Calcul différentiel — Partiel du 22 mars 2018.

Le sujet est probablement long, mais le barème en tient compte. Il n'est pas nécessaire de tout faire en 2 heures pour avoir la note maximale.

Exercice 1. (4 points environ)

On définit l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par la formule suivante, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

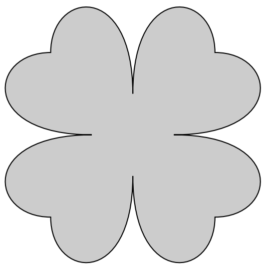
$$N((x, y)) = \max \{2|x|, |x + y|, |x - y|\}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner, en le justifiant, la boule unité de N.
3. Les normes N et $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ sont elles équivalentes ?
4. Déterminer deux constantes explicites c_1 et c_2, avec $0 < c_1 < c_2$, telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$c_1\|(x, y)\|_1 \leqslant N((x, y)) \leqslant c_2\|(x, y)\|_1.$$

Exercice 2. (6 points environ)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en le justifiant de manière concise avec une preuve ou un contre exemple.

1. Le trèfle à quatre feuilles suivant peut, par chance, être la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.



2. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie convexe de E (c'est à dire vérifiant pour tous x, y dans A et t dans $[0, 1]$, que $tx + (1 - t)y \in A$).
L'adhérence $\mathrm{adh}(A)$ de A est convexe elle aussi.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule ci-dessous est continue en $(0, 0)$.
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+|xy|)-|xy|}{(x-y)^2+x^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$
4. L'image d'un fermé par une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est un fermé.
5. L'ensemble $\left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M + M^{\mathrm{T}} \in GL_n(\mathbb{R})\right\}$ est un ouvert non borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. (4 points environ)

Soient U et V deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que $\mathrm{int}\,(\mathrm{adh}\,(U))$ et V sont disjoints.
2. Montrer qu'alors $\mathrm{int}\,(\mathrm{adh}\,(U))$ et $\mathrm{int}\,(\mathrm{adh}\,(V))$ sont disjoints.
3. La conclusion de la question précédente est-elle vraie si U et V sont des fermés disjoints ? Et si U et V sont des ensembles disjoints quelconques ?

Exercice 4. (4 points environ)

Soit G le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $G = \{(x, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}, y = \frac{1}{x^3}\sin(\frac{1}{x^3})\}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Montrer qu'il existe deux réels x_1 et x_2 dans $]0, r[$ tels que $\frac{1}{x_1^3}\sin(\frac{1}{x_1^3}) > y$ et $\frac{1}{x_2^3}\sin(\frac{1}{x_2^3}) < y$.

   En déduire que la boule ouverte de centre $(0, y)$ et de rayon r pour la norme infinie (c'est à dire $]-r, r[\times]y-r, y+r[$) intersecte G.
2. En déduire l'adhérence de G dans $\mathbb{R}^2$, notée $\mathrm{adh}(G)$.

Exercice 5. (4 points environ) On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme infinie de ses coefficients : si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $\|P\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$. On définit l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$, par

$$f(P) = \int_0^1 (P'(t))^2\, dt.$$

1. Montrer que pour $x \in [0, 1]$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $|P'(x)| \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\|P\|$.
2. Montrer que f est différentiable en tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer $df(P)(H)$ pour $H \in \mathbb{R}_n[X]$, où $df(P)$ est la différentielle de f en P.

Exercice 6. (5 points environ)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K une partie compacte non vide de E. Soit $f : K \mapsto K$ une application vérifiant

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad x \neq y, \qquad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'alors f admet un unique point fixe (c'est à dire un point $x \in K$ tel que $f(x) = x$).

1. Montrer que si f admet un point fixe, alors ce point fixe est unique.
2. Montrer que f est une fonction continue sur K.
3. On définit l'application $g : K \mapsto \mathbb{R}^+$ par

   $$\forall x \in K, \qquad g(x) = \|f(x) - x\|.$$

   Montrer que g atteint son minimum sur K en un point que l'on notera α.
4. Montrer que nécessairement $f(\alpha) = \alpha$, et conclure.
5. (Bonus) Soit x_n une suite définie par $x_0 \in K$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que x_n converge vers α.

   Indication : étudier les suites réelles $(\|x_n - \alpha\|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.