Devoir surveillé ☐	Examen ☒	Session : principale ☐ de contrôle ☒

Matière : Probabilité et Statistique	Semestre: 2
Enseignant(s) : Guerfel Rafik	Date: Juin 2010
Filière(s) : CBA 1,2	Durée: 1H : 30
Nombre de pages : 2	
Documents autorisés : **Seulement Table la loi Normale N (0.1)**	

Exercice 1 :
Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité de probabilité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & si \quad |x| \leq 1, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f et vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
4. On définit la valeur médiane m comme l'unique solution de l'équation :

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

et le mode x_M la valeur pour laquelle la densité f est maximale.
Déterminer m et x_M.
5. Calculer la probabilité des événements :

$$[-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}] \qquad ; \qquad [|x| > \frac{1}{2}].$$

Exercice 2 :
La taille des individus d'une certaine population est une variable aléatoire normale de moyenne 171 cm et d'écart-type 4 cm.

1. Un individu étant choisi au hazard et X étant sa taille en cm.
Déterminer la probabilité des événements suivants :

$a)$ $[X < 160cm]$
$b)$ $[X > 190cm]$
$c)$ $[|X - 171| > 8]$

2. On choisit au hazard n personnes dans la population et l'on note M_n la moyenne des tailles des individus choisis.
Avec $E[M_n] = 171$ cm , $V[M_n] = \frac{V[X]}{n} = \frac{16}{n}$.
a) En admettant que M_n suit une loi normale, déterminer α en fonction de n tel que :

$$P[|M_n - 171| > \alpha] = 0,1.$$

b) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Démontrer que pour tout α, $\alpha > 0$, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P[|M_n - 171| > \alpha] = 0.$$