A-U : $2009-2010$
INSAT

Niveau : CBA $1,2$.

Serie 4 **: Probabilités**

Exercice 1
Soit $a \in I\!R$, $a > 0$ et soit X la variable aléatoire continue de densité de probabilité f avec

$$\begin{cases} f(x) &= ax(4-x), \quad 0 \leq x \leq 4 \\ f(x) &= 0, \quad sinon. \end{cases}$$

$a)$ Trouver a afin que X suive bien une loi de probabilité.
$b)$ Calculer l'espérance et la variance de X.
$c)$ Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer.
Exercice 2
Soit X la variable aléatoire continue de fonction de répartition F avec

$$\begin{cases} F(x) &= 1-(1+\frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}}, \quad si \quad x \geq 0 \\ F(x) &= 0, \quad sinon. \end{cases}$$

$a)$ Déterminer la densité de probabilité de X.
$b)$ Calculer son espérance et sa variance.
Exercice 3
Soit $a, b \in I\!R$ avec a et b strictement positifs. Soit X la variable aléatoire continue de densité f avec

$$f(x) = be^{-a|x|}.$$

$a)$ Trouver b en fonction de a afin que X suive bien une loi de probabilité.
$b)$ Calculer l'espérance et la variance de X.
$c)$ Déterminer la loi de $Y = X^2$.
$d)$ En déduire l'espérance et la variance de Y.
Exercice 4
Soient X et Y deux variables aléatoires continues. Soit f la densité du couple (X, Y) donnée par

$$\begin{cases} f(x,y) &= (y-x)e^{-(y-x)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad et \quad x \leq y \\ f(x,y) &= 0, \quad sinon. \end{cases}$$

Calculer
$a)$ les densités marginales de X et Y.
$b)$ La densité conditionelle de Y sachant X,
$c)$ la densité conditionnelle de X sachant Y,
$d)$ la densité de la variable aléatoire $Z = X + Y$.
Exercice 5
Soit X une variable de loi uniforme $U([0,1])$, a et b deux réels avec $a < b$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = (b-a)X + a$.
Exercice 5
L'éclairage d'une université est assuré par 10000 lampes dont la durée de vie (en milliers d'heures)

est une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour sa gestion, le service technique a besoin de connaitre :
a) le nombre de lampes hors d'usage après 3000 h.
b) Le nombre de lampes à remplacer entre 1000 h et 2000 h.
c) Le nombre d'heures qui se sont écoulées pour que la moitié des lampes soient hors d'usage.

Exercice 6

L'entreprise CMC fabrique des écrans vidéo pour micro-ordinateur. Une étude statistique a permis d'établir que la demande, au Japon, pour son modèle ZW était distribuée selon la loi normale avec une moyenne de 2000 unités par mois et un écart-type de 300 unités.
a) Si l'entreprise a en stock, pour le mois qui débute, 2300 unités, calculer la probabilité qu'elle ne puisse suffire à la demande.
b) L'entreprise veut s'assurer qu'elle ne sera pas en pénurie de stock plus de $\frac{5}{100}$ du temps. Quel doit être le nombre d'unités stockées mensuellement pour respecter cette condition.
c) Au Canada, la demande est encore supposée distribuée selon la loi normale avec le même écart-type de 300 unités. La repture de stock, pour un stock de 2000 unités, a lieu un mois sur douze. Calculer la demande moyenne m du nombre d'unités par mois.