Université Paris Dauphine
S4 MIDO
Année 2017-2018

Calcul différentiel et optimisation :

Exercices

Responsables :
Amic Frouvelle

frouvelle@ceremade.dauphine.fr

bureau C610
Nejla Nouaili

nouaili@ceremade.dauphine.fr

bureau B618 bis

1. Topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1
Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer les inégalités

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty\,.$$

Montrer que ces inégalités sont saturées pour au moins un certain $x \in \mathbb{R}^n$. Pour $n = 2$, représenter graphiquement la boule unité de ces trois normes.

Exercice 2
Montrer les identités suivantes pour la norme $\|\cdot\|_2$:

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2 \quad \text{(parallélogramme)},\\
&\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|_2^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|_2^2 \quad \text{(polarisation)},\\
&\langle x, y\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \|x+y\|^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \quad \text{(Pythagore)},
\end{aligned}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3
Soient $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$, et soient B_a et B_b leurs boules unité respectives. Montrer que

$$B_a \subset B_b \qquad \Leftrightarrow \qquad \|x\|_b \leq \|x\|_a \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 4
Montrer que les fonctions suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unité correspondantes :

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \max(|x+y|, |x-2y|),\\
f_2(x,y) &= \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|,\\
f_3(x,y) &= \int_0^1 |x+ty|\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5
Deux normes différentes sur $\mathbb{R}^n$ peuvent-elles avoir la même boule unité ?

Exercice 6
Soit un sous-ensemble $B \subset \mathbb{R}^n$ tel que

(1) B est fermé borné,

(2) B est convexe : si $x, y \in B$, alors $tx + (1-t)y \in B$ pour tout $t \in [0,1]$,

(3) $x \in B \Leftrightarrow -x \in B$,

(4) 0 est un point intérieur de B.

Montrer que $N(x) = \inf\{a > 0 : \frac{x}{a} \in B\}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et admet B comme boule unité fermée.

Exercice 7

On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ si $\mathrm{adh}(A) = \mathbb{R}^n$.

(1) Soit x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout y dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $x = 0$.

(2) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble dense, et soit x dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout y dans A. Montrer que $x = 0$.

(3) Montrer que $\|x\|_2 = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n, \|y\|=1} \langle x, y\rangle = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n, \|y\|\leq 1} \langle x, y\rangle$.

Exercice 8

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergente, de limite u. Montrer que l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{u\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|$. Pour x dans $\mathbb{R}^n$ on note $d(x, A) = \inf\limits_{a\in A} \|x - a\|$ la distance de x à A.

(1) Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$.

(2) Si A est fermé et $x \notin A$, montrer que $d(x, A) > 0$.

(3) Si A est fermé, montrer qu'il existe a dans A tel que $d(x, A) = \|x - a\|$.

(4) Dans le cas où $n = 1$ et $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$, calculer $d(2, A)$. Existe-t-il a dans A tel que $d(2, A) = \|2 - a\|$?

Exercice 10

Soit le sous-ensemble de $\mathbb{R}$

$$A = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*} \left]\frac{p}{q} - \frac{1}{2^{|p|+q}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2^{|p|+q}}\right[.$$

Montrer que A est ouvert et dense dans $\mathbb{R}$. Est-ce que $\mathbb{R} \subset A$? Soit maintenant

$$B = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{2^{|p|+q}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2^{|p|+q}}\right].$$

Est-ce que $\mathbb{R} \subset B$?

Exercice 11

Identifions $\mathbb{R}^4$ à l'espace des matrices réelles 2×2. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est ouvert et dense dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 12
Déterminer l'adhérence des ensembles suivants

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x), x \neq 0\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x = 1/n \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}^*\},$$
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \neq 0\}.$$

Exercice 13
Montrer que si A et B sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $A \cap B = \varnothing$, alors $\mathrm{adh}(A) \cap B = \varnothing$, mais en général $\mathrm{adh}(A) \cap \mathrm{adh}(B) \neq \varnothing$.

Exercice 14
Construire un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ tel que les cinq ensembles suivants soient tous distincts :

$$A,\ \mathrm{adh}(A),\ \mathrm{int}(A),\ \mathrm{adh}(\mathrm{int}(A)),\ \mathrm{int}(\mathrm{adh}(A)).$$

Exercice 15
Soit une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $a > 0$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > a\}$ est fini. Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 16
Le bord ∂A d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ se définit par $\partial A = \mathrm{adh}(A)/\mathrm{int}(A)$. Montrer que

(1) $\partial(A) = \partial(A^c)$,

(2) $\partial(\mathrm{adh}(A)) \subset \partial A$, $\partial(\mathrm{int}(A)) \subset \partial A$ et que les inclusions sont strictes en général,

(3) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ et que l'inclusion est stricte en général.

Exercice 17
Donner un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ infini fermé borné qui soit aussi un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$.

2. Continuité

Exercice 1
Etudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x, y) = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}, \qquad f_2(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \qquad f_3(x, y) = -4xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$
$$f_4(x, y) = \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f_5(x, y) = \frac{x - \sin x}{x^2 + y^2}, \qquad f_6(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^4},$$
$$f_7(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f_i(0, 0) = 0$ $(i = 1, ..., 7)$.

Exercice 2

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

(1) Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ est continue en $(0,0)$.

(2) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}$ par $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y}$. Montrer que l'on peut définir $f(x,x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ de sorte que la fonction f ainsi prolongée soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et h l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = f(x)+g(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose h continue en (x_0, y_0). L'application f est-elle continue en x_0 ? L'application g est-elle continue en y_0 ?

Exercice 5

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que, si f est continue, l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(x)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(2) Cet ensemble peut-il être borné dans $\mathbb{R}^{n+1}$?

(3) Est-il vrai que, si A est fermé, alors f est continue ?

Exercice 6

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que A est fermé si et seulement s'il existe une application continue f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$. Indication : considérer la distance $d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x-a\|$.

Exercice 7

Soit une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

(1) Montrer que f est continue si et seulement si $f(\mathrm{adh}(A)) \subset \mathrm{adh}(f(A))$ pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$.

(2) En déduire que, si f est continue, l'image d'un ensemble dense dans $\mathbb{R}^n$ est dense dans $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$.

Exercice 8

Soit A et B deux fermés non vides et disjoints de $\mathbb{R}^n$, muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en posant $f(x) = d(x,A) - d(x,B)$ où $d(x,E) = \inf\{\|x-y\|, y \in E\}$. Montrer que f est continue et en déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 9
Montrer que l'ensemble $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10
Un polynôme de degré 3 en une variable s'écrit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$. On peut donc identifier l'ensemble de ces polynômes au domaine

$$\mathcal{P} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a \neq 0\}.$$

Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à chaque polynôme de degré 3 sa plus grande racine réelle. L'application f est-elle continue sur $\mathcal{P}$?

Exercice 11

(1) Etablir que la plus grande valeur propre λ_{max} d'une matrice $n \times n$ symétrique A est donnée par

$$\lambda_{max} = \max_{\mathbb{R}^n \ni x \neq 0} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

(on admet que les matrices symétriques sont diagonalisables par un changement de base orthogonal).

(2) On identifie $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ à l'espace des matrices symétriques $n \times n$. On définit une application $f : \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \to \mathbb{R}$ qui associe à chaque matrice symétrique sa plus grande valeur propre. L'application f est-elle partout continue ?

Exercice 12

(1) Trouver les fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfont

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Indication : montrer d'abord que pour tout rationnel r, on a $f(rx) = rf(x)$.

(2) Trouver les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui satisfont $g(x + y) = g(x)g(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

(3) Application : montrer qu'une norme sur $\mathbb{R}^n$ dérive d'un produit scalaire si et seulement si elle satisfait l'identité du parallélogramme (voir l'exercice 2 du chapitre 1).

3. Différentiabilité : calcul des dérivées premières

Exercice 1
Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (e^t, \sin t, \cos t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2
Soient les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = x^\alpha y^\beta \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \qquad g(x,y) = x^y,$$
$$h(x,y) = \exp(xy)\ln(1+x^2+y^2), \qquad k(x,y) = \frac{y\sin(xy)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Le domaine de f est l'ensemble $]0,+\infty[^2$, le domaine de g est $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, et les domaines de h et k sont les plus grands sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ (au sens de l'inclusion) où les expressions algébriques qui définissent h et k ont un sens. Montrer que les domaines de ces fonctions sont des ouverts, que ces fonctions sont différentiables sur leurs domaines, et calculer leurs gradients.

Exercice 3
Pour les fonctions f suivantes sur $\mathbb{R}^2$, déterminer la courbe de niveau a de f, puis calculer la tangente à la courbe de niveau de f au point M :

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}, \quad a = 2, \quad M = (\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$
$$f(x,y) = \frac{xy-x+y}{xy}, \quad a = 1 \text{ et } a = 2, \quad M = (2,-2),$$
$$f(x,y) = \min(x,y), \quad a = 3, \quad M = (4,3).$$

Exercice 4
Soit $\Lambda = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, x_i > 0\big\}$.

(1) Montrer que Λ est ouvert.
(2) On considère les fonctions suivantes sur le domaine Λ :

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1 + x_2^{1/2} + \cdots + x_i^{1/i} + \cdots + x_n^{1/n},$$
$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1 x_2^2 x_3^3 \ldots x_i^i \ldots x_n^n.$$

Montrer que ces fonctions sont différentiables sur Λ et calculer leurs gradients.

Exercice 5
On considère l'application f définie par :

$$f(x,y,z) = \big(\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}, xy\exp(z), x^2+y^3+4z\big).$$

(1) Déterminer le domaine de définition de f (c'est-à-dire le plus grand domaine sur lequel l'expression algébrique qui définit f a un sens) et montrer que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
(2) Montrer que f est différentiable sur son domaine et calculer sa matrice jacobienne en tout point du domaine.
(3) La norme d'une application linéaire A se définit par $\sup_{x\neq 0} \|Ax\|/\|x\|$. Calculer la norme de $J_f(x)$ en $x = (1,1,0)$ pour $\mathbb{R}^3$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ puis de la norme $\|.\|_1$.

Exercice 6
Calculer le gradient de l'application

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, (\beta, x) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\beta(z-x)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Exercice 7
La loi Γ dépend de deux paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, et a pour fonction de densité

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}}{Z(\alpha,\beta)} 1_{\{x>0\}},$$

où $Z(\alpha,\beta)$ est un facteur de normalisation.
(1) Calculer la dépendence en β de $Z(\alpha,\beta)$.
(2) Par dérivation par rapport à β, calculer la moyenne et la variance de la distribution Γ en fonction de α et β.

Exercice 8
On identifie $\mathbb{R}^{n^2}$ à l'espace des matrices rélles $n \times n$.
(1) Calculer la diffŕentielle de l'application $A \mapsto \text{dét}(A)$ en la matrice nulle, puis en l'identité.
(2) Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est ouvert. Calculer la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ sur cet ouvert.

Exercice 9
(1) Soit une application différentiable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et soit une application différentiable $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Montrer que l'application $u = f \circ \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ résout l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

(2) Etant donné une application différentiable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, trouver une solution u de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \sin x \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

telle que $u(0,y) = g(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 10
Les coordonnées polaires sont définies par l'application

$$\phi : U = \mathbb{R}_+^* \times] - \pi, \pi[\mapsto \mathbb{R}^2, (r, \theta) \mapsto (r \sin\theta, r\cos\theta).$$

(1) Calculer la jacobienne de ϕ en tout point de U.
(2) Calculer la jacobienne de la réciproque de ϕ (où $\phi : U \mapsto \phi(U)$).
(3) Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\phi(U)$. Exprimer le gradient de $f \circ \phi$ en fonctions des dérivées partielles de f.

4. Différentiabilité : autres exercices sur les dérivées premières

Exercice 1
(1) Montrer qu'une norme sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas différentiable en 0.
(2) Montrer que la norme $\|\cdot\|_2$ est différentiable en dehors de 0 et calculer son gradient.
(3) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles différentiables en dehors de l'origine ?

Exercice 2
Soit f une fonction homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une fonction telle que $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.
(1) Calculer la dérivée de $\lambda \to f(\lambda x)$ de deux façons différentes pour obtenir l'identité

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i} f(x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(2) Montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ homogène de degré 1 est linéaire (de façon générale, les fonctions homogènes de classe $\mathcal{C}^n$ sont des polynômes de degré n).

Exercice 3
Soit g, h et $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$g(x,y) = x + y, \quad h(x,y) = x + y^2, \quad k(x,y) = x^2 + y.$$

(1) Dans chacun des cas suivants déterminer, si elle existe, une fonction f différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g,\ \frac{\partial f}{\partial y} = h; \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = g,\ \frac{\partial f}{\partial y} = k; \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = h,\ \frac{\partial f}{\partial y} = k.$$

(2) Discuter, dans les cas d'existence, l'eventuelle unicité : si l'on trouve deux telles fonctions f_1 et f_2, que peut-on dire de $f_1 - f_2$?

Exercice 4
Pour $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle $D_v f(x)$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en x est définie par $D_v f(x) = \lim_{h \to 0}(f(x + hv) - f(x))/h$.

(1) Si f est différentiable en x, montrer que $D_v f(x) = df(x)v = \langle \nabla f(x), v \rangle$.

(2) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0$$

est continue en $(0,0)$, admet des dérivées directionnelles pour tout v en $(0,0)$, mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5

Soit $f(x,y) = (x^2+y^4)^{1/3}$.

(1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calculer les dérivées partielles premières de f en un point $(x,y) \neq (0,0)$.

(2) La fonction f admet-elle des dérivées partielles au point $(0,0)$?

Exercice 6

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y, \quad f(x,x) = g'(x).$$

Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivés partielles en tout point et qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq M, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq M \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer qu'alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Soit une fonction f différentiable sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{R}^2$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in U$. Peut-on en conclure que f ne dépend pas de x ?

5. Différentiabilité : dérivées secondes et développements limités

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et calculer leur valeur. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 2
Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner un exemple, s'il existe, de fonction différentiable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont A est la différentielle en 0.

(2) Donner un exemple, s'il existe, de fonction deux fois différentiable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de matrice hessienne A en 0.

(3) Donner un exemple, s'il existe, de fonction deux fois différentiable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de matrice hessienne $A + A^T$ en 0.

Exercice 3
Ecrire le développement de Taylor d'ordre 2 en $(0,0)$ des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \ln(1+2x+3y), \\ g(x,y) &= x^2 \mathrm{e}^y - y\mathrm{e}^x, \\ h(x,y) &= \cos\left(\tan(x+\sin y)\right). \end{aligned}$$

Exercice 4
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(x+y) - \cos(x-y) - e^{x+y} + 2$.

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer le plus petit entier p tel qu'il existe une dérivée partielle d'ordre p de f en $(0,0)$ non nulle.

(2) Ecrire le développement de Taylor de f en $(0,0)$ jusqu'à l'ordre p inclus.

(3) Déterminer la limite éventuelle

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^p}.$$

Exercice 5
Soit une fonction continue $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et soient les applications $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$h(x,y) = \int_0^x \sin(y-t)\phi(t)\mathrm{d}t, \qquad g(x) = h(x,x).$$

Donner une expression de la dérivée de g, et montrer que g résout l'équation $g'' + g = \phi$.

6. Convexité

Exercice 1
Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils convexes ?

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\},\\
&\mathcal{E}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - x + y + 1/4 < 0\},\\
&\mathcal{E}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y + 1 < 0 \text{ ou } y \geq 0\},\\
&\mathcal{E}_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 < 0 \text{ et } -2 < x + y \leq 2\}.
\end{aligned}$$

Exercice 2
Pour les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, étudier la convexité locale au point demandé :

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = \frac{x^2}{2x - y^2} \quad \text{en} \quad M = (3,2),\\
&g(x,y) = x^2 \mathrm{e}^y - y\mathrm{e}^x \quad \text{en} \quad M = (0,0),\\
&h(x,y) = y\tan x + x\tan y \quad \text{en} \quad M = (0,0).
\end{aligned}$$

Exercice 3
Montrer que les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4$ et $g(x,y) = (x-y)^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}^2$, mais que $h = f - g$ n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4
Une fonction affine sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction de la forme $f(x) = \langle a, x\rangle + b$, pour un certain $a \in \mathbb{R}^n$ et un certain $b \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que, si g est une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et si f est affine sur $\mathbb{R}^n$, alors $g \circ f$ est convexe sur tout convexe $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f(U) \subset I$.

(2) Déterminer le domaine de la fonction h définie par $h(x,y) = \ln(x + 3y - 1)$, montrer qu'il est convexe, et étudier la convexité de h.

Exercice 5
Soit la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{1 - xy}{x + y}.$$

(1) Déterminer le domaine de f, montrer que ses composantes connexes sont convexes et étudier la convexité de f sur chacune d'elles.

(2) Etudier sur son domaine, la convexité de g définie par

$$g(x,y) = \frac{1-xy}{x+y} - \ln(x+y).$$

Exercice 6

(1) Montrer que, si g est une fonction convexe et croissante sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et si f est convexe sur un convexe $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f(U) \subset I$, alors $g \circ f$ est convexe sur I.

(2) Montrer que la fonction h définie par

$$h(x,y) = \frac{\exp(5x^2 - xy + y^2)}{x^2 y}$$

est convexe sur le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Indication : utiliser le logarithme.

Exercice 7

Montrer que l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $p \geq 1$.

Exercice 8

Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \ldots x_n)^{1/n}.$$

Exercice 9

Soit U un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $d_U(x) = \inf\{\|x-u\| : u \in U\}$ la distance de x à U. Montrer que les fonctions d_U et d_U^2 sont convexes sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10

Soit une application continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Montrer que si, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

alors f est convexe. Indication : procéder récursivement en coupant chaque fois un segment en deux parties égales.

7. Optimisation libre

Exercice 1
Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= x^3+3xy^2-15x-12y,\\
f_2(x,y) &= 3x^3+xy^2-3axy \text{ (discuter selon le signe de } a\in\mathbb{R}),\\
f_3(x,y) &= x^4+\frac{1}{3}y^3-4y-2,\\
f_4(x,y) &= x^3+xy^2-x^2y-y^3.
\end{aligned}$$

Pour chaque fonction, montrer que les extrema locaux ne sont pas globaux.

Exercice 2
Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition :

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z},\\
g(x,y,z) &= 8x^3+y^3-12xyz+10z^3-6z.
\end{aligned}$$

Exercice 3
Optimiser les fonctions suivantes sur leurs domaines :

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^4+2y^2+3z^2-yz-23y+4x-5,\\
g(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{1}{x_i}\right),\\
h(x_1,\dots,x_n) &= \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i}.
\end{aligned}$$

Exercice 4
Soit l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature (on peut noter que $f(x,y)=\phi(x)\phi(y)$ où $\phi(u)=u\mathrm{e}^{-u^2/2}$).

Exercice 5
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z)=x^4-2x^2y+2y^2-2yz+2z^2-4z+5$.

(1) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que l'expression $f(x,y,z)$ peut s'écrire sous forme d'une somme de carrés.

(3) En déduire les extrema de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6
Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\|_2 = 1$, et soit l'application $P : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n : x \mapsto \langle v, x\rangle v$. Montrer que

$$d(x, \text{s.e.v.}(v)) := \inf\{\|x-y\|_2, y \in \text{s.e.v.}(v)\} = \|x - P(x)\|_2.$$

Exercice 7
Droite des moindres carrés. Soit un entier $n \geq 2$, et soient n points $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ ($i = 1, \dots, n$). Soit aussi la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

(1) Vérifier que f n'admet qu'un seul point critique $(\hat{a}, \hat{b})$ sur $\mathbb{R}^2$, et exprimer $\hat{b}$ en fonction de $\hat{a}$.

(2) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8
Soient f et g les fonctions définies par $f(x,y) = xy$ et $g(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\cdot$ Déterminer

(1) les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$, puis sous la contrainte $g(x,y) = \dfrac{2}{3}$,

(2) les extrema de g sur son domaine de définition, puis sous la contrainte $f(x,y) = 9$.

On peut se ramener à des fonctions d'une variable pour l'optimisation sous contrainte.

8. Optimisation sous contrainte d'égalité

Exercice 1
Dans les cas suivants, en traçant les courbes de niveau de f et la contrainte $g(x,y) = 0$, trouver graphiquement les points où f atteint un extremum local sous la contrainte $g(x,y) = 0$:

$$f(x,y) = x + y, \quad g(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2-1/4} - 1,$$
$$f(x,y) = xy, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - x - y,$$
$$f(x,y) = \ln(x,y), \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 2.$$

On peut ensuite déterminer ces points analytiquement et préciser leur nature.

Exercice 2
Dans les cas suivants, déterminer les extrema locaux et globaux de f sous la contrainte

$g(x,y)=0$:

$$\begin{aligned}
&f(x,y)=x+2y, \qquad g(x,y)=x^2+xy+y^2+y-\frac{13}{9},\\
&f(x,y)=x^2+y^2, \qquad g(x,y)=4x^2-y^2-16,\\
&f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \qquad g(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2},\\
&f(x,y)=x^3+y^3, \qquad g(x,y)=x^2+y^2,\\
&f(x,y)=x^2+y-\ln(x^2+y^2-7), \quad g(x,y)=x^2+y^2-8.
\end{aligned}$$

Exercice 3

Déterminer les extrema de la fonction $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i\ln(x_i)$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i=1$ (et $x_i>0$ pour tout $1\le i\le n$).

Exercice 4

Soit A une matrice symétrique $n\times n$. On montre l'existence d'une plus grande valeur propre de A, et d'au moins un vecteur propre associé :

(1) Montrer que l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $x\mapsto\langle x,Ax\rangle$ admet un ou plusieurs maxima globaux sous la contrainte $\|x\|^2=1$.

(2) En calculant les points critiques du Lagrangien associé, montrer qu'il existe au moins un $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$ tels que $A\overline{x}=\lambda\overline{x}$ et $\|\overline{x}\|_2=1$.

(3) Montrer qu'il existe un plus grand tel λ, et déterminer le maximum global de $\langle x,Ax\rangle$ sous la contrainte $\|x\|^2=1$ en fonction de ce λ.

Exercice 5

Soit $p>1$. On note $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{1/p}$ pour $x\in\mathbb{R}^n$. Etant donné $a\in\mathbb{R}^n$, minimiser l'application $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:x\mapsto\langle a,x\rangle$ sous la contrainte $\|x\|_p=1$:

(1) Ecrire le Lagrangien associé au problème et trouver les points critiques. Indication : caculer d'abord le multiplicateur de Lagrange et montrer qu'il est proportionnel à $\|a\|_{p'}$ où p' est tel que $1/p+1/p'=1$.

(2) Montrer que le système admet un unique minimum et le déterminer (si $\overline{x}$ minimise f sous la contrainte, voir que le signe de $\overline{x}_i$ est l'opposé du signe de a_i pour tout $1\le i\le n$).

En déduire l'inégalité de Hölder : $|\langle x,a\rangle|\le\|x\|_p\|a\|_{p'}$.