Calcul différentiel — Examen du 29 mai 2018.

Une indication de barème et de longueur de rédaction est indiqué pour chaque exercice. On rappelle qu'une réponse concise est une preuve de compréhension de la question.

Exercice 1. (2,5 points, une demi-page) On rappelle que sur $M_n(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB^T)$ est un produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée, donnée par $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}(AA^T)}$.

On pose $\Phi(A) = \text{Tr}(AA^T)$ et $\Psi(A) = e^{\text{Tr}(AA^T)}$.

1. Pour A et H dans $M_n(\mathbb{R})$, développer $\Phi(A + H)$ et en déduire que Φ est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})$. Que vaut $d\Phi(A)(H)$ (simplifier autant que possible) ?

Solution. On a

$$\begin{aligned}\Phi(A + H) &= \text{Tr}((A + H)(A^T + H^T)) \\ &= \text{Tr}(AA^T) + \text{Tr}(AH^T) + \text{Tr}(HA^T) + \text{Tr}(HH^T) \\ &= \Phi(A) + 2 \text{Tr}(AH^T) + \text{Tr}(HH^T),\end{aligned}$$

puisque $\text{Tr}(HA^T) = \text{Tr}((AH^T)^T) = \text{Tr}(AH^T)$. On note que $H \mapsto 2 \text{Tr}(AH^T)$ est linéaire, et que $\text{Tr}(HH^T) = \|H\|^2 = \varepsilon(H)\|H\|$, avec $\varepsilon(H) = \|H\|$, qui tend bien vers 0 quand $H \rightarrow 0$.

On obtient donc que Φ est différentiable en A avec $d\Phi(A)(H) = 2 \text{Tr}(AH^T)$. On aurait pu également remarquer que $\Phi(A) = \langle A, A \rangle$ et faire les calculs avec la notation du produit scalaire : $\Phi(A + H) = \Phi(A) + 2\langle A, H \rangle + \Phi(H)$. $\square$

2. En déduire que Ψ est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})$ et donner l'expression de $d\Psi(A)(H)$, pour A et H dans $M_n(\mathbb{R})$.

Solution. Comme la fonction exponentielle est dérivable, de dérivée $\exp(x)$ en x ($d \exp(x)(h) = \exp'(x)h = \exp(x)h$), par composition $\Psi = \exp \circ \Phi$ est différentiable, et

$$d\Psi(A)(H) = d \exp(\Phi(A))(d\Phi(A)(H)) = 2e^{\text{Tr}(AA^T)} \text{Tr}(AH^T).$$

$\square$

Exercice 2. (5 points, une page) Dans cet exercice, on admet le résultat suivant : si f est de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = \int_0^x f(s, y) ds$ est de classe C^1 , et on a pour tous réels x et y : $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(s, y) ds$.

1. On cherche à déterminer les couples de fonctions (f, g) de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ tels qu'il existe une fonction h , de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ satisfaisant $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = g$.

(a) Montrer que si on a un tel couple (f, g) , alors $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.

Solution. Si $\nabla h = (f, g)$ et que f et g sont de classe C^1 , alors h est de classe C^2 , et le théorème de Schwarz donne $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}$. $\square$

- (b) Montrer que si on a f et g de classe C^1 avec $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, alors la fonction h définie par la formule $h(x, y) = \int_0^x f(s, y)ds + \int_0^y g(0, s)ds$ est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et satisfait $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = g$.

Solution. On a donc $h(x, y) = F(x, y) + \int_0^y g(0, s)ds$, avec le résultat admis au début de l'énoncé. Comme $y \mapsto g(0, y)$ est une fonction C^1 (d'une seule variable), sa primitive $y \mapsto \int_0^y g(0, s)ds$ est aussi une fonction C^1 (et même C^2) d'une variable. Donc la même fonction, vue comme fonction de deux variables $(x, y) \mapsto \int_0^y g(0, s)ds$, est aussi une fonction C^1 de (x, y) . Sa dérivée partielle par rapport à y est donc $(x, y) \mapsto g(0, y)$, et sa dérivée partielle par rapport à x est nulle.

Donc h est une fonction C^1 et $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}$, qui est égale à f . Et

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + g(0, y) \\ &= \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(s, y)ds + g(0, y) \\ &= \int_0^x \frac{\partial g}{\partial x}(s, y)ds + g(0, y) = g(x, y) - g(0, y) + g(0, y) = g(x, y). \end{aligned}$$

□

2. On considère l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et les fonctions f et g de U dans $\mathbb{R}$ données par : $f(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ et $g(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

- (a) Montrer que f et g sont dans $C^1(U, \mathbb{R})$ et que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.

Solution. Par composition et opérations, comme $x^2 + y^2$ ne s'annule pas sur U , les fonctions sont de classe C^1 et on a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. On obtient la même chose pour $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. □

- (b) On suppose qu'il existe h dans $C^1(U, \mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = g$. Pour tout réel t , on pose $\alpha(t) = h(\cos t, \sin t)$. Calculer $\alpha(2\pi) - \alpha(0)$, puis $\int_0^{2\pi} \alpha'(t)dt$, et en déduire une contradiction. Est-ce en contradiction avec la question 1.(b) ?

Solution. Par composition α est de classe C^1 . On a alors (par règle de la chaîne)

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{\partial h}{\partial x}(\cos t, \sin t) \times (-\sin t) + \frac{\partial h}{\partial y}(\cos t, \sin t) \times \cos t \\ &= -\sin t f(\cos t, \sin t) + \cos t g(\cos t, \sin t) \\ &= \frac{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1. \end{aligned}$$

Donc $\alpha(2\pi) - \alpha(0) = h(1, 0) - h(1, 0) = 0$, mais c'est aussi égal à $\int_0^{2\pi} \alpha'(s)ds = 2\pi \times 1$, ce qui donne la contradiction. Ce n'est pas en contradiction avec la question 1.(b) : le fait qu'on se soit placé dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ plutôt que $\mathbb{R}^2$ change tout. En particulier les formules de primitives ne fonctionnent pas si l'on « passe » par le point $(0, 0)$. □

Exercice 3. (9,5 points, deux pages et demie)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = (2xy + z)e^{-z^2}$ ainsi que le sous-ensemble $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z + 2z^3 \geq x^2 + y^2\}$.

1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ tel que $|f(x, y, z)| \leq C(|z| + |z|^3)e^{-z^2}$ pour tout (x, y, z) dans Γ . En déduire que si $\|(x_n, y_n, z_n)\| \rightarrow +\infty$ avec $(x_n, y_n, z_n) \in \Gamma$, alors $f(x_n, y_n, z_n) \rightarrow 0$.

Solution. On peut écrire $|2xy| \leq x^2 + y^2$ (c'est une inégalité provenant du fait que $0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|x||y|$) pour obtenir directement, si $(x, y, z) \in \Gamma$:

$$|f(x, y, z)| \leq (|2xy| + |z|)e^{-z^2} \leq (z + 2z^3 + |z|)e^{-z^2} \leq 2(|z| + |z|^3)e^{-z^2}.$$

Donc $C = 2$ convient. Mais on pouvait faire une majoration plus brutale en disant que si $(x, y, z) \in \Gamma$, alors $|x| \leq \sqrt{z + z^3}$ et $|y| \leq \sqrt{z + 2z^3}$. On obtient alors l'estimation $|f(x, y, z)| \leq (3|z| + 4|z|^3)e^{-z^2}$.

Donc si $\|(x_n, y_n, z_n)\| \rightarrow \infty$ avec $(x_n, y_n, z_n) \in \Gamma$, alors $z_n \rightarrow +\infty$ ($z_n \geq 0$ et ne peut pas être borné, sinon $x_n^2 + y_n^2$ serait borné), donc par croissance comparée $|f(x_n, y_n, z_n)| \leq C(|z_n| + |z_n|^3)e^{-z_n^2} \rightarrow 0$. $\square$

2. Trouver des points (x_-, y_-, z_-) et (x_+, y_+, z_+) de Γ tels que $f(x_-, y_-, z_-) < 0$ et $f(x_+, y_+, z_+) > 0$. On pose $K_- = \{(x, y, z) \in \Gamma, f(x, y, z) \leq f(x_-, y_-, z_-)\}$ et $K_+ = \{(x, y, z) \in \Gamma, f(x, y, z) \geq f(x_+, y_+, z_+)\}$. Déduire de la question précédente que K_- et K_+ sont bornés.

Solution. On peut prendre $(x_-, y_-, z_-) = (1, -1, 1)$ (on a bien $1^2 + 1^2 \leq 1 + 2 \cdot 1^3$ et $(2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1)e^{-1} < 0$) et $(x_+, y_+, z_+) = (0, 0, 1)$. Si K_- n'était pas borné, on prendrait une suite d'éléments (x_n, y_n, z_n) de K_- tels que $\|(x_n, y_n, z_n)\| \rightarrow \infty$, et à partir d'un certain rang, comme $f(x_n, y_n, z_n) \rightarrow 0$ on aurait des points de K_- vérifiant $f(x_n, y_n, z_n) > f(x_-, y_-, z_-)$ (puisque cette dernière valeur est strictement négative), ce qui est une contradiction. Donc K_- est borné, et on fait de même sur K_+ . $\square$

3. En déduire que f atteint son minimum et son maximum sur Γ .

Solution. L'ensemble Γ est fermé ($\Gamma = g^{-1}(]-\infty, 0])$, où $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - 2z^3$, avec donc g continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et $]-\infty, 0]$ fermé). Les ensembles K_+ et K_- sont fermés (par exemple $K_+ = \Gamma \cap f^{-1}([f(x_+, y_+, z_+), +\infty[))$) et bornés, donc compact. Donc f atteint son minimum en (x_m, y_m, z_m) sur K_- et son maximum en (x_M, y_M, z_M) sur K_+ . Donc pour tout point (x, y, z) de Γ , si $(x, y, z) \in K_-$, $f(x, y, z) \geq f(x_m, y_m, z_m)$, et si $(x, y, z) \notin K_-$ alors $f(x, y, z) > f(x_-, y_-, z_-) \geq f(x_m, y_m, z_m)$. Donc (x_m, y_m, z_m) est un point de minimum de f sur Γ tout entier. De même (x_M, y_M, z_M) est un point de maximum de f sur Γ . $\square$

4. On considère $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z + 2z^3 > x^2 + y^2\}$. Montrer que f possède un unique point critique (x_*, y_*, z_*) dans U .

Solution. La fonction f est de classe C^1 sur U , on calcule son gradient pour obtenir $\nabla f(x, y, z) = (2ye^{-z^2}, 2xe^{-z^2}, (1 - 4xyz - 2z^2)e^{-z^2})$. Donc $\nabla f(x, y, z) = 0$ si et seulement si $y = 0$, $x = 0$ et $1 - 4 \times 0 - 2z^2 = 0$ autrement dit $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme les points de Γ vérifient $z \geq 0$ (car $z + z^3 \geq x^2 + y^2 \geq 0$), on obtient donc que le seul point critique est $(x_*, y_*, z_*) = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. C'est bien un point de Γ puisque $z_* + z_*^3 \geq x_*^2 + y_*^2 = 0$. $\square$

5. Montrer que (x_*, y_*, z_*) n'est ni un point de maximum ni de minimum.

Solution. Il suffit de voir que $f(t, t, z_*) = (2t^2 + z_*)e^{-z_*^2} > f(0, 0, z_*)$ pour $t > 0$, et que pour t suffisamment petit, $(t, t, z_*) \in \Gamma$, donc $(0, 0, z_*)$ n'est pas un maximum local (donc pas un maximum global). De même $f(-t, t, z_*) = (-2t^2 + z_*)e^{-z_*^2} < f(0, 0, z_*)$ pour $t > 0$, et pour t suffisamment petit, $(-t, t, z_*) \in \Gamma$, donc $(0, 0, z_*)$ n'est pas un minimum local (donc pas global).

Une autre méthode pouvait aussi consister à calculer la Hessienne de f en $(0, 0, z_*)$,

qui vaut $e^{-z_*^2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4z_* \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres $-2, 2$ et $-4z_*$ sont non-nulles

et ne sont pas toutes du même signe, donc le point critique ne peut pas être un maximum local ni un minimum local. $\square$

6. On considère $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 - z - 2z^3$. Le théorème d'optimisation sous contrainte d'égalité est le suivant : si (x, y, z) est un extremum de la fonction f sur l'ensemble $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = 0\}$, avec f et g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$.

- (a) Soit (x, y, z) un point d'extremum de la fonction f sur Γ donné par la question 3. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2y = 2\mu x \\ 2x = 2\mu y \\ 1 - 4xyz - 2z^2 = -\mu(1 + 6z^2) \\ z + 2z^3 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Solution. Un tel point ne peut pas appartenir à U d'après les deux questions précédentes (ce serait un point critique, mais le seul point critique n'est pas un extremum). Donc il appartient à $C = \Gamma \setminus U$, et on obtient la dernière équation $z + 2z^3 = x^2 + y^2$. On remarque que $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, -(1 + 6z^2))$. Et comme $1 + 6z^2 \neq 0$ dans tous les cas, le théorème s'applique. On obtient donc un réel λ tel que $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$, ce qui donne

$$\begin{cases} 2ye^{-z^2} = 2\lambda x \\ 2xe^{-z^2} = 2\lambda y \\ (1 - 4xyz - 2z^2)e^{-z^2} = -\lambda(1 + 6z^2). \end{cases}$$

En posant $\mu = \lambda e^{z^2}$, on obtient bien les trois premières équations. $\square$

- (b) Montrer que toute solution de ce système telle que $(x, y) \neq (0, 0)$ vérifie $\mu = \pm 1$, puis $x = \pm y$ et $2xy = \pm(z + 2z^3)$. En déduire une équation pour z^2 dans les cas $\mu = 1$ et $\mu = -1$, et la résoudre (chercher une racine évidente). En déduire les cinq points de $\mathbb{R}^3$ possiblement candidats pour être des extrema de f .

Solution. En remplaçant $2x$ par $2\mu y$ dans la première équation, on obtient $2y = 2\mu^2 y$, et de même dans la deuxième équation $2x = 2\mu^2 x$. On obtient donc $x(1 - \mu^2) = 0$ et $y(1 - \mu^2) = 0$. Donc si $(x, y) \neq (0, 0)$, alors $\mu = 1$ ou $\mu = -1$.

Traisons le cas $\mu = 1$. On obtient $x = y$, puis $z + 2z^3 = 2x^2 = 2xy$. En reportant dans la troisième équation on obtient $1 - 2(z + 2z^3)z - 2z^2 = -1 - 6z^2$, c'est à dire $2 + 2z^2 - 4z^4 = 0$. En posant $a = z^2$, on doit donc résoudre $1 + a - 2a^2 = 0$. Une racine évidente est $a = 1$, l'autre est donc $a = \frac{-1}{2}$. On a donc $z^2 = 1$ ou $z^2 = \frac{-1}{2}$, et comme $z \geq 0$, il ne reste plus que la solution $z = 1$. Enfin on obtient $x = \pm\sqrt{\frac{z+2z^3}{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, et $y = x$. En ces points, la valeur de f est strictement positive (la même valeur pour ces deux points : $4e^{-1}$).

Pour le cas $\mu = -1$, on obtient $x = -y$, puis $z + 2z^3 = 2x^2 = -2xy$, et enfin $1 + 2(z + 2z^3)z - 2z^2 = 1 + 6z^2$, c'est-à-dire $4z^4 - 6z^2 = 0$, autrement dit $z = 0$ ou $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Lorsque $z = 0$, on obtient $x = y = z = 0$, qui est un cas à part (et qui sera traité avec le cas $x = y = 0$). Sinon $z > 0$, donc la seule solution est $z = \sqrt{\frac{3}{2}}$. On obtient ensuite $x^2 = \pm\sqrt{\frac{z+2z^3}{2}} = \pm\sqrt{\sqrt{6}}$ et $y = -x$. En ces deux points, la valeur de f est strictement négative (elle vaut $(-2\sqrt{6} + \sqrt{\frac{3}{2}})e^{-\frac{3}{2}}$). Le dernier cas à traiter est quand $(x, y) = (0, 0)$. On obtient alors $z = 0$ par l'équation $z + 2z^3 = x^2 + y^2$. La valeur de f en ce point est nulle. $\square$

- (c) Conclure en donnant les points où f atteint son minimum, et ceux où elle atteint son maximum.

Solution. D'après la question précédente, parmi les cinq candidats, en deux points la valeur de f est strictement positive (et identique), en deux points elle est strictement négative (et identique) et en le dernier point elle est nulle. On sait donc que le maximum est atteint en les deux premiers points : $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$ et $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$ (et uniquement en ceux-là). Le minimum est donc atteint en les deux autres : $(\sqrt{\sqrt{6}}, -\sqrt{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ et $(-\sqrt{\sqrt{6}}, \sqrt{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ (et uniquement en ceux-là). Le cinquième point $(0, 0, 0)$ n'est donc ni un minimum ni un maximum (ce qu'on savait déjà...). $\square$

Exercice 4. (5 points + bonus*, une page + une demie pour l'illustration) On s'intéresse aux éventuels points de maximum d'une fonction convexe f sur un convexe A de $\mathbb{R}^n$.

- On suppose que A est un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, et que f est convexe, continue sur A et de classe C^1 sur son intérieur $\text{int}(A)$.
 - Rappeler la formule, pour un point $x \in \text{int}(A)$, correspondant au fait que f est « au-dessus de toutes ses tangentes » en x .

Solution. Pour tout y dans A , on a $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$. $\square$

- Montrer que si f atteint son maximum en $x \in \text{int}(A)$, alors f est constante sur A . En déduire que dans tous les cas f atteint son maximum sur A en un point de sa frontière $\partial A = A \setminus \text{int}(A)$.

Solution. Si f atteint son maximum en un point x de l'intérieur, alors comme f est de classe C^1 , on a donc $\nabla f(x) = 0$. La formule précédente donne donc que pour tout y dans A , on a $f(y) \geq f(x)$. Comme x était un point de maximum, on a aussi $f(y) \leq f(x)$. Donc $f(y) = f(x)$.

Dans le cas général, comme f est continue sur un compact, on sait qu'elle y atteint son maximum. S'il est atteint sur la frontière, il n'y a rien à prouver. Sinon, il est atteint dans l'intérieur, et par le début de la question, la fonction est alors constante. Elle admet donc son maximum en n'importe quel point. En particulier, n'importe quel point de la frontière convient.

Pour être plus rigoureux, il faudrait montrer que cette frontière est non vide, ce que l'on peut faire en considérant un point x du compact et une direction $d \neq 0$. On note $t = \sup\{s \geq 0, x + sd \in A\}$, qui est bien un réel fini car A est borné. Comme A est fermé, on montre que $x + td \in A$. Par la définition de t , on montre que $x + td \notin \text{int}(A)$ (sinon on pourrait trouver $s > t$ tel que $x + sd \in A$, contredisant la définition de t). On a donc bien un point dans la frontière. $\square$

- (c) Illustrer le résultat de la question précédente en traçant les lignes de niveau de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$, en dessinant le compact $A = [-1, 2] \times [-1, 1]$ et en indiquant le ou les points de maximum de f sur A .

Solution. Les lignes de niveau sont des cercles centrés en zéro. La fonction est maximisée lorsqu'on s'éloigne de zéro, et les deux points les plus loin de zéro sont les deux sommets du rectangle A , de coordonnées $(2, 1)$ et $(2, -1)$. $\square$

2. On suppose seulement que A est convexe et que f est convexe sur A .

- (a) En dimension 1, donner un tel exemple où f n'a pas de point de maximum.

Solution. La fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Ou la fonction $x \mapsto x$ sur $]0, 1[$. $\square$

- (b) On suppose que f atteint son maximum en $x \in \text{int}(A)$. Soit $y \in A$, montrer qu'il existe $z \in A$ et $t \in]0, 1[$ tel que $x = (1 - t)z + ty$. En déduire que $f(y) = f(x)$.

Solution. On pose $z = \frac{1}{1-t}x - \frac{t}{1-t}y$. Comme $x \in \text{int}(A)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\|z - x\| \leq \varepsilon$, alors $z \in A$. On a $z - x = \frac{t}{1-t}(x - y)$. Donc si $t > 0$ est suffisamment petit, on a $t < 1$ et $\frac{t}{1-t}\|x - y\| \leq \varepsilon$, ce qui donne que $\|z - x\| \leq \varepsilon$, et donc $z \in A$. On bien $x = (1 - t)z + ty$. Par convexité, on obtient que $f(x) \leq (1-t)f(z) + tf(y) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ puisque x est un point de maximum sur A et que $z \in A$. On obtient donc $tf(x) \leq tf(y)$, ce qui donne que $f(y) \geq f(x)$, et comme x est un maximum, alors $f(y) \leq f(x)$ donc $f(y) = f(x)$. $\square$

- (c) En déduire que dans tous les cas, si f atteint son maximum sur A , alors ce maximum est aussi atteint sur sa frontière ∂A , si elle est non-vide.

Solution. On fait de même que précédemment. Si le maximum est atteint sur ∂A , il n'y a rien à prouver. Sinon, s'il est atteint sur l'intérieur, alors la fonction est constante, et tout point de la frontière est un point de maximum. $\square$

3. * Montrer qu'en prenant $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque unité, et

$$f(x, y) = \begin{cases} n & \text{si } (x, y) = (\cos \frac{1}{n}, \sin \frac{1}{n}) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on obtient un exemple de fonction convexe sur un convexe compact dans $\mathbb{R}^2$ qui n'a pas de point de maximum.