

Session chairman : Olivier Pironneau

Régularité H^2 de la solution de l'équation de Laplace dans un domaine rugueux

Mohamed-Amine BEY, Olivier LAFITTE

Université Paris 13-Sorbonne Paris Cité– Laboratoire LAGA
e-mail: bey@math.univ-paris13.fr

Résumé. *Dans cette communication nous intéressons à la régularité H^2 de la solution du problème de Laplace dans un domaine rugueux. Les équations adjacentes modélisent la présence de l'endoprothèse vasculaire (stent) dans un écoulement. En effet, cette présence peut être considérée comme une perturbation locale d'un bord lisse de l'écoulement considéré. Plus précisément, on donne un résultat d'existence de la solution du problème de Laplace dans un domaine rugueux, puis on précise la singularité de la régularité H^2 de la solution par rapport à la perturbation considérée. Enfin, on corrobore nos résultats par des méthodes numériques [7].*

Mots Clés: Régularité H^2 , lois de parois, opérateur de Laplace, modélisation multi-échelles, méthode des éléments finis.

H^2 -regularity for Laplace equations in rough domains

Abstract. In this note we study the fluid-dynamics of blood with stent. By seeing the stent as a local perturbation of a smooth boundary, this problem can be modeled by a Laplace equation with periodic rough boundaries. We start by studying the existence and uniqueness of solutions for this equation, as well as, the H^2 -regularity. In particular, we prove that the H^2 -norm of the solution is singular of order $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$. Then, we establish error estimates for numerical schemes of our equation, and we give some numerical tests to show the accuracy of our approach [7].

Keywords: H^2 Regularity, rough domain, wall-laws, Laplace operator, asymptotic analysis, finite element methods.

1 Motivation biologique

Les mathématiques appliquées à la médecine ont des applications tant pratiques que théoriques dans de nombreux domaines comme l'étude du système cardio-vasculaire qui est en plein essor depuis quelques années. En effet, il existe plusieurs phénomènes pouvant affecter l'écoulement sanguin, et qui sont à l'origine de pathologies mortelles courantes du système cardio-vasculaire. Parmi ces phénomènes, on peut citer la rupture d'anévrisme. Tout l'intérêt est donc d'opérer avant la rupture. Une thérapie possible consiste à introduire un fil métallique multi-couches appelé endoprothèse vasculaire (stent) comme une protection supplémentaire de la paroi artérielle ou afin de ralentir les tourbillons dans l'anévrisme (cf Figure 1) et de favoriser la coagulation du sac [3].

D'un point de vue mathématique, la recherche sur les pathologies du système cardio-vasculaire se modélisent par un système d'équations mathématiques rendant compte de toutes les données expérimentales connues du mécanisme biologique traité. Selon les régimes, la dynamique du sang dans les artères est bien mieux modélisée par les équations de Stokes ou de Navier-Stokes en raison notamment de la présence

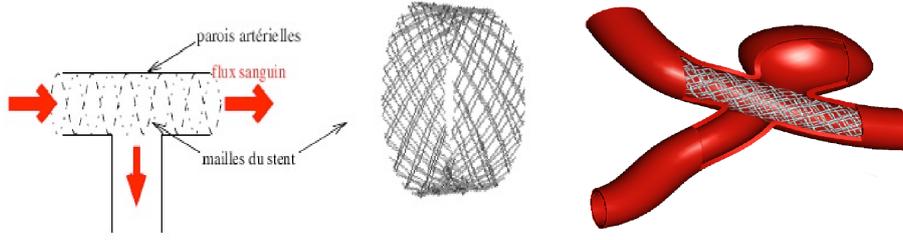


Figure 1: Schéma d'une artère stentée avec artère collatérale (gauche), un exemple 3D d'un stent métallique tressé multi-couche dans l'anévrisme (droite).

de couches limites de Stokes au voisinage des parois et éventuellement de turbulence. Sans oublier que la présence de la rugosité dans le domaine d'écoulement engendre des difficultés techniques supplémentaires, au niveau mathématique comme numérique, liées à l'aspect multi-échelles du problème, puisqu'on traite des échelles de longueur différentes. De ce fait, nous nous concentrons sur les problèmes liés uniquement à la rugosité elle-même et non sur le caractère mixte du problème de Stokes ou de Navier-Stokes.

Dans cette note, nous sommes essentiellement intéressés par l'étude d'un modèle simplifié qui exclut les difficultés techniques liées à la non-linéarité par exemple. Nous nous intéressons à l'analyse d'un modèle réduit permettant de prendre en compte l'effet de ces stents lorsque le sang peut être considéré comme un fluide parfait. Plus précisément, le fluide est gouverné par une équation de Laplace équipée d'une condition aux limites de type Dirichlet dans un domaine rugueux. Cependant, dans les zones où l'endoprothèse vasculaire tressée est en contact avec une artère collatérale, nous observons une perturbation locale du bord lisse d'écoulement, qui entraîne une certaine singularité si nous nous intéressons à un niveau de régularité plus élevé. C'est principalement ce phénomène biologique qui a conduit à étudier la régularité de la solution de l'équation de Laplace dans un domaine rugueux (voir [6], [5] et [4]).

Dans la suite, nous présentons le modèle, nous énonçons un résultat d'existence d'une solution faible dans le cas 2D. Enfin, nous donnons des indications sur les résultats obtenus, théoriques et numériques pour l'étude de la régularité de la solution du modèle d'écoulement sanguin.

2 Modèle et résultats préliminaires

Notre approche consiste à remplacer le stent par un modèle équivalent en moyenne mais défini sur une géométrie régulière. Nous allons donc étudier les écoulements dans une géométrie simplifiée en deux dimensions d'espace, où l'on voit l'endoprothèse vasculaire comme une suite d'obstacles périodiques entre une artère principale et un espace secondaire (une artère collatérale ou un sac). Nous choisissons, pour simplifier, de ne pas prendre en compte l'élasticité des parois des artères et de considérer des géométries 2D, qui peuvent cependant être vues comme des coupes longitudinales d'artères 3D. Nous nous

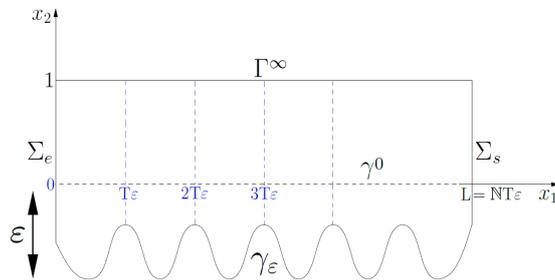


Figure 2: Domaine rugueux Ω_ε

intéressons à un canal 2D limité par des parois horizontales, la paroi lisse est donnée par $\Gamma^\infty = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in [0, L] \text{ et } x_2 = 1\}$, et celle rugueuse est paramétrisée par $\gamma_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = \varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{x_1}{\varepsilon})\}$, où $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0[$ une fonction périodique (selon la composante axiale x_1) assez régulière (au moins de classe C^2). On définit γ^0 , une interface fictive située en $x_2 = 0$. Nous appelons $\Sigma_e := \{0\} \times [\varepsilon\tilde{\gamma}(0), 1]$ l'entrée verticale du domaine et $\Sigma_s := \{L\} \times [\varepsilon\tilde{\gamma}(\frac{L}{\varepsilon}), 1]$ sa sortie. Les rugosités sont de taille ε aussi bien

dans la direction verticale que horizontale (cf. Figure 2). Dans ce contexte, on considère le problème de Laplace :

$$(E) : \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = g & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon \\ u_\varepsilon \text{ est périodique selon } x_1 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \cup \Sigma_s, \end{cases} \quad (1)$$

où Ω_ε est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 donné dans la figure ci-dessous et $g \in L^2(\Omega_\varepsilon)$.

Remarque 1. *Nous mettons l'accent sur le cas où le terme source de problème aux limites (E) est une constante réelle notée C . Cette constante C peut représenter la composante axiale du gradient de pression dans les équations de Stokes.*

Soit $\mathcal{H}_{\text{per},0}$ le sous espace fermé de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u \nabla v + u v) dy,$$

et de la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ tel que

$$\mathcal{H}_{\text{per},0} = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon); v = 0 \text{ sur } \Gamma^\infty \cup \gamma_\varepsilon, v \text{ est } x_1\text{-périodique sur } \Sigma_\varepsilon \cup \Sigma_s\}.$$

Théorème 1. *Le problème aux limites (E) admet une unique solution dans $\mathcal{H}_{\text{per},0}$. De plus nous avons la majoration suivante*

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_{\text{per},0}} \leq (4(1 + \varepsilon)^2 + 1) \|g\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \quad \forall u_\varepsilon \in \mathcal{H}_{\text{per},0}. \quad (2)$$

La démonstration est détaillée dans [4]. Elle repose essentiellement sur le théorème de Lax-Milgram et sur l'inégalité de type Poincaré dans un domaine rugueux. Il faut noter que cette dernière inégalité constitue un outil fondamental pour établir l'existence et l'unicité de la solution de notre problème dans Ω_ε .

3 Régularité H^2 dans des domaines rugueux

De nombreux travaux ont déjà été entrepris (par ex. [6], [5]) pour traiter la question de modèle des écoulements sanguins dans des artères avec stents et pour étudier la régularité H^1 de la solution du problème de Poisson dans un domaine rugueux.

Nous illustrerons d'abord une nouvelle stratégie pour développer des lois de paroi pour des domaines rugueux, basée sur la méthode de développement asymptotique à deux échelles. Les lois de paroi construites par cette approche ont la caractéristique de s'adapter à la géométrie de la rugosité en simulant l'influence des petites échelles sur l'écoulement global. Elles sont construites dans un cadre mathématique bien défini, basé sur des développements asymptotiques à deux échelles ([2], [?], [?], [?] et [?]). L'utilisation des méthodes de développements asymptotiques pour développer des conditions aux limites équivalentes a été introduite par Achdou [?] et poursuivie par Achdou, Pironneau, Zebic [?] et O. Lafitte [?, ?] dans le cadre des équations de Maxwell, pour traiter des obstacles contenant une fine couche de matériaux composites. L'idée était de retirer du domaine du calcul cette fine couche, en simulant son influence par le biais d'une condition aux limites équivalentes tenant compte des hétérogénéités.

Théorème 2. *La solution u_ε du problème aux limites (E) est dans $H^2(\Omega_\varepsilon)$. De plus, il existe deux constantes K_{\min} et K_{\max} strictement positives indépendantes de ε telles que*

$$\frac{K_{\min}}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{K_{\max}}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3)$$

Une version bien détaillée de la démonstration est dans [4]. Nous avons utilisé des techniques d'homogénéisation (voir par ex. [1] et [2]) qui consistent à :

- Faire un zoom dans un premier temps, autour d'un obstacle et étudier l'écoulement à l'échelle microscopique autour de l'obstacle afin de caractériser les couches limites.
- Intégrer cette description dans un développement asymptotique qui approche le comportement de la solution u_ε .

- Nous analysons le comportement de ce dernier développement asymptotique par rapport la solution u_ε .

Cette approche d'homogénéisation nous a permis d'obtenir plusieurs résultats quantitatifs et qualitatifs. Nous mettons l'accent qu'une étude explicite du problème aux limites (??) dans divers domaines rugueux contenant différentes géométries de rugosités (symétriques, sinusoidales, non symétriques), a été introduite dans [1] pour la construction d'une nouvelle approximation par développement asymptotique mais avec une source dont le **support est contenu dans Ω_0 et n'intercepte pas γ^0** .

De Théorème 2, il est assez naturel de signaler que la solution exacte u_ε du problème aux limites (E) est singulière à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$ pour la norme H^2 . Dans ce qui suit immédiatement, nous allons donc énoncer l'inégalité d'interpolation dans un domaine rugueux :

Corollaire 1. *Étant donné un nombre réel $s \in [1, 2]$. Alors il existe une constante C_{int} strictement positive indépendante de ε telle que la solution du problème aux limites (E) satisfait l'estimation suivante*

$$\|u_\varepsilon\|_{H^s(\Omega_\varepsilon)} \leq C_{\text{int}} \varepsilon^{\frac{(1-s)}{2}}. \quad (4)$$

Preuve. Soit u_ε la solution du problème aux limites (E). Nous définissons le nombre réel $s \in [s_1, s_2] := [1, 2]$ de sorte que $s := \theta s_1 + (1 - \theta) s_2 = 2 - \theta$, avec $0 \leq \theta \leq 1$. En utilisant l'inégalité fonctionnelle d'interpolation, nous avons

$$\|u_\varepsilon\|_{H^s(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^\theta \|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}^{1-\theta}.$$

Ainsi, grâce aux inégalités [Théorème 1, (2)] et [Théorème 2, (3)], il existe une constante C_{int} strictement positive indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{H^s(\Omega_\varepsilon)} \leq \sup(C^\theta, C_{\text{max}}^{1-\theta}) (4(1 + \varepsilon)^2 + 1)^\theta \left(\sqrt{\text{mes}(\Omega_\varepsilon)}\right)^\theta \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{1-\theta} \leq C_{\text{int}} \varepsilon^{-\frac{(1-\theta)}{2}}.$$

Nous achevons la preuve en remplaçant l'expression de $s = 2 - \theta$ dans la dernière inégalité. La preuve est complète. \square

4 Illustration numérique

Proposition 1. *Soient u_ε la solution du problème aux limites (E) et $u_{\varepsilon,h}$ sa solution approchée par la méthode des éléments finis. Alors, il existe une constante K strictement positive indépendante de ε telle que :*

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq Kh.$$

La preuve repose sur l'analyse d'erreur par la méthode asymptotique. Également la singularité en $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$, de la norme H^2 de la solution du problème aux limites (E) joue un rôle très important (pour une explication plus détaillée voir [4]).

Afin de valider nos résultats théoriques et de montrer certaines fonctionnalités les plus intéressantes, nous proposons enfin une série de tests numériques. Les simulations réalisées s'appuient sur le code FreeFem++¹ (voir [7, 8]) avec une approximation \mathbb{P}_2 Lagrange. On se donne un domaine rugueux Ω_ε de longueur $L = 10$ et de hauteur $H_r = 1$. La rugosité de la paroi γ_ε est décrite à l'échelle macroscopique comme

$$\gamma_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \in [0, L] \times [-1, 0[, x_2 = \varepsilon \tilde{\gamma} \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) = \frac{-(1 + \cos(\frac{x_1}{\varepsilon}))}{2} - \delta \right\},$$

avec $\delta = 5 \cdot 10^{-2}$. Une version du code source adaptée à tous les tests présentés ci-dessous est disponible en ligne².

Pour pouvoir illustrer l'estimation de la proposition 1, nous avons besoin de la solution «exacte numérique» . Pour cela, nous utilisons un maillage très fin sur lequel nous obtenons une solution approchée qui sera considérée comme solution exacte. Nous précisons que les calculs ont été effectués

¹FreeFem++ est un langage dédié aux simulations numériques par éléments finis.

²<http://www.math.univ-paris13.fr/~bey/regularity.edp>

sur le cluster MAGI³ sur la partition SMP (noeuds dédiés au calcul parallèle via OpenMP (partition SMP du job scheduler)). D'autre part, nous signalons que les calculs sur les noeuds à grande mémoire ont été faits une seule fois pour toutes les simulations de cette sous-section. Signalons également que les calculs deviennent lourds en mémoire avec des éléments \mathbb{P}_2 -Lagrange à partir d'une certaine discrétisation.

À titre d'illustration, les simulations présentées dans le tableau 1 ont été reproduites pour une solution approchée u_ε^h dans un maillage assez fin tel que le pas de discrétisation h est défini comme suit $h \simeq \frac{2\pi}{90} \varepsilon^{1+\zeta}$, où $\varepsilon \in [0.1, 1]$.

L'erreur	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.1$	$\zeta = 0.001$
$\ u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\ _{L^2(\Omega_\varepsilon)}$	$\varepsilon^{1.8375}$	$\varepsilon^{1.6065}$	$\varepsilon^{1.39}$
$\ u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\ _{H^1(\Omega_\varepsilon)}$	$\varepsilon^{1.0028}$	$\varepsilon^{0.845}$	$\varepsilon^{0.675}$

Table 1: Erreur $u_\varepsilon - u_\varepsilon^h$ en normes $L^2(\Omega_\varepsilon)$ et $H^1(\Omega_\varepsilon)$ en fonction de ζ .

Le tableau 1 présente l'erreur $u_\varepsilon - u_\varepsilon^h$ en normes $L^2(\Omega_\varepsilon)$ et $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Nous constatons que les simulations numériques présentées dans le tableau 1 indiquent en particulier, que pour une discrétisation h en ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$, le taux de convergence est à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en norme $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Nous pouvons dire que les estimations obtenues théoriquement sont effectivement optimales et plus précises. Nous présentons dans les figures 3 et 4 toutes les erreurs $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ en échelle logarithmique, en fonction de ε , pour différentes valeurs de ζ .

³<http://www.univ-paris13.fr/calcul/wiki/index.php?title=Accueil>

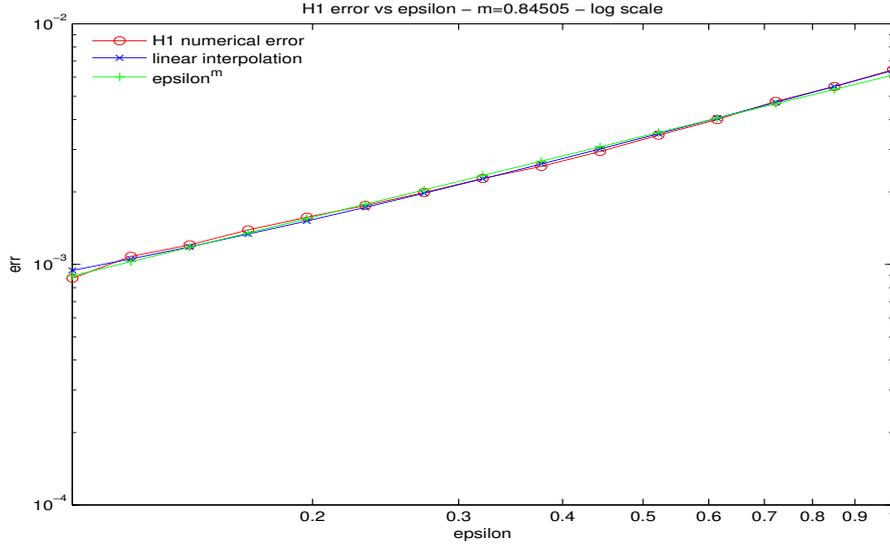


Figure 3: Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ en échelle logarithmique en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.1$

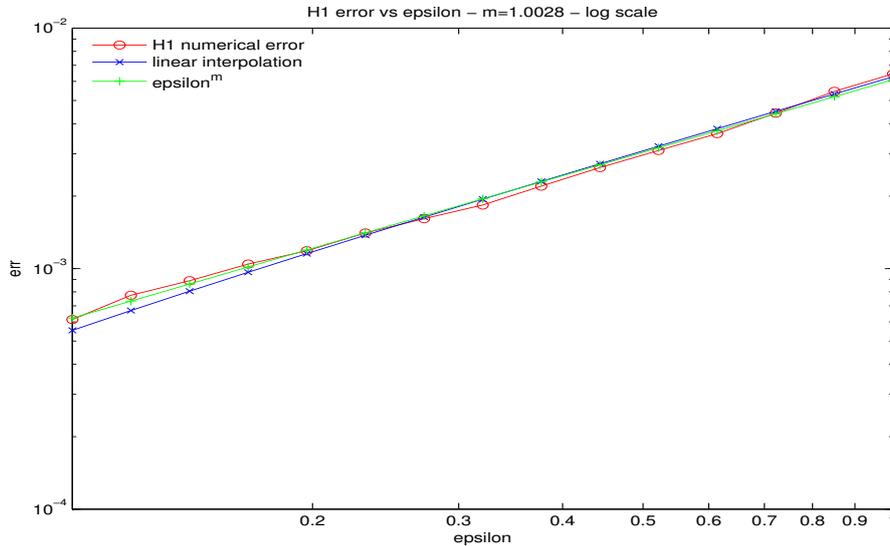


Figure 4: Erreur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ en échelle logarithmique en fonction de ε lorsque $\zeta = 0.2$

REFERENCES

- [1] Y. Achdou, B. Mohammadi, O. Pironneau and F. Valentin, *Domain decomposition & wall laws*, In Recent developments in domain decomposition methods and flow problems (Kyoto, 1996; Anacapri, 1996), vol. 11, of GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. Gakkōtoshō, Tokyo, 1998, pp. 1-14.
- [2] Y. Achdou, P. Le Tallec, O. Pironneau and F. Valentin, *Constructing & wall laws with domain decomposition or asymptotic expansion techniques*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 151, 1-2 (1998), 215-232, Symposium on Advances in Computational Mechanics, Vol. 3 (Austin, TX, 1997).
- [3] L. Augsburger, *Flow changes investigation due to the insertion of a braided stent in an inertia driven flow aneurysm model using experimental methods*, Technical report, Laboratoire d'Hémodynamique et de Technologie Cardiovasculaire, EPFL, Suisse, 2008.
- [4] M.-A. Bey, *Modélisation mathématique et simulations numériques des écoulements sanguins dans des artères avec ou sans stents*, Thèse de doctorat, Université Paris 13 Sorbonne Paris Cité, Octobre 2015.

- [5] D. Bresch and V. Milišić, Towards implicit multi-scale wall laws, C. R. Acad. Sci, Paris, Ser. I, 346 (2008) pp. 833-838.
- [6] D. Bresch and V. Milišić, High order multi-scale wall laws : part I, the periodic case, Quart. Appl. Math., 2008.
- [7] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, J. Morice, and K. Ohtsuka, *FreeFem++ (Version 3.32)*, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 2014. URL <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>
- [8] F. Hecht, *New development in FreeFem++*, J. Numer. Math., 20 (2012), no. 3-4, 251-265. 65Y15.