Correction Examen Statistique Session Principale CBA 2009/2010

Correction Exercice 1 :

1. f est une fonction de densité. Par suite elle vérifie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

On a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{150}^{+\infty} \frac{\lambda}{x^2}\,dx = -\frac{\lambda}{x}\Big|_{150}^{+\infty} = \frac{\lambda}{150}\text{. Donc } \frac{\lambda}{150} = 1 \text{ et } \lambda = 150\text{.}$$

2. Notons X la v.a égale à la durée de vie d'un téléviseur. On a:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = 150\int_{150}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = 150\ln(x)\Big|_{150}^{+\infty} = +\infty$$

Dans ce cas on voit que l'espérance (la moyenne) n'existe pas.

-On a

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_R x^2 f(x)dx - (+\infty)^2$$
$$= \int_{150}^{+\infty} x^2 * \frac{150}{x^2}dx - (+\infty)^2 = (+\infty) - (+\infty)^2$$

c'est une forme indéterminée, pour cela on va raisonner par l'absurde
Comme la variance peut avoir une valeur entre $[0, +\infty[$
On suppose $Var(X) \neq +\infty$ c.à.d $Var(X) = C \geq 0$ et comme

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Par suite

$$\frac{Var(X)}{E(X)} = \frac{E(X^2)}{E(X)} - \frac{E(X)^2}{E(X)} \qquad (**)$$

En utilisant le fait que $E(X) = +\infty$, par conséquent $\frac{Var(X)}{E(X)} \longrightarrow 0$
Et on obtient d'aprés $(**)$ $\frac{E(X^2)}{E(X)} = \frac{E(X)^2}{E(X)} = E(X) = +\infty$
c.à.d

$$\frac{E(X^2)}{E(X)} = +\infty$$

Forcement on a :$E(X^2) = +\infty$ et $E(X) \neq +\infty$ ce qui absurde car $E(X) = +\infty$
Conclusion:

$$Var(X) = +\infty$$

3) - si $a \in]-\infty, 150[$

$F_X(a) = P(X \leqslant a) = 0$

- si $a \in]150, +\infty[$

$F_X(a) = P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{150}{x^2}dx = 1 - \frac{150}{a}$

- si $a = +\infty$

$F_X(a) = P(X \leqslant a) = 1$

conclusion :

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & si \quad a \in]-\infty, 150[, \\ 1 - \frac{150}{a} & si \quad a \in]150, +\infty[\\ 1 & si \quad a = +\infty \end{cases}$$

4. Il faut calculer $P(X \geq 300)$:

$$P(X \geq 300) = 150 \int_{300}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{150}{x}\Big|_{300}^{+\infty} = \frac{150}{300} = 0.5$$

5. Il faut calculer la probabilité conditionnelle $P(X \geq 400 \mid X \geq 200)$. On a:

$$P(X \geq 400 \mid X \geq 200) = \frac{P((X \geq 400) \cap (X \geq 200))}{P(X \geq 200)} = \frac{P(X \geq 400)}{P(X \geq 200)} = \frac{150 \int_{400}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}{150 \int_{200}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx} = \frac{\int_{400}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}{\int_{200}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x}\Big|_{400}^{+\infty}}{-\frac{1}{x}\Big|_{200}^{+\infty}} = \frac{1/400}{1/200} = 0.5$$

6) a)-soit $y \in]0, +\infty[$

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(|X| \leqslant \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y})$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)dx = \int_{150}^{\sqrt{y}} \frac{150}{x^2}dx = [-\frac{150}{x}]_{150}^{\sqrt{y}} = 1 - \frac{150}{\sqrt{y}}$$

comme

$$f_Y(y) = F_Y'(y)$$

$$f(y) = \begin{cases} -\frac{75}{y^{\frac{3}{2}}} & si \quad y \in]0, +\infty[, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

b) -On a $E(Y) = E(X^2) = +\infty$ d'aprés question 2)

-En répétant le même raisonnement par l'absurde de la question 2) on a $Var(Y) = +\infty$

Correction Exercice 2 :

1. Il faut calculer $P(X > 150)$. La v.a $\frac{X-140}{10}$ suit la loi $N(0,1)$.

Donc :

$$P(X>150)=1-P(X\le 150)=1-P\left(\frac{X-140}{10}\le\frac{150-140}{10}\right)=1-\underbrace{P\left(\frac{X-140}{10}\le 1\right)}_{=\Phi(1)}\approx 1-0.8413=0.1587$$

Ceci signifie qu'il y a 15.87% de skieurs ayant réalisé un temps supérieur à 150 secondes. Sur 200 skieurs il y a donc $0.1587\cdot 200\approx 32$ skieurs ayant réalisé un temps supérieur à 150 secondes.

2. 20 skieurs sur 200 représentent une proportion de $20/200=1/10$. Le temps t vérifie donc l'égalité:

$$P(X\le t)=1/10\text{. On a } P\left(\frac{X-140}{10}\le\frac{t-140}{10}\right)=\Phi\left(\frac{t-140}{10}\right)=1/10$$

Donc:

$$\Phi\left(-\frac{t-140}{10}\right)=1-\Phi\left(\frac{t-140}{10}\right)=1-1/10=0.9$$

(cette ligne est nécessaire si vous ne disposez pas d'une table contenant les petites valeurs de Φ^{-1}). Dans la table on lit $-\frac{t-140}{10}=1.29$. Donc:

$$t=127.1$$

Correction Exercice 3 :

1)

On a S_n suit la loi B(n,p)

$E(S_n) = np$

$Var(S_n) = np(1-p)$

- par suite $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais

car $E(\overline{X_n}) = E(S_n/n) = p$

- et d'après le théorème de loi faible des grands nombres on a :

$$\overline{X_n}\xrightarrow{\mathbf{P}} p.$$

Par conséquent $\overline{X_n}$ est un estimateur consistant de p

2)

Si p est la proportion des poissons parasités dans le lac, lorsqu'on pêche un poisson, la probabilité pour qu'il soit porteurs de parasites est p.

Alors l'estimation ponctuelle des poissons porteurs de parasites est p_n = 180/900=0.2

- Pour le niveau de confiance 0.95 on a :
$F_Z(a) = P(Z \leq a) = 0.95 = F_Z(1.65)$ avec Z suit N(0.1)
D'où a = 1.65
Par conséquent l'intervalle de confiance I(p) = [0.2 - 1.65* √ 0.4/30 ; 0.2 +1.65* √ 0.4/30]

I(p) = [0.178 ; 0.222]

Pour le niveau de confiance 0.99 on a :
$F_Z(a) = P(Z \leq a) = 0.99 = F_Z(2.33)$ avec Z suit N(0.1)
D'où a = 2.33
Par conséquent l'intervalle de confiance I(p) = [0.2 - 1.65* √ 0.4/30 ; 0.2 + 1.65* √ 0.4/30]

I(p) = [0.168 ; 0.231]
<u>Commentaire :</u> on observe si on augmente le niveau de confiance, la longueur de l'intervalle de confiance augmente

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000