

On définit $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $N((x, y)) = (|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}})^2$.

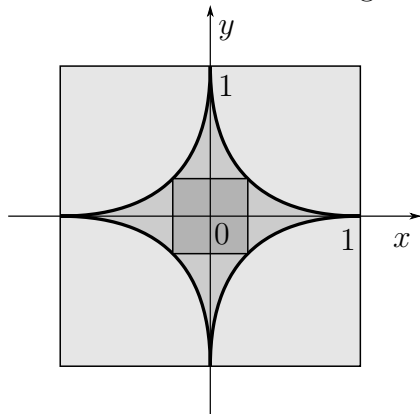
Montrer que N vérifie la propriété d'homogénéité. Que peut-on dire si $N((x, y)) = 0$?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$N(\lambda(x, y)) = N((\lambda x, \lambda y)) = (|\lambda x|^{\frac{1}{2}} + |\lambda y|^{\frac{1}{2}})^2 = (|\lambda|^{\frac{1}{2}}(|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}}))^2 = |\lambda|N((x, y)).$$

Si $N((x, y)) = 0$, alors $|x|^{\frac{1}{2}}$ et $|y|^{\frac{1}{2}}$ doivent être nuls, donc $(x, y) = (0, 0)$.

On note $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, N((x, y)) \leq 1\}$. Cet ensemble est dessiné en grisé ci-dessous. Illustrer à l'aide d'un dessin sur la figure que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\|(x, y)\|_{\infty} \leq N((x, y)) \leq 4\|(x, y)\|_{\infty}$.

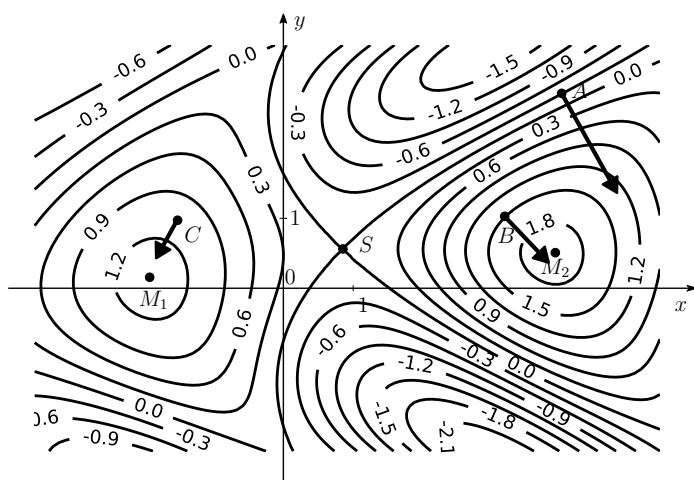


On note B_1 la boule unité fermée pour $\|\cdot\|_{\infty}$ et $B_{\frac{1}{4}}$ celle de rayon $\frac{1}{4}$, que l'on dessine sur le schéma. On voit que $B_{\frac{1}{4}} \subset A \subset B_1$. Donc si $(x, y) \neq (0, 0)$, comme alors $N((x, y)) > 0$, par homogénéité on a $\frac{1}{N(x,y)}(x, y) \in A \subset B_1$, donc $\|\frac{1}{N(x,y)}(x, y)\|_{\infty} \leq 1$, ce qui donne $\|(x, y)\|_{\infty} \leq N(x, y)$. De même, si $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $\frac{1}{4\|(x,y)\|_{\infty}}(x, y) \in B_{\frac{1}{4}} \subset A$, ce qui donne $N(x, y) \leq 4\|(x, y)\|_{\infty}$. Lorsque $(x, y) = (0, 0)$, les deux inégalités sont bien vérifiées.

L'application N est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

Non. En effet on voit que la boule unité n'est pas convexe. Exemple de points où l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite : $N((0, 1) + (1, 0)) = N((1, 1)) = 4 > N((0, 1)) + N((1, 0)) = 2$.

On a tracé les lignes de niveau d'une fonction différentiable f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sur chaque ligne de niveau de la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = c\}$ est indiquée la valeur c prise par la fonction. Représenter le gradient en chacun des points A , B et C sur la figure, en justifiant en quelques mots le choix de la direction, du sens et de la norme des vecteurs représentés. Indiquer sur la figure où sont les points de maximum local, de minimum local ou de point selle.



On a représenté trois flèches, orthogonales aux lignes de niveaux aux points A , B et C . Elles sont dirigées dans le sens où les valeurs de la fonction f augmentent. La norme au point A correspond à la pente le long de la direction orthogonale à la ligne de niveau : on voit qu'il faut se déplacer d'un peu moins d'une unité pour que la fonction augmente de 1. La pente est donc un peu plus grande que 1. Les flèches en B et en C ont des normes plus petites (deux fois plus d'écart environ entre les ligne de niveau en B par rapport à A , une flèche deux fois plus petite), la fonction varie plus lentement.

Les points M_1 et M_2 sont des points de maximum local. Le point S est un point selle : la fonction admet un maximum suivant l'axe vertical et un minimum suivant l'axe horizontal.

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|\cdot\|$, donnée par $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$. On s'intéresse à la différentiabilité de $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) = \exp(P(0)P(2) - \int_{-1}^1 P(x)dx)$.

Justifier brièvement que $\|\cdot\|$ est une norme, et montrer qu'il existe $C_n > 0$ tel que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on ait $\sup_{x \in [1,2]} |P(x)| \leq C_n \|P\|$.

Les propriétés de positivité et d'homogénéité sont immédiates pour $\|\cdot\|$. Si $P, Q \in \mathbb{R}_n(X)$, alors pour tout x dans $[0, 1]$, on a $|(P + Q)(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq \|P\| + \|Q\|$. En passant donc au sup dans cette inégalité, on obtient $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$. Finalement, si P s'annule sur $[0, 1]$, alors il a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

De même, la fonction $P \mapsto \sup_{x \in [1,2]} |P(x)|$ est une norme pour exactement les mêmes raisons. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, les deux normes sont équivalentes, et on obtient donc bien une constante C_n telle que demandée dans la question.

Montrer que l'application $\Psi : P \mapsto P(0)P(2)$ est différentiable de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $d\Psi(P)(H)$ pour P et H dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour P et H dans $\mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\Psi(P + H) = (P + H)(0)(P + H)(2) = \Psi(P) + P(0)H(2) + H(0)P(2) + H(0)H(2).$$

À P fixé, la fonction $H \mapsto P(0)H(2) + H(0)P(2)$ est évidemment linéaire, il reste à montrer que $H(0)H(2) = \|H\|\varepsilon(H)$, avec $\varepsilon(H) \rightarrow 0$ lorsque $H \mapsto 0$. Pour cela on a déjà $|H(0)| \leq \|H\|$ et d'après la question précédente $|H(2)| \leq C_n \|H\|$. On a donc, pour $H \neq 0$, que $\frac{|H(0)H(2)|}{\|H\|} \leq C_n \|H\|$, donc $\frac{H(0)H(2)}{\|H\|} \rightarrow 0$ lorsque $H \rightarrow 0$, ce qu'on voulait montrer. La fonction Ψ est donc bien dérivable sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $d\Psi(P)(H) = H(0)P(2) + P(0)H(2)$.

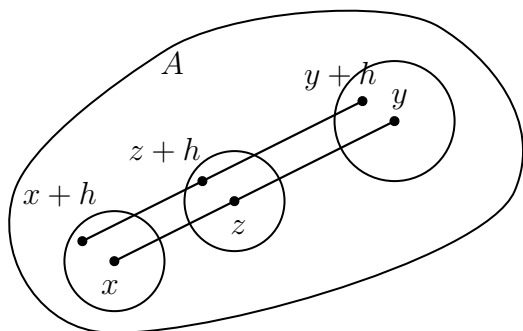
Remarque : on aurait pu éviter la question précédente en prenant pour norme $\sup_{x \in [0,2]} |P(x)|$.

En déduire que Φ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner l'expression de $d\Phi(P)(H)$ pour P et H dans $\mathbb{R}_n[X]$.

La fonction $f : P \rightarrow \int_{-1}^1 P(x)dx$ est linéaire, donc différentiable, et $df(P)(H) = f(H) = \int_{-1}^1 H(x)dx$. La fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ est différentiable (pour les notations, on peut écrire, pour h dans $\mathbb{R}$: $d(\exp)(x)(h) = \exp'(x)h = \exp(x)h$). Par opérations et composition de fonctions différentiables, la fonction $\Phi = \exp \circ (\Psi - f)$ est différentiable en tout point, et on a

$$\begin{aligned} d\Phi(P)(H) &= d(\exp)(\Psi(P) - f(P))(d\Psi(P)(H) - df(P)(H)) \\ &= \exp(\Psi(P) - f(P)) \left(P(0)H(2) + H(0)P(2) - \int_{-1}^1 H(x)dx \right) \\ &= \Phi(P) \left(P(0)H(2) + H(0)P(2) - \int_{-1}^1 H(x)dx \right). \end{aligned}$$

Soit A une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire telle $\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1], (1 - t)x + ty \in A$. Montrer que l'intérieur de A est convexe. On pourra s'aider d'un dessin.



Soit x et y dans l'intérieur de A , et soit $t \in [0, 1]$. On veut montrer que $z = (1 - t)x + ty \in \text{int}(A)$.

On prend ε_1 et ε_2 tels que $B(x, \varepsilon_1) \subset A$ et $B(y, \varepsilon_2) \subset A$ et on prend $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Montrons que $B(z, \varepsilon) \subset A$: soit h tel que $\|h\| < \varepsilon$, montrons que $z + h \in A$.

On a $z + h = (1 - t)x + ty + h = (1 - t)(x + h) + t(y + h)$. Donc comme $x + h \in B(x, \varepsilon) \subset A$ et $y + h \in B(y, \varepsilon) \subset A$, alors par convexité, $z + h \in A$.

On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x^2, \\ |x| & \text{si } y = x^2. \end{cases}$

Montrer que f est continue en $(0, 0)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$ et d'observer que si $\max(|x|, |y|) < \delta$ (on n'a même pas besoin du fait que $|y| < \delta$), alors $|f(x, y) - f(0, 0)|$ vaut soit 0 soit $|x|$, c'est à dire dans tous les cas une valeur strictement inférieure à $\delta = \varepsilon$.

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On pose $h(t) = f((0, 0) + t(u, v))$. Montrer que h est dérivable en 0, et même de classe C^1 au voisinage de 0, et calculer sa dérivée en 0.

Il suffit d'observer que $h(t) = f(tu, tv) = 0$ sauf si $tv = t^2u^2 \neq 0$.

Si $v = 0$ ou $u = 0$, alors la fonction h est nulle sur $\mathbb{R}$, donc dérivable, de classe C^1 , de dérivée nulle.

Sinon, comme $u \neq 0$ et $v \neq 0$, la fonction h est différente de zéro seulement lorsque $t = \frac{v}{u^2}$. Donc en posant $\delta = \frac{|v|}{u^2}$, on obtient que $h(t) = 0$ pour $t \in]-\delta, \delta[$, donc h est dérivable, de classe C^1 sur $] -\delta, \delta[$, de dérivée nulle.

La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Si elle l'était, alors par composition, la fonction $g(t) = f(t, t^2)$ serait dérivable en 0. Or $g(t) = |t|$, et on sait que la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Donc f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles vérifiant, pour tous réels x, y , $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^k y^k$ (où $k \in \mathbb{N}$). On veut montrer que la seule possibilité est $k = 0$, par deux approches différentes.

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f admet des dérivées partielles qui sont des fonctions continues de x, y sur $\mathbb{R}^2$ (polynômes en x et y). D'après le théorème du cours, elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Approche par résolution : montrer que pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = f(0, y) + \frac{1}{k+1}x^{k+1}y^k$, et que si $k > 0$, alors $f(0, y) = f(0, 0)$. Faire la même chose en calculant la valeur de $f(x, y) - f(x, 0)$, puis de $f(x, 0) - f(0, 0)$ et obtenir une contradiction.

Par intégration, on a

$$f(x, y) - f(0, y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(s, y) ds = \left[\frac{1}{k+1} s^{k+1} y^k \right]_0^x = \frac{1}{k+1} x^{k+1} y^k.$$

De même on a $f(x, y) - f(x, 0) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, s) ds = \left[\frac{1}{k+1} x^k y^{k+1} \right]_0^y = \frac{1}{k+1} x^k y^{k+1}$.

Lorsque $k \neq 0$, on obtient donc $f(0, y) - f(0, 0) = 0$ (en prenant $x = 0$ dans la deuxième égalité), et donc $f(x, y) - f(0, 0) = \frac{1}{k+1} x^{k+1} y^k$.

De même on obtient $f(x, 0) = f(0, 0)$ et donc $f(x, y) - f(0, 0) = \frac{1}{k+1} x^k y^{k+1}$.

On obtient donc $\frac{1}{k+1} x^{k+1} y^k = \frac{1}{k+1} x^k y^{k+1}$, ce qui est une contradiction pour n'importe quel (x, y) tel que x et y sont non nuls et différents.

Autre approche : montrer que ∇f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la matrice hessienne de f sur $\mathbb{R}^2$ et obtenir une contradiction si $k \neq 0$.

Les deux composantes de ∇f (les dérivées partielles de f) sont des polynômes en x et y , donc de classe C^1 . Donc f est de classe C^2 . On obtient, pour $k \neq 0$:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx^{k-1}y^k & kx^k y^{k-1} \\ kx^{k-1}y^k & kx^k y^{k-1} \end{pmatrix},$$

qui n'est pas symétrique si $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $x \neq y$, contredisant le théorème de Schwarz.

Le but de cet exercice est de montrer qu'une matrice symétrique a un vecteur propre, sans utiliser de résultats d'algèbre linéaire (en particulier sans parler de déterminant et de polynôme caractéristique).

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

On définit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \langle x, Ax \rangle$ et $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que f est différentiable en x et calculer $\nabla f(x)$. De même pour g , si $x \neq 0$.

On a, pour h dans $\mathbb{R}^n$, $f(x+h) = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Ah \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle$. Comme A est symétrique, on a $\langle x, Ah \rangle = \langle Ax, h \rangle$, donc $f(x+h) = f(x) + \langle c, h \rangle + \langle h, Ah \rangle$, avec $c = 2Ax$. Comme par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle h, Ah \rangle| \leq \|h\| \|Ah\|$, et que $\|Ah\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, on obtient bien que f est différentiable en x , et que $\nabla f(x) = c = 2Ax$.

De même en appliquant le résultat à $A = I_n$, on obtient la différentiabilité de $\tilde{f} : x \mapsto \langle x, x \rangle$ (qui ne s'annule qu'en 0), avec $\nabla \tilde{f}(x) = 2x$. Donc par opération sur les fonctions, $g = \frac{f}{\tilde{f}}$ est différentiable en tout x non-nul et on a

$$\nabla g(x) = \frac{\tilde{f}(x)\nabla f(x) - f(x)\nabla \tilde{f}(x)}{(\tilde{f}(x))^2} = \frac{2\langle x, x \rangle Ax - 2\langle x, Ax \rangle x}{\langle x, x \rangle^2}.$$

Montrer que f atteint son maximum sur $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x \rangle = 1\}$, en un point que l'on notera x_0 . On notera aussi $\lambda = f(x_0)$. Que peut-on dire de la fonction g en x_0 ?

L'ensemble $\mathbb{S}$ est un fermé (car la fonction $\tilde{f} : x \mapsto \langle x, x \rangle$ est continue, et $\mathbb{S} = \tilde{f}^{-1}(\{1\})$) et est borné (inclus dans la boule unité) dans $\mathbb{R}^n$, donc est compact. La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$, donc continue. Donc f atteint son maximum sur le compact $\mathbb{S}$, en un point x_0 .

On a $g(x_0) = f(x_0) = \lambda$ puisque $\langle x_0, x_0 \rangle = 1$.

Si $x \neq 0$ alors $\frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}$, et donc $g(x) = f(\frac{x}{\|x\|}) \leq f(x_0) = g(x_0)$. Donc g atteint aussi son maximum sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ au point x_0 .

Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $h : t \mapsto g(x_0 + tv)$ est définie est dérivable sur $] -\delta, \delta[$, pour un certain $\delta > 0$, et atteint son maximum en 0. En déduire que $\langle \nabla g(x_0), v \rangle = 0$.

Comme la fonction $y : t \mapsto x_0 + tv$ est dérivable, que $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on sait qu'il existe un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 sur lequel la fonction $h = g \circ y$ est bien définie et dérivable. Donc il existe un $\delta > 0$ tel que $] -\delta, \delta[$ est inclus dans cet ouvert. On a donc $h'(t) = \langle \nabla g(y(t)), y'(t) \rangle$ pour $t \in] -\delta, \delta[$.

Comme $y'(t) = v$, on a en particulier en $t = 0$: $h'(0) = \langle \nabla g(x_0), v \rangle$.

Comme $g(x) \leq g(x_0)$ pour tout $x \neq 0$, on a donc que $h(t) \leq h(0)$ pour tout $t \in] -\delta, \delta[$. Donc h atteint son maximum en 0. La fonction h étant dérivable, on obtient $h'(0) = 0$, c'est à dire $\langle \nabla g(x_0), v \rangle = 0$.

Calculer $\nabla g(x_0)$ et conclure.

Comme l'égalité précédente est vraie pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on en déduit que $\nabla g(x_0) = 0$. En utilisant l'expression du gradient de g et le fait que $f(x_0) = \langle x_0, Ax_0 \rangle = \lambda$, on obtient

$$0 = \frac{2\langle x_0, x_0 \rangle Ax_0 - 2\langle x_0, Ax_0 \rangle x_0}{\langle x_0, x_0 \rangle^2} = 2Ax_0 - 2\lambda x_0.$$

Le vecteur $x_0 \neq 0$ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Bonus : quelle est la forme des quatre arcs constituant la figure du premier exercice ?

Ce sont des arcs de parabole. Par exemple l'arc dans la partie $x \geq 0, y \geq 0$ est défini par $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, ce qui s'écrit, en élevant au carré $y = 1 - 2\sqrt{x} + x$, ou encore $2\sqrt{x} = 1 + x - y$. On élève de nouveau au carré pour obtenir $4x = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y$, soit $2(x + y) = (x - y)^2 + 1$. En faisant le changement de variable $\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$ et $\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$ (une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$), on obtient comme équation $\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$, qui est l'équation d'une parabole.