Calcul différentiel — Partiel du 22 mars 2018
Éléments de correction.

Exercice 1. On définit l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par la formule suivante, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N((x, y)) = \max\{2|x|, |x + y|, |x - y|\}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

   Solution. On a bien que N est une application à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On vérifie les trois axiomes définissant une norme.
   — Homogénéité : soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

   $$\begin{aligned} N(\lambda(x, y))N((\lambda x, \lambda y)) &= \max\{2|\lambda x|, |\lambda x + \lambda y|, |\lambda x - \lambda y|\} \\ &= \max\{2|\lambda||x|, |\lambda||x + y|, |\lambda||x - y|\} \\ &= |\lambda| \max\{2|x|, |x + y|, |x - y|\} = \lambda N((x, y)). \end{aligned}$$

   — Inégalité triangulaire : soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a

   $$2|x_1 + x_2| \leqslant 2|x_1| + 2|x_2| \leqslant N((x_1, y_1)) + N((x_2, y_2)),$$

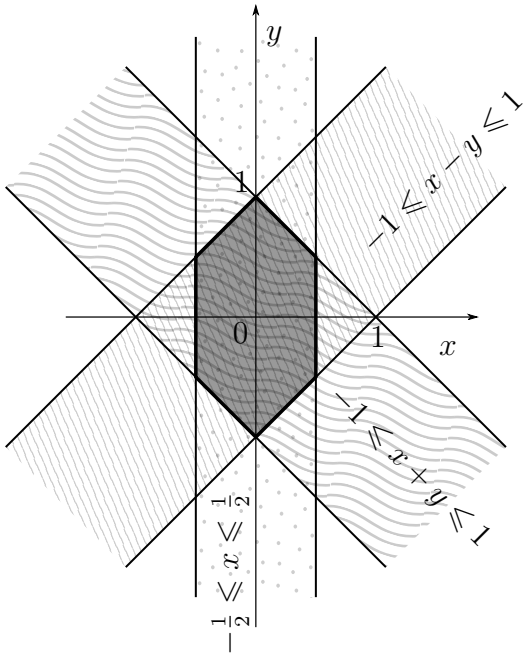
   $$|(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)| \leqslant |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leqslant N((x_1, y_1)) + N((x_2, y_2)),$$
   $$|(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)| \leqslant |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leqslant N((x_1, y_1)) + N((x_2, y_2)).$$

   Ainsi, comme $N((x_1, y_1)+(x_2, y_2))$ est le maximum des termes à gauche des trois inégalités précédentes, qui sont chacun inférieur à $N((x_1, y_1))+N((x_2, y_2))$, on obtient bien l'inégalité triangulaire.
   — Définition : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N((x, y)) = 0$. Alors $2|x| \leqslant N((x, y)) = 0$, donc $x = 0$. Puis, de même, $x + y = 0$, donc $y = 0$.

   □

2. Dessiner, en le justifiant, la boule unité de N.

   Solution. On cherche l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ tels que $N((x, y)) \leqslant 1$, ce qui équivaut à ce que $2|x| \leqslant 1$, $|x + y| \leqslant 1$ et $|x - y| \leqslant 1$. Autrement dit (x, y) doit être dans les trois régions d'équations $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ (une bande verticale, dessinée avec des points dans la figure suivante), $-1 \leqslant x - y \leqslant 1$ (une bande délimitée par les deux droites de pente 1 d'équation $y = x - 1$ et $y = x + 1$, hachurée sur la figure), et $-1 \leqslant x + y \leqslant 1$ (délimitée par deux droites de pente -1, avec hachures ondulées sur la figure).
   La boule unité de la norme N est donc l'hexagone (avec son intérieur) dessiné en gris sur la figure suivante, dont les sommets sont les points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0, 1)$, $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$, $(0, -1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$:



Pour une autre méthode, on aurait pu remarquer que par invariance de la norme par les opérations $(x, y) \mapsto (-x, y)$ et $(x, y) \mapsto (x, -y)$, la boule unité est symétrique par rapport aux deux axes. On se restreint alors au quadrant $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$. Dans ces conditions, on obtient que $N(x, y) \leqslant 1$ si et seulement si $x + y \leqslant 1$ et $x \leqslant \frac{1}{2}$. On peut dessiner cette région et compléter par symétrie, on obtient bien le même dessin.

□

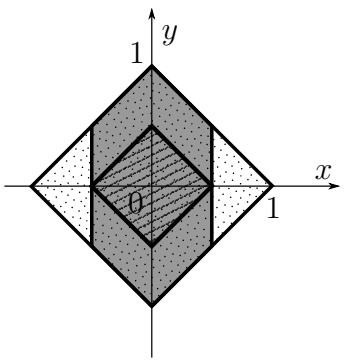
3. Les normes N et $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ sont elles équivalentes ?

   Solution. Oui, car par un théorème du cours, toutes les normes sont équivalentes en dimension finie. □

4. Déterminer deux constantes explicites c_1 et c_2, avec $0 < c_1 < c_2$, telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$c_1\|(x, y)\|_1 \leqslant N((x, y)) \leqslant c_2\|(x, y)\|_1.$$

   Solution. La « solution » graphique consiste à se souvenir de la forme de la boule unité pour la norme $\|\cdot\|_1$ et d'utiliser l'argument similaire à l'exercice 3 du TD (chapitre 1) : si on a des boules incluses l'une dans l'autre, alors on a des inégalités sur les normes. Sur le schéma suivant, on dessine la boule unité $B_{\|\cdot\|_1}$ pour la norme 1 (le carré de sommets $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, dessiné avec des points), ainsi que $\frac{1}{2}B_{\|\cdot\|_1}$ (les points (x, y) tels que $\|(x, y)\|_1 \leqslant \frac{1}{2}$, en hachuré sur le dessin), et la boule unité pour N, notée B_N (en gris). On voit que $\frac{1}{2}B_{\|\cdot\|_1} \subset B_N \subset B_{\|\cdot\|_1}$:



   Ceci nous donne que si $N((x, y)) = 1$, alors $(x, y) \in B_N$, donc $(x, y) \in B_{\|\cdot\|_1}$, c'est-à-dire $\|(x, y)\|_1 \leqslant 1$. Par homogénéité des deux normes, on obtient donc que si $N((x, y)) = \lambda$, alors $\|(x, y)\|_1 \leqslant \lambda = N((x, y))$. Ceci nous donne l'inégalité de gauche de la question, avec $c_1 = 1$.

De même si $\|(x,y)\|_1 = \frac{1}{2}$, alors $N((x,y)) \leqslant 1$. Par homogénéité des deux normes, on obtient donc que si $\|(x,y)\|_1 = \frac{\lambda}{2}$, alors $N((x,y)) \leqslant \lambda = 2\|(x,y)\|_1$. Ceci donne l'inégalité de droite de l'énoncé, avec $c_2 = 2$.

La version calculatoire consiste à faire les estimations à la main :

— Borne par au dessus : soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Notez que $2|x| \leqslant 2(|x| + |y|) = 2\|(x,y)\|_1$. Par ailleurs, par l'inégalité triangulaire, comme $|x-y|$ et $|x+y|$ sont tous deux majorés par $|x| + |y| = \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_1$, on obtient

$$N((x,y)) \leqslant 2\|(x,y)\|_1.$$

Ainsi, $\underline{c_2 = 2 \text{ convient}}$.

— Borne par en dessous : soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On distingue les cas suivant le signe de x et y. On a

$$|x| + |y| = \begin{cases} x + y = |x+y| & \text{si } x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ -x + y = |x-y| & \text{si } x \leqslant 0, y \geqslant 0 \\ -x - y = |x+y| & \text{si } x \leqslant 0, y \leqslant 0 \\ x - y = |x-y| & \text{si } x \geqslant 0, y \leqslant 0. \end{cases}$$

On a donc dans tous les cas $|x| + |y| \leqslant \max\{|x+y|, |x-y|\} \leqslant N((x,y))$. Ainsi, $\underline{c_1 = 1 \text{ convient}}$.

Remarque. Le dessin montre qu'on ne peut pas faire mieux que $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$ (on ne peut pas inclure des boules « plus grandes »).

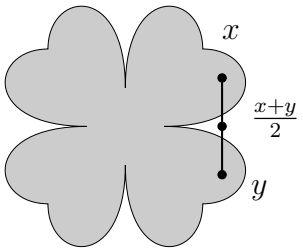
On peut aussi le montrer à la main, en trouvant des (x,y) saturant les inégalités, par exemple en observant que $\|(0,1)\|_1 = 1 = N((0,1))$, et $N((1,0)) = 2 = 2\|(1,0)\|_1$.

Ceci dit, ce n'était pas inclus dans la question, donc toute preuve correcte d'inégalités aboutissant à des valeurs $c_1 \leqslant 1$ et $c_2 \geqslant 2$ est acceptée.

□

Exercice 2. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en le justifiant de manière concise avec une preuve ou un contre exemple.

1. Le trèfle à quatre feuilles suivant peut, par chance, être la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.



Solution. **FAUX**. Manque de convexité (voir l'exercice 6 du TD, chapitre 1) : s'il s'agissait de la boule unité pour la norme $\|\cdot\|$, en posant x et y comme sur la figure annotée ci-dessus, on obtiendrait $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ et $\|\frac{x+y}{2}\| > 1$.
Or on aurait aussi $\|\frac{x+y}{2}\| = \frac{1}{2}\|x+y\| \leqslant \frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) \leqslant 1$ (par homogénéité puis inégalité triangulaire), ce qui donne la contradiction. □

2. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie convexe de E (c'est à dire vérifiant pour tous x, y dans A et t dans $[0,1]$, que $tx + (1-t)y \in A$). L'adhérence $\mathrm{adh}(A)$ de A est convexe elle aussi.

Solution. **VRAI**. Soient x, y dans $\mathrm{adh}(A)$ et $t \in [0,1]$, montrons que $tx + (1-t)y$ est aussi dans $\mathrm{adh}(A)$. Par la caractérisation séquentielle de l'adhérence, on peut trouver deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A qui convergent respectivement vers x et y. Mais alors la suite $(tx_n + (1-t)y_n)$ est une suite d'éléments de A (puisque A est convexe), qui converge vers $tx + (1-t)y$: en effet, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'homogénéité (on parle de convexité de la norme), on a

$$\|tx_n + (1-t)y_n - (tx + (1-t)y)\| \leqslant |t|\|x_n - x\| + |1-t|\|y_n - y\| \to 0.$$

Ceci donne, toujours par la caractérisation séquentielle, que $tx + (1-t)y \in \mathrm{adh}(A)$. □

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule ci-dessous est continue en $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+|xy|)-|xy|}{(x-y)^2+x^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Solution. **FAUX**. On a besoin de comprendre le comportement de la fonction lorsque x et y sont proches de 0. Dans ce cas, $|xy|$ est également proche de 0. Par le développement limité $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, on peut donc écrire que $\ln(1+|xy|) - |xy| = -\frac{x^2y^2}{2} + o(x^2y^2)$.
On peut voir qu'en « prenant $x = y$ », on obtient comme expression $\frac{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^6}$, qui tend vers l'infini en 0.
On cherche donc à nier la caractérisation séquentielle de la continuité en trouvant une suite d'éléments (x_n, y_n) qui tend vers $(0,0)$ et telle que $f((x_n, y_n))$ ne tend pas vers $f(0,0)$. Ce qui est écrit précédemment peut donc être rendu rigoureux : on prend une suite (x_n) d'éléments non nuls qui tend vers 0 et on prend $y_n = x_n$, on obtient

$$f(x_n, y_n) = \frac{-\frac{1}{2}x_n^4 + o(x_n^4)}{x_n^6} = -\frac{1}{2x_n^2} + o\left(\frac{1}{x_n^2}\right) \to +\infty.$$

On pouvait aussi simplement dire que si f était continue, alors la fonction g définie par la formule $g(t) = f(t,t) = \frac{\ln(1+t^2)-t^2}{t^6}$ serait continue en 0 (par opérations sur les fonctions continues), ce qui n'est pas le cas par le calcul du même développement limité. □

4. L'image d'un fermé par une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est un fermé.

   Solution. **FAUX.** On peut poser $f(x,y) = e^x$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ tout entier est un fermé alors que son image $f(\mathbb{R}^2) =]0, +\infty[$ n'est pas fermé.
   On aurait pu aussi prendre par exemple $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ et $f(x,y) = x$ (la projection sur l'axe des abscisses). Alors $f(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui n'est pas fermé.
   Dans tous les cas il fallait forcément prendre un fermé non borné (puisque l'image d'un compact par une fonction continue est compacte, donc fermée). □

5. L'ensemble $\left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M + M^{\mathrm{T}} \in GL_n(\mathbb{R})\right\}$ est un ouvert non borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Solution. **VRAI.** Notons cet ensemble Ω. On a donc

   $$\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(M + M^{\mathrm{T}}) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

   C'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par l'application continue (la formule du déterminant nous donne qu'il s'agit d'un nombre fini de multiplications et additions faisant intervenir les coefficients de la matrice M). Par ailleurs, Ω n'est pas borné puisqu'il contient la suite de points $(M_k)_{k\geqslant 1} = (kI_n)_{k\geqslant 1}$, qui n'est pas bornée, puisque $\|M_k\| = k\|I_n\|$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $k \to +\infty$ (peu importe la norme, on a forcément $\|I_n\| \neq 0$).
   En utilisant le résultat du cours disant que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, on pouvait dire également que Ω est l'image réciproque de $GL_n(\mathbb{R})$ par l'application $M \mapsto M + M^{\mathrm{T}}$ (continue car linéaire en dimension finie). □

Exercice 3. Soient U et V deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que $\text{int}\,(\text{adh}\,(U))$ et V sont disjoints.

   Solution. Il s'agit d'une variante de l'exercice 13 du TD du chapitre 1 (qui nous dit que $\text{adh}(U)$ et V sont disjoints, et donc comme $\text{int}(\text{adh}(U)) \subset \text{adh}(U)$, on obtient le résultat).
   Une manière de faire est de noter F le complémentaire de V. Comme V est ouvert, alors F est un fermé. Et comme $U \cap V = \emptyset$ alors U est inclus dans F. Donc $\text{adh}(U)$ est aussi inclus dans F (qui est fermé). Autrement dit, comme F est le complémentaire de V, alors $\text{adh}(U) \cap V = \emptyset$. Enfin comme $\text{int}(\text{adh}(U)) \subset \text{adh}(U)$, on conclut que l'on a également $\text{int}(\text{adh}(U)) \cap V = \emptyset$.
   On pouvait aussi raisonner par l'absurde en supposant que $\text{int}\,(\text{adh}\,(U)) \cap V \neq \emptyset$. Prenons alors un élément x de $\text{int}\,(\text{adh}\,(U)) \cap V$.
   Comme $\text{int}\,(\text{adh}\,(U))$ et V sont des ouverts, leur intersection aussi, et il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r)$ soit incluse dans $\text{int}\,(\text{adh}\,(U)) \cap V$ et donc incluse également dans $\text{adh}\,(U) \cap V$.
   Par définition de l'adhérence, comme $x \in \text{adh}\,(U)$, la boule $B(x, r)$ intersecte U. On peut donc trouver un point de $B(x, r)$ qui appartient à la fois à U et à V, ce qui est impossible puisque U et V sont supposés disjoints. □

2. Montrer qu'alors $\text{int}\,(\text{adh}\,(U))$ et $\text{int}\,(\text{adh}\,(V))$ sont disjoints.

   Solution. Appelons $V' = \text{int}\,(\text{adh}\,(U))$ et $U' = V$. Il est immédiat que U' et V' sont des ouverts. Par la question précédente, ces derniers sont disjoints. Ainsi, en appliquant à nouveau la question précédente à U' et V', on déduit que $\text{int}\,(\text{adh}\,(U'))$ et V' sont disjoints, c'est à dire exactement que $\text{int}\,(\text{adh}\,(V))$ et $\text{int}\,(\text{adh}\,(U))$ sont disjoints. □

3. La conclusion de la question précédente est-elle vraie si U et V sont des fermés disjoints ? Et si U et V sont des ensembles disjoints quelconques ?

   Solution. Si U et V sont des fermés disjoints, alors $\text{int}\,(\text{adh}\,(U)) = \text{int}\,(U) \subset U$ et de même $\text{int}\,(\text{adh}\,(V)) \subset V$. Donc la conclusion reste vraie.
   Dans le cas d'ensembles disjoints quelconques, l'exemple $U = \mathbb{Q}$ et $V = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ montre que la conclusion n'est pas nécessairement vérifiée, dans les deux cas l'adhérence est $\mathbb{R}$, donc l'intérieur de l'adhérence est aussi $\mathbb{R}$. □

Exercice 4. Soit G le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $G = \{(x, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}, y = \frac{1}{x^3}\sin(\frac{1}{x^3})\}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Montrer qu'il existe deux réels x_1 et x_2 dans $]0, r[$ tels que $\frac{1}{x_1^3}\sin(\frac{1}{x_1^3}) > y$ et $\frac{1}{x_2^3}\sin(\frac{1}{x_2^3}) < y$.
   En déduire que la boule ouverte de centre $(0, y)$ et de rayon r pour la norme infinie (c'est à dire $]-r, r[\times]y-r, y+r[$) intersecte G.

   Solution. Il suffit de montrer qu'il existe une suite de réels strictement positifs (t_n) tendant vers 0 telle que $\frac{1}{t_n}\sin(\frac{1}{t_n}) \to +\infty$, on prendra alors x_1 de la forme $(t_n)^{\frac{1}{3}}$ avec n suffisamment grand pour que à la fois $(t_n)^{\frac{1}{3}} < r$ (possible, puisque $t_n \to 0$) et que $\frac{1}{t_n}\sin(\frac{1}{t_n}) > y$.
   On peut prendre par exemple $t_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, de sorte que $\sin(\frac{1}{t_n}) = 1$, et donc on obtient que $\frac{1}{t_n}\sin(\frac{1}{t_n} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty$.
   Pour trouver le réel x_2, on de même chose avec une suite telle que $\frac{1}{t_n}\sin(\frac{1}{t_n}) \to -\infty$, en prenant par exemple $t_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}$.
   Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons maintenant que $G \cap]-r, r[\times]y-r, y+r[$ est non vide. Pour cela, il nous faut trouver un point de la forme $\left(x, \frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$ dans $]-r, r[\times]y-r, y+r[$.
   La fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x^3}\sin(\frac{1}{x^3})$ est continue sur $]0, r[$. De plus, d'après la construction précédente, $h(x_1) > y$ et $h(x_2) < y$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x \in]0, r[$ tel que $h(x) = y$, ce qui conclut. □

2. En déduire l'adhérence de G dans $\mathbb{R}^2$, notée $\mathrm{adh}(G)$.

   Solution. Montrons que $\mathrm{adh}\, G = G \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

   Raisonnons par double inclusion. La question précédente montre que $\{0\} \times \mathbb{R}$ est inclus dans $\mathrm{adh}(G)$ puisque toute boule ouverte centrée en un point de $\{0\} \times \mathbb{R}$ intersecte G. Comme $G \subset \mathrm{adh}(G)$, on déduit que $G \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathrm{adh}(G)$.
   Pour montrer l'inclusion réciproque, on va utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence. Soit $(x, y) \in \mathrm{adh}(G)$. Prenons (x_n, y_n) une suite de points qui converge vers (x, y). On a donc $x_n \in]0, +\infty[$, avec (x_n) qui converge vers x et $y_n = \frac{1}{x_n^3}\sin(\frac{1}{x_n^3})$, qui tend vers y. Comme $x_n > 0$, par passage à la limite $x \geqslant 0$. Si $x > 0$, alors par continuité de $t \mapsto \frac{1}{t^3}\sin(\frac{1}{t^3})$ sur $]0, +\infty[$, la suite (y_n) converge vers $\frac{1}{x^3}\sin(\frac{1}{x^3})$, donc par unicité de la limite $y = \frac{1}{x^3}\sin(\frac{1}{x^3})$ et donc $(x, y) \in G$. Sinon, on a $x = 0$ et alors $(x, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}$. □

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme infinie de ses coefficients : si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $\|P\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$. On définit l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$, par

$$f(P) = \int_0^1 \left(P'(t)\right)^2 \, dt.$$

1. Montrer que pour $x \in [0,1]$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $|P'(x)| \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\|P\|$.

   Solution. Soit $x \in [0,1]$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On écrit

   $$|P'(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} k|a_k|x^{k-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|,$$

   où l'on a utilisé l'inégalité triangulaire d'abord puis $x \in [0,1]$ et $|a_k| \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$ à la dernière étape. On conclut

   $$\forall x \in [0,1], \qquad |P'(x)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \|P\| = \frac{n(n+1)}{2}\|P\|.$$

   □

2. Montrer que f est différentiable en tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer $df(P)(H)$ pour $H \in \mathbb{R}_n[X]$, où $df(P)$ est la différentielle de f en P.

   Solution. Établissons la différentiabilité de f en $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ en revenant à la définition (on a bien $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie). Soit $H \in \mathbb{R}_n[X]$,

   $$\begin{aligned} f(P_0 + H) &= \int_0^1 \left(P_0'(t) + H'(t)\right)^2 \, dt \\ &= \int_0^1 \left(P_0'(t)\right)^2 \, dt + 2\int_0^1 P_0'(t)H'(t)\, dt + \int_0^1 \left(H'(t)\right)^2 \, dt. \end{aligned}$$

   On reconnaît $f(P_0)$ dans le premier terme, et le deuxième terme est linéaire en H (et pas le troisième). Définissons alors $df(P_0)(H) = 2\int_0^1 P_0'(t)H'(t)\, dt$. C'est une application linéaire (en H). Il reste alors à montrer que le reste $\int_0^1 \left(H'(t)\right)^2 \, dt$ s'écrit sous la forme $\|H\|\varepsilon(H)$, avec $\varepsilon(H) \to 0$ quand $\|H\| \to 0$. On étudie donc

   $$\begin{aligned} |\varepsilon(H)| &= \frac{1}{\|H\|}\left|\int_0^1 \left(H'(t)\right)^2 \, dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\|H\|}\int_0^1 \left(\frac{n(n+1)}{2}\|H\|\right)^2 \, dt = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \|H\|, \end{aligned}$$

   et ce dernier terme tend bien vers 0 lorsque $\|H\| \to 0$.
   L'application f est donc différentiable en P_0 et $df(P_0)(H) = 2\int_0^1 P_0'(t)H'(t)\, dt$. □

Exercice 6. (5 points environ)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K une partie compacte non vide de E. Soit $f : K \mapsto K$ une application vérifiant

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad x \neq y, \qquad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'alors f admet un unique point fixe (c'est à dire un point $x \in K$ tel que $f(x) = x$).

1. Montrer que si f admet un point fixe, alors ce point fixe est unique.

   Solution. Supposons que f ait pour point fixe $\alpha \in K$ et $\beta \in K$, avec $\alpha \neq \beta$. Alors $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$. Mais alors, par la propriété fonctionnelle satisfaite par f,

   $$\|\alpha - \beta\| = \|f(\alpha) - f(\beta)\| < \|\alpha - \beta\|,$$

   ce qui est impossible. Ainsi, si f admet un point fixe, il est unique. □

2. Montrer que f est une fonction continue sur K.

   Solution. La fonction f est $1-$Lipschitzienne. En effet si $x \neq y$, l'inégalité stricte est une inégalité large, et si $x = y$, on a bien $0 = \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\| = 0$. Donc f est continue. □

3. On définit l'application $g : K \mapsto \mathbb{R}^+$ par

   $$\forall x \in K, \qquad g(x) = \|f(x) - x\|.$$

   Montrer que g atteint son minimum sur K en un point que l'on notera α.

   Solution. Une norme étant continue, la fonction g est continue par opérations sur les fonctions continues (addition, puis composition). Par un théorème du cours, toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes sur ce compact. En particulier, g atteint son minimum sur K. □

4. Montrer que nécessairement $f(\alpha) = \alpha$, et conclure.

   Solution. Supposons par l'absurde que $f(\alpha) \neq \alpha$. Mais alors, par la propriété fonctionnelle satisfaite par f appliquée aux points α et $f(\alpha)$, on a

   $$g(f(\alpha)) = \|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| < \|f(\alpha) - \alpha\| = g(\alpha),$$

   ce qui contredit le caractère minimal de $g(\alpha)$. Ainsi, $f(\alpha) = \alpha$. On conclut que f admet un point fixe, qui est alors unique par le résultat de la première question. □

5. (Bonus) Soit x_n une suite définie par $x_0 \in K$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que x_n converge vers α.

   Solution. La suite x_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque K est stable par la fonction f. Comme f est 1-Lipschitz, on a

   $$\|x_{n+1} - \alpha\| = \|f(x_n) - f(\alpha)\| \leqslant \|x_n - \alpha\|.$$

   La suite $\delta_n = \|x_n - \alpha\|$ est donc positive et décroissante, notons δ sa limite. On veut montrer que $\delta = 0$.

   Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans le compact K, elle y admet donc une valeur d'adhérence $\ell \in K$. Soit donc $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une extraction (strictement croissante) telle que $x_{\varphi(n)}$ tend vers ℓ. Par continuité, on obtient que $\|x_{\varphi(n)} - \alpha\| \to \|\ell - \alpha\|$, donc $\delta = \|\ell - \alpha\|$.

Il suffit donc de montrer que $\ell = \alpha$. Pour cela on fait comme dans la question précédente. Comme f est $1-$Lipschitz, on a

$$g(x_{n+1}) = g(f(x_n)) = \|f(f(x_n)) - f(x_n)\| \leqslant \|f(x_n) - x_n\| = g(x_n),$$

donc la suite $(g(x_n))$ est positive, décroissante, et admet une limite $c \geqslant 0$. On a alors que $g(x_{\varphi(n)}) \to g(\ell)$, donc $g(\ell) = c$, et $g(x_{\varphi(n)+1}) = g(f(x_{\varphi(n)})) \to g(f(\ell))$, donc $g(f(\ell)) = c$. Comme dans la question précédente, si on avait $f(\ell) \neq \ell$, on obtiendrait $g(f(\ell)) < g(\ell)$, on obtient donc que $f(\ell) = \ell$, et par unicité du point fixe, $\ell = \alpha$. Et donc $\delta = \|\ell - \alpha\| = 0$, ce qui conclut. □