Série 5 : Estimation ponctuelle

Exercice 1

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un n-échantillon de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et soit

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}.$$

- a) Montrer que $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais et consistant de p .
- b) On cherche à estimer la variance $\sigma^2 = p(1-p)$. On suppose l'estimateur $U_n = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)$.
 - 1) Calculer l'espérance et la variance de S_n .
 - 2) Montrer que U_n est un estimateur biaisé de σ^2 .
 - 3) Donner un estimateur V_n sans biais de σ^2 , fonction de U_n .

Exercice 2

Les statistiques qui servent à établir le tableau de bord d'une entreprise résultent souvent de l'exploitation de nombreux documents de base. Ces opérations demandent un certain délai. Une exploitation par sondage de ces documents peut faciliter l'accès à ces informations à des responsables, avec une précision tout à fait acceptable. Dans une entreprise commerciale, 16000 ordres de commande ont été enregistrés au cours d'une période déterminée. Une exploitation rapide de ces documents a été faite sur un échantillon au $\frac{1}{10}$: on a constaté que 240 ordres n'ont pu être satisfaits à la suite de ruptures de stock. Déterminer l'intervalle de confiance de la proportion d'ordres qui n'ont pu être parmi les 16000 qui ont été enregistrés, avec un niveau de confiance de $\frac{95}{100}$.

Exercice 3

Un analyste financier étudie les comptes de 200 clients ayant souscrit un emprunt. A partir d'un échantillon de 20 comptes, il a établi les données réduites suivantes (exprimées en francs) :

$$\bar{x} = 1514,69 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 3904811,97.$$

- a) En supposant que les données sont gaussiennes, donner une estimation ponctuelle de m solde moyen d'un compte et de son écart-type σ .
- b) Donner les intervalles de confiance à $\frac{95}{100}$ de m et σ .

Exercice 4

Sur un échantillon de 1000 amateurs de café, 300 individus interrogés préfèrent le robusta à l'arabica. Donner un intervalle de confiance à $\frac{99}{100}$ de la proportion d'individus préférant le robusta à l'arabica.

Exercice 5

On désire estimer le nombre N d'individus d'une espèce animale vivant sur une île. Pour cela, on capture 800 individus ; ces individus sont marqués, puis relâchés. Ensuite, on recapture ultérieurement 1000 animaux parmi lesquels on dénombre 250 animaux marqués. En déduire un intervalle de confiance à $\frac{95}{100}$ de N .

Exercice 6

On veut évaluer la consommation annuelle de cidre dans la région de Normandie. Une enquête menée auprès d'un échantillon de 400 personnes aboutit aux résultats réduits suivants (exprimés en nombre de bouteilles) :

$$\bar{x} = 110 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{400} (x_i - \bar{x})^2 = 1440000.$$

- a) Estimer la consommation annuelle de cidre avec un niveau de confiance de $\frac{0,8}{100}$.
- b) Même question pour un niveau de confiance de $\frac{0,99}{100}$.
- c) Pour un niveau de confiance de $\frac{0,99}{100}$, déterminer la taille de l'échantillon pour avoir un intervalle de confiance deux fois plus petit qu'au b.

Exercice 7

Un fabricant de boîtes de conserve veut contrôler la contenance des boîtes. On suppose que la contenance d'une boîte est une v.a.r. X de loi normale de moyenne m et d'écart-type σ . Un échantillon de 10 boîtes donne les contenances (exprimées en grammes) suivantes :
490 492 497 502 505 490 495 492 490 497.

- a) Donner un intervalle de confiance de m et de σ au niveau $\frac{90}{100}$.

b) Le fabricant affirme que les boites ont en moyenne une contenance de 500 grammes. Donner un intervalle de confiance de σ au niveau $\frac{90}{100}$.

Exercice 8

La durée de vie d'une batterie de bi-bop est une v.a.r. X de densité

$$f_{\theta}(x) = \theta^{-1}e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x \geq 0,$$

$$f_{\theta}(x) = 0, \quad \text{sinon.}$$

- a) Montrer que le temps moyen de bon fonctionnement d'une batterie est égal à θ .
b) A fin d'établir une durée de garantie, le fabricant cherche à estimer le temps moyen de bon fonctionnement. Etudier l'estimateur du maximum de $\widehat{\theta}_n$ de θ .
c) On peut montrer que

$$\left(\frac{2n}{\theta}\right)\widehat{\theta}_n$$

suit la loi $\chi^2(2n)$. Donner en expliquant votre démarche, un intervalle de confiance théorique de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

d) Des tests sont effectués sur un échantillon de 10 batteries. Les durées de vie observées (exprimées en milliers d'heures) sont les suivantes :

16, 14 36, 24 72, 35 43, 09 9, 13 1, 46 39, 96 11, 935 30, 04 42, 37.

Donner un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $\frac{95}{100}$.