Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie | **A-U 2009-2010**
1ère année ING-CBA | **TD de MR. BEY**
Probabilités et Statistiques | **Groupes 1 & 5**

Série 6 : Convergences

Exercice 1

Soit (X_n) une suite de v.a.r. de lois définies pour $n \geq 1$ par

$$P(X_n = 0) = \frac{n}{n+1}, \quad P(X_n = n) = \frac{1}{n+1}.$$

$a)$ Montrer que $X_n \longrightarrow X$ où X est une v.a.r. que l'on déterminera.
$b)$ Calculer $E[(X_n - X)^2]$ ainsi que sa limite quand $n \longrightarrow +\infty$. Que peut-on en conclure.

Exercice 2

A l'aide du théorème de limite centrale, démontrer la relation : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3

Un candidat a obtenu $\frac{49}{100}$ des suffrages exprimés à une élection. Donner la probabilité d'avoir entre $\frac{48}{100}$ et $\frac{50}{100}$ des votes dans un échantillon non exhaustif de n suffrages exprimés :
$a)$ pour $n = 10$.
$b)$ pour $n = 100$.

Exercice 4

On considère 10000 chiffres pris au hazard. Calculer la probabilité que le chiffre 7 apparaisse 999 fois.

Exercice 5

Le service des renseignements téléphoniques reçoit en moyenne 100 appels par heure. Evaluer la probabilité que le nombre d'appels en une heure varie de un écart-type par rapport à la moyenne.

Exercice 6

Un micro-processeur effectue, lors d'une opération, une erreur de calcul avec la probabilité $p = 10^{-5}$. Déterminer le nombre d'opérations n nécessaires pour que la proportion p_n d'erreurs obtenues vérifie $P(\frac{|p_n - p|}{p} > 0,2) \leq 0,05$.
a) A partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
b) A partir du théorème de limite centrale.

Exercice 7

Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ strictement positif et pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$P(S_n \geq na) \leq e^{-xna} E(e^{xS_n}).$$