

Séries d'exercices : Variable aléatoire continue

Rappel

On appelle fonction indicatrice sur $[a, b]$ et on note $1_{[a, b]}(x)$ la fonction définie comme suit

$$1_{[a, b]}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \notin [a, b] \\ 1 & , \text{ si } x \in [a, b] \end{cases}$$

Exercice 1 :

Soit $f(x) = kx(1-x)^2 1_{(0,1)}(x)$. Trouver k pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Solution Exercice 1 :

Puisqu'on doit avoir $f \geq 0$, il s'ensuit qu'on doit avoir $k > 0$. Dans ce cas la fonction f est une densité si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$. Or

$$1 = k \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{k}{12}.$$

Donc $k = 12$.

Exercice 2 :

Soit $f(x) = \frac{2a-|x|}{4a^2} 1_{[-2a, 2a]}(x)$. Est-ce que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$?

Solution Exercice 2 :

D'abord $f \geq 0$. Il reste à montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$. Or

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= \int_{-2a}^{2a} \frac{2a - |x|}{4a^2} dx \\&= \frac{1}{4a^2} \left(\int_{-2a}^0 (2a + x) dx + \int_0^{2a} (2a - x) dx \right) \\&= \frac{1}{4a^2} \left(-\int_{2a}^0 (2a - x) dx + \int_0^{2a} (2a - x) dx \right) \\&= \frac{1}{2a^2} \int_0^{2a} (2a - x) dx \\&= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{(2a - x)^2}{-2} \Big|_0^{2a} \right) \\&= 1,\end{aligned}$$

ce qui prouve que la fonction f est une densité de probabilité.

Exercice 3 :

Soit $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} 1_{(0, \infty)}(x)$. Est-ce que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$?

Solution Exercice 3 :

La fonction f est une densité de probabilité si $\lambda > 0$. En effet, $f \geq 0$ et

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \\&= -e^{-\frac{x}{\lambda}} \Big|_0^{\infty} \\&= 0 - (-1) = 1.\end{aligned}$$

Exercice 4 :

Soit $f(x) = \frac{k}{e^x + e^{-x}}$. Trouver k pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Solution Exercice 4 :

Puisqu'on doit avoir $f \geq 0$, il s'ensuit qu'on doit avoir $k > 0$. Dans ce cas la fonction f est une densité si et seulement si

$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$. Or

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \\&= k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx \\&= k \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + u^2} du \\&= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\&= k \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

en faisant les changements de variables $u = e^x$ et après $\tan \theta = u$. Donc $k = 2 / \pi$

Exercice 5 :

Soit X la variable aléatoire associée à la durée de vie d'une lampe (en heures). On suppose que la densité de probabilité a pour expression

$$f(x) = \frac{a}{x^3} 1_{(1,2)}(x).$$

Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une lampe soit inférieure à 1,5 heures ?

Solution Exercice 5 :

$$1 = \int_1^2 \frac{a}{x^3} dx = a \frac{3}{8}.$$

Donc $a = \frac{8}{3}$. Maintenant la probabilité de durer moins de 1,5 heures est

$$P(X < 1,5) = \frac{8}{3} \int_1^{1,5} x^{-3} dx = \frac{5}{6,75} = 0,740700.$$

Exercice 6 :

Soit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

la densité de la variable aléatoire X . Trouver

i) $P(X > 1)$.

ii) $P(X < 1)$.

iii) $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$.

Solution Exercice 6 :

$$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$$

ii)

$$P(X < 1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

iii)

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Exercice 7 :

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} a(4x - 2x^2) & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

i) Quelle est la valeur de a ?

ii) Trouver $P(X > 1)$.

Solution Exercice 7 :

Solution. i) Parce que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$, il s'ensuit que

$$a \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = 1,$$

ou

$$a \left(\left(2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \right) = 1.$$

Donc $a = \frac{3}{8}$.

ii) On trouve

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= \int_1^{\infty} f(x) dx \\ &= \frac{3}{8} \int_1^2 (4x - 2x^2) dx \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 8 :

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver $E(X)$.

Solution Exercice 8 :

On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x) dx \\ &= \int_0^1 2x^2 dx \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 9 :

Trouver la valeur moyenne de la variable aléatoire X dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Solution Exercice 9 :

On a

$$E(X) = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx, \quad \text{donc} \quad E(X) = \frac{2a}{3}.$$

Exercice 10 :

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

i) Préciser k .

ii) Trouver $E(X)$ et $E(5X^2 - 3X + 1)$.

Solution Exercice 10 :

i) De $f(x) \geq 0$, il s'ensuit qu'on doit avoir $k > 0$. Puis,

$$1 = k \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2k \sqrt{x} \Big|_0^1 = 2k,$$

donc $k = 1/2$.

ii) $E(X) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{x} dx = 1/3$. D'abord, $E(X^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{3/2} dx = 1/5$.
Donc $E(5X^2 - 3X + 1) = 5E(X^2) - 3E(X) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$.

Exercice 11 :

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver $E(e^X)$.

Solution Exercice 11 :

Soit $Y = e^X$. Déterminons d'abord la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y . Pour $1 \leq y \leq e$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(e^X \leq y) \\ &= P(X \leq \log y) \\ &= \int_0^{\log y} f(x) dx \\ &= \log y. \end{aligned}$$

En dérivant $F_Y(y)$, on obtient la densité de Y , donc

$$f_Y(y) = \frac{1}{y}, \quad 1 \leq y \leq e.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} E(e^X) &= E(Y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy \\ &= \int_1^e dy \\ &= e - 1. \end{aligned}$$

Exercice 12 :

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Montrer que $f(x)$ est une densité et trouver la fonction de répartition correspondante.

Solution Exercice 12 :

La fonction f est non-négative, continue sauf en $x = -1$ et $x = 1$.

De plus,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{3}{2} x^2 dx \\ &= \left. \frac{x^3}{2} \right|_{-1}^1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc f est une fonction de densité. Trouvons la fonction de répartition correspondante. Pour $x < -1$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

Si $-1 \leq x < 1$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^x \frac{3}{2} t^2 dt \\ &= 0 + \left. \frac{t^3}{2} \right|_{-1}^x \\ &= \frac{x^3 + 1}{2}\end{aligned}$$

et si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^1 \frac{3}{2} t^2 dt + \int_1^x 0 dt \\ &= 0 + \left. \frac{t^3}{2} \right|_{-1}^1 + 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc, on a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^3+1}{2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On remarque que F est continue partout, dérivable sauf en -1 et en 1 et que $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq -1, 1$.

Loi Uniforme :

Exercice 13 :

Soit $X \sim U(-1, 1)$. Calculer la fonction de répartition des variables aléatoires

i) $|X|$.

ii) $4 - X^2$.

Solution Exercice 13 :

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X , donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

i) Posons $H_1(x) = P(|X| \leq x)$. On a tout d'abord $H_1(x) = 0$ si $x < 0$, et $H_1(x) = 1$ si $x \geq 1$. De plus, si $0 \leq x < 1$, on a

$$H_1(x) = P(-x \leq X \leq x) = F(x) - F(-x) = \frac{2x}{2} = x.$$

Donc $|X| \sim U(0, 1)$.

ii) Posons $H_2(y) = P(Y \leq y)$, où $Y = 4 - X^2$. Puisque $P(Y \in (3, 4)) = 1$, on aura $H_2(y) = 0$ si $y \leq 3$, et $H_2(y) = 1$ si $y \geq 4$. Maintenant, si $y \in (3, 4)$, on a

$$\begin{aligned} H_2(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(4 - X^2 \leq y) \\ &= P(X^2 \geq 4 - y) \\ &= P(|X| \geq \sqrt{4 - y}) \\ &= 1 - H_1(\sqrt{4 - y}) \\ &= 1 - \sqrt{4 - y}. \end{aligned}$$

Exercice 14 :

Soit $X \sim U(0, 10)$. Calculer les probabilités suivantes

i) $P(X < 3)$.

ii) $P(X > 6)$.

iii) $P(3 < X < 8)$.

Solution Exercice 14 :

On trouve

i)

$$P(X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{10} dx = \frac{3}{10}.$$

ii)

$$P(X > 6) = \int_6^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{4}{10}.$$

iii)

$$P(3 < X < 8) = \int_3^8 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{2}.$$

Exercice 15:

Soit $X \sim U(0,1)$. Trouver les fonctions de répartition et de densité associées à la variable aléatoire X^n .

Solution Exercice 15 :

Posons $Y = X^n$. Soit $x < 0$, alors $P(Y \leq x) = 0$, et donc

$F(x) = 0$. Soit maintenant $0 \leq x < 1$. On trouve

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(X^n \leq x) \\ &= P(X \leq x^{1/n}) \\ &= F_X(x^{1/n}) \\ &= x^{1/n}. \end{aligned}$$

Enfin, si $x \geq 1$, on a $F_Y(x) = F_X(x) = 1$. Par conséquent

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^{1/n} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La densité de la variable aléatoire Y , on l'obtient par la dérivation de la fonction de répartition. Donc

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} x^{1/(n-1)} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Loi exponentielle :

Exercice 15:

La durée de fonctionnement d'un ordinateur avant sa première panne est une variable aléatoire continue X dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-x/100} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Trouver la probabilité que la durée de fonctionnement soit comprise entre 50 et 150 heures.

i) Trouver la probabilité que l'ordinateur fonctionne moins de 100 heures.

Solution Exercice 15:

i) Comme

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-x/100} dx,$$

on trouve

$$1 = -100\lambda e^{-x/100} \Big|_0^{\infty} = 100\lambda,$$

donc $\lambda = \frac{1}{100}$ et $X \sim \mathcal{E}(\frac{1}{100})$. Ainsi la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ordinateur soit comprise entre 50 et 150 heures est donnée par

$$\begin{aligned} P(50 < X < 150) &= \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx \\ &= -e^{-x/100} \Big|_{50}^{150} \\ &= e^{-1/2} - e^{-3/2} \\ &\approx 0,383 \end{aligned}$$

ii) De façon analogue .

$$\begin{aligned} P(X < 100) &= \int_0^{100} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx \\ &= -e^{-x/100} \Big|_0^{100} \\ &= 1 - e^{-1} \\ &\approx 0,632 \end{aligned}$$

Donc l'ordinateur tombera en panne avant sa 100-ième heure de service approximativement 63 fois sur 100 en moyenne.

Loi marginale

Exercice 16:

Soit $X \sim U(0,1)$ et $Y \sim U(0,1)$ deux variables aléatoires indépendantes. Trouver la densité de la variables aléatoire $X + Y$.

Solution Exercice 16:

Notons d'abord que

$$f_X(a) = f_Y(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La densité de la variable aléatoire $X + Y$ est obtenue par la convolution des fonctions f_X et f_Y , donc

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(a) &= \int_{\mathbf{R}} f_X(a-y)f_Y(y) dy \\ &= \int_0^1 f_X(a-y) dy. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq a \leq 1$, on obtient

$$f_{X+Y}(a) = \int_0^a dy = a,$$

tandis que pour $1 < a \leq 2$, on aura

$$f_{X+Y}(a) = \int_{a-1}^1 dy = 2 - a.$$

Ainsi

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq a \leq 1 \\ 2 - a & \text{si } 1 < a \leq 2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouvons d'abord la fonction de répartition de Y . Soit $y \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(|X| \leq y) \\ &= P(-y \leq X \leq y) \\ &= F_X(y) - F_X(-y). \end{aligned}$$

Une dérivation nous donne la densité, donc

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y).$$