels points de maximum d'une fonction convexe f sur un convexe A de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que A est un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, et que f est convexe, continue sur A et de classe C^1 sur son intérieur $\mathrm{int}(A)$.
   (a) Rappeler la formule, pour un point $x \in \mathrm{int}(A)$, correspondant au fait que f est « au-dessus de toutes ses tangentes » en x.
   (b) Montrer que si f atteint son maximum en $x \in \mathrm{int}(A)$, alors f est constante sur A. En déduire que dans tous les cas f atteint son maximum sur A en un point de sa frontière $\partial A = A \setminus \mathrm{int}(A)$.
   (c) Illustrer le résultat de la question précédente en traçant les lignes de niveau de la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2+y^2$, en dessinant le compact $A = [-1,2] \times [-1,1]$ et en indiquant le ou les points de maximum de f sur A.
2. On suppose seulement que A est convexe et que f est convexe sur A.
   (a) En dimension 1, donner un tel exemple où f n'a pas de point de maximum.
   (b) On suppose que f atteint son maximum en $x \in \mathrm{int}(A)$. Soit $y \in A$, montrer qu'il existe $z \in A$ et $t \in]0,1[$ tel que $x = (1-t)z + ty$. En déduire que $f(y) = f(x)$.
   (c) En déduire que dans tous les cas, si f atteint son maximum sur A, alors ce maximum est aussi atteint sur sa frontière ∂A, si elle est non-vide.
3. * Montrer qu'en prenant $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leqslant 1\}$ le disque unité, et
   $$f(x,y) = \begin{cases} n & \text{si } (x,y) = (\cos\frac{1}{n}, \sin\frac{1}{n}) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sur les autres points de } A, \end{cases}$$
   on obtient un exemple de fonction convexe sur un convexe compact dans $\mathbb{R}^2$ qui n'a pas de point de maximum.