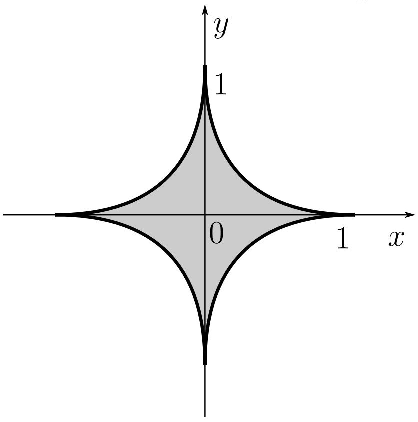
Exemple de sujet pour se préparer au contrôle continu (sur le fond et la forme).

On définit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ par $N((x, y)) = (|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}})^2$.

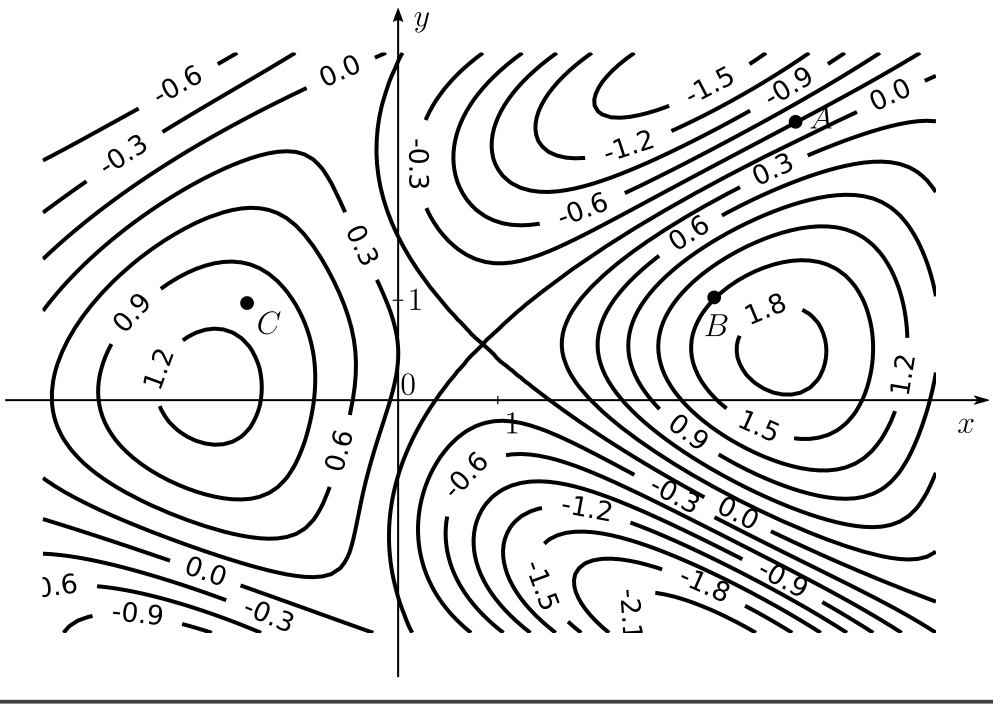
Montrer que N vérifie la propriété d'homogénéité. Que peut-on dire si $N((x, y)) = 0$?

On note $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, N((x, y)) \leqslant 1\}$. Cet ensemble est dessiné en grisé ci-dessous. Illustrer à l'aide d'un dessin sur la figure que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\|(x, y)\|_\infty \leqslant N((x, y)) \leqslant 4\|(x, y)\|_\infty$.



L'application N est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

On a tracé les lignes de niveau d'une fonction différentiable f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sur chaque ligne de niveau de la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = c\}$ est indiquée la valeur c prise par la fonction. Représenter le gradient en chacun des points A, B et C sur la figure, en justifiant en quelques mots le choix de la direction, du sens et de la norme des vecteurs représentés. Indiquer sur la figure où sont les points de maximum local, de minimum local ou de point selle.



On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|\cdot\|$, donnée par $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. On s'intéresse à la différentiabilité de $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) = \exp(P(0)P(2) - \int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x)$.

Justifier brièvement que $\|\cdot\|$ est une norme, et montrer qu'il existe $C_n > 0$ tel que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on ait $\sup_{x\in[1,2]} |P(x)| \leqslant C_n\|P\|$.

Montrer que l'application $\Psi : P \mapsto P(0)P(2)$ est différentiable de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $\mathrm{d}\Psi(P)(H)$ pour P et H dans $\mathbb{R}_n[X]$.

En déduire que Φ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner l'expression de $\mathrm{d}\Phi(P)(H)$ pour P et H dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit A une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire telle $\forall x, y \in A, \forall t \in [0,1], (1-t)x + ty \in A$. Montrer que l'intérieur de A est convexe. On pourra s'aider d'un dessin.

On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x^2, \\ |x| & \text{si } y = x^2. \end{cases}$

Montrer que f est continue en $(0,0)$.

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. On pose $h(t) = f((0,0) + t(u,v))$. Montrer que h est dérivable en 0, et même de classe C^1 au voisinage de 0, et calculer sa dérivée en 0.

La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles vérifiant, pour tous réels x, y, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^k y^k$ (où $k \in \mathbb{N}$). On veut montrer que la seule possibilité est $k = 0$, par deux approches différentes.

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Approche par résolution : montrer que pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(0,y) + \frac{1}{k+1} x^{k+1} y^k$, et que si $k > 0$, alors $f(0,y) = f(0,0)$. Faire la même chose en calculant la valeur de $f(x,y) - f(x,0)$, puis de $f(x,0) - f(0,0)$ et obtenir une contradiction.

Autre approche : montrer que ∇f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la matrice hessienne de f sur $\mathbb{R}^2$ et obtenir une contradiction si $k \neq 0$.

Le but de cet exercice est de montrer qu'une matrice symétrique a un vecteur propre, sans utiliser de résultats d'algèbre linéaire (en particulier sans parler de déterminant et de polynôme caractéristique).
Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.
On définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \langle x, Ax \rangle$ et $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que f est différentiable en x et calculer $\nabla f(x)$. De même pour g, si $x \neq 0$.

Montrer que f atteint son maximum sur $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x \rangle = 1\}$, en un point que l'on notera x_0. On notera aussi $\lambda = f(x_0)$. Que peut-on dire de la fonction g en x_0 ?

Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $h : t \mapsto g(x_0 + tv)$ est définie est dérivable sur $]-\delta, \delta[$, pour un certain $\delta > 0$, et atteint son maximum en 0. En déduire que $\langle \nabla g(x_0), v \rangle = 0$.

Calculer $\nabla g(x_0)$ et conclure.

Bonus : quelle est la forme des quatre arcs constituant la figure du premier exercice ?